JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. CAYLEY

Nouvelles recherches sur les fonctions de M. Sturm

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 269-274.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__269_0>

NOUVELLES RECHERCHES

SUR

LES FONCTIONS DE M. STURM;

PAR M. A. CAYLEY.

En développant une remarque faite par M. Sylvester dans un Mémoire publié il y a huit ou neuf ans dans le *Philosophical Magazine,* j'ai trouvé des expressions assez simples des fonctions de M. Sturm, composées au moyen des coefficients mêmes; ce qui convient mieux que d'exprimer ces fonctions, comme je l'ai déjà fait dans le tome XI de ce Journal, page 297, par les sommes des puissances. D'ailleurs il ne m'est plus nécessaire de parler des expressions de M. Sylvester, ou même des divisions successives de M. Sturm; mais ma méthode fait voir directement que les fonctions que je vais définir sont douées de la propriété fondamentale sur laquelle se repose la théorie de M. Sturm, à savoir que, en considérant trois fonctions successives, la première et la dernière fonction sont de signe contraire pour toute valeur de la variable qui fait évanouir la fonction intermédiaire; cependant je n'ai pas encore réussi à démontrer dans toute sa généralité l'équation identique d'où dépend cette propriété.

Soient d'abord V, V' des fonctions du même degré n,

$$V = ax^n + bx^{n-1} + \dots,$$
$$V' = a'x^n + b'x^{n-1} + \dots,$$

et écrivons

$$-F_1 = \begin{vmatrix} V, & V' \\ a & a' \end{vmatrix},$$

$$F_2 = \begin{vmatrix} xV, & V, & xV', & V' \\ a & . & a' & . \\ b & a & b' & a' \\ c & b & c' & b' \end{vmatrix},$$

$$-F_3 = \begin{vmatrix} x^2V, & xV, & V, & x^2V', & xV', & V' \\ a & . & . & a' & . & . \\ b & a & . & b' & a' & . \\ c & b & a & c' & b' & a' \\ d & c & b & d' & c' & b' \\ e & d & c & e' & d' & c' \end{vmatrix}, \text{etc.}$$

(ce qui suffit pour faire voir la loi de ces fonctions successives F_1, F_2,...). Il résulte des propriétés élémentaires des déterminants que ces fonctions sont des ordres $\overline{n-1}$, $\overline{n-2}$, $\overline{n-3}$, etc. respectivement, par rapport à la variable x. En effet, dans F_1 le coefficient de x^n se réduit à $\begin{vmatrix} a, & a' \\ a & a' \end{vmatrix}$, savoir, à zéro; de même, dans F_2, les coefficients de x^n et x^{n-1} se réduisent chacun à zéro; et ainsi de suite.

Soient encore

$$P_1 = \begin{vmatrix} a, & a' \\ b & b \end{vmatrix}, \qquad P'_1 = \begin{vmatrix} a, & a' \\ c & c' \end{vmatrix},$$

$$P_2 = \begin{vmatrix} a, & . & a' & . \\ b & a & b' & a' \\ c & b & c' & b' \\ d & c & d' & c' \end{vmatrix}, \qquad P'_2 = \begin{vmatrix} a, & . & a' & . \\ b & a & b' & a' \\ c & b & c' & b' \\ e & d & e' & d' \end{vmatrix},$$

$$P_3 = \begin{vmatrix} a, & . & . & a', & . & . \\ b & a & . & b' & a' & . \\ c & b & a & c' & b' & a' \\ d & c & b & d' & c' & b' \\ e & d & c & e' & d' & c' \\ f & e & d & f' & e' & d' \end{vmatrix}, \text{etc.}, \quad P'_3 = \begin{vmatrix} a, & . & . & a', & . & . \\ b & a & . & b' & a' & . \\ c & b & a & c' & b' & a' \\ d & c & b & d' & c' & b' \\ e & d & c & e' & d' & c' \\ g & f & e & g' & f' & e' \end{vmatrix}, \text{etc.},$$

(ce qui suffit pour indiquer la loi). On aura entre ces différentes fonctions F, P, P′ cette suite remarquable d'équations identiques,

$$P_1^2 F_3 + (xP_1 P_2 + P_1 P_2^1 + P_1^1 P_2) F_2 + P_2^2 F_1 = 0,$$

$$P_2^2 F_4 + (xP_2 P_3 + P_2 P_3^1 + P_2^1 P_3) F_3 + P_3^2 F_2 = 0,$$

etc.,

lesquelles équations, dans ce Mémoire, seront prises pour vraies. Cela étant, il est évident que F_1 et F_3 seront de signe contraire pour toute valeur de x qui fait évanouir F_2; F_2 et F_4 seront de signe contraire pour toute valeur de x qui fait évanouir F_3; et ainsi de suite.

Ces formules renferment le cas où les deux fonctions V, V′ ne sont pas du même degré (en effet, pour les y adapter, on n'a besoin que de faire évanouir quelques-uns des premiers coefficients de V ou de V′). Il est donc permis de supposer que V′ soit la dérivée de V. Dans ce cas, $F_1 = aV'$, et on verra dans un moment que les fonctions F_2, F_3,... contiennent chacune le facteur a^2, de manière qu'il convient d'écrire $F_2 = a^2 V_2$, $F_3 = a^2 V_3$,.... Ce facteur a^2 peut être évidemment écarté, et ce sera de même avec le facteur a de F, pourvu, ce que je supposerai dans la suite, que a soit positif. On aura de cette manière les fonctions V, V′, V_2, V_3,... douées des propriétés des fonctions de M. Sturm. En effet, elles seront précisément les fonctions fx, $f_1 x$, $f_2 x$,... du Mémoire déjà cité, ce qui cependant pourrait être difficile à démontrer à priori.

On déduit tout de suite des expressions de F_2, F_3,...,

$$aV_2 = -\begin{vmatrix} V, & xV', & V' \\ a & na & . \\ b & \overline{n-1}\,b & na \end{vmatrix},\quad aV_3 = \begin{vmatrix} xV, & V, & x^2V', & xV', & V' \\ a & . & na & . & . \\ b & a & \overline{n-1}\,b & na & . \\ c & b & \overline{n-2}\,c & \overline{n-1}\,b & na \\ d & c & \overline{n-3}\,d & \overline{n-2}\,c & \overline{n-1}\,b \end{vmatrix},\ \text{etc.}$$

Ces formules se simplifient au moyen des propriétés connues des déterminants, et en écrivant

$$xV' - nV = -U,$$

cela donne

$$aV_2 = \begin{vmatrix} V, & U, & V' \\ a & \cdot & \cdot \\ b & b & na \end{vmatrix}, \qquad aV_3 = \begin{vmatrix} xV, & V, & xU, & U, & V' \\ a & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b & a & b & \cdot & \cdot \\ c & b & 2c & b & na \\ d & c & 3d & 2c & \overline{n-1}\,b \end{vmatrix}, \text{ etc.};$$

ou enfin, et en écrivant un autre terme de la suite, afin de mieux faire voir la loi,

$$V_2 = -\begin{vmatrix} U, & V' \\ b & na \end{vmatrix}, \qquad V_3 = -\begin{vmatrix} V, & xU, & U, & V' \\ a & b & \cdot & \cdot \\ b & 2c & b & na \\ c & 3d & 2c & \overline{n-1}\,b \end{vmatrix},$$

$$V_4 = -\begin{vmatrix} xV, & V, & x^2U, & xU, & V' \\ a & \cdot & b & \cdot & \cdot \\ b & a & 2c & b & \cdot \\ c & b & 3d & 2c & na \\ d & c & 4e & 3d & \overline{n-1}\,b \\ e & d & 5f & 4e & \overline{n-2}\,c \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

formules dans lesquelles

$$\left\{\begin{aligned} V &= ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots, \\ V' &= \phantom{ax^n + {}} nax^{n-1} + \overline{n-1}\,bx^{n-2} + \ldots, \\ U &= \phantom{ax^n + {}} bx^{n-1} + 2cx^{n-2} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

et où, en substituant ces valeurs, on peut commencer pour V_2 avec le terme qui contient x^{n-2}, pour V_3 avec le terme qui contient x^{n-3}, et ainsi de suite, puisque les termes des ordres plus hauts s'évanouissent identiquement. Voilà, je crois, les expressions les plus simples des fonctions de M. Sturm.

Je donnerai en conclusion ces formes développées des fonctions jusqu'à V_4.

$$V = \quad ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots;$$

$$V' = \quad nax^{n-1} + \overline{n-1}\,bx^{n-2} + \overline{n-2}\,cx^{n-3} + \ldots;$$

$$\begin{aligned} V_2 = & - na\,\{2\,cx^{n-2} + 3\,dx^{n-3} + \ldots, \\ & + b\ \{\overline{n-1}\,bx^{n-2} + \overline{n-2}\,cx^{n-3} + \ldots; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_3 = & \quad [2\,nabc - \overline{n-1}\,b^3 \qquad\qquad\quad]\,\{dx^{n-3} + ex^{n-4} + \ldots, \\ & + [-2\,n^2ac + \overline{n-1}\,ab^2 \qquad\quad]\,\{4\,ex^{n-3} + 5\,fx^{n-4} + \ldots. \\ & + [3na^2d - (3n-2)\,abc + (n-1)\,b^3]\,\{3\,dx^{n-3} + 4\,ex^{n-4} + \ldots, \\ & + [-3\,abd + 4\,ac^2 - b^2c \qquad\quad]\,\{(n-2)\,cx^{n-3} + (n-3)\,dx^{n-4} + \ldots; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_4 = & \quad A\,\{fx^{n-4} + gx^{n-5} + \ldots, \\ & + B\,\{ex^{n-4} + fx^{n-5} + \ldots, \\ & + C\,\{6\,gx^{n-4} + 7\,hx^{n-5} + \ldots, \\ & + D\,\{5\,fx^{n-4} + 6\,gx^{n-5} + \ldots, \\ & + E\,\{4\,ex^{n-4} + 5\,fx^{n-5} + \ldots, \\ & + F\,\{\overline{n-3}\,dx^{n-4} + \overline{n-4}\,ex^{n-5} + \ldots; \end{aligned}$$

dans cette dernière expression j'ai mis, pour abréger,

$$\begin{aligned} A = & \quad 9na^2bd^2 - 8\,na^2bce + (4n-4)\,ab^3e - (10\,n-12)\,ab^2cd \\ & + (4n-8)\,abc^3 - (n-2)\,b^3c^2 + (2\,n-2)\,b^4d, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = & \quad 10\,na^2bcf - 12\,na^2bde - 16\,na^2c^2e + 18\,na^2cd^2 - (5n-5)\,ab^3f \\ & + (18n-16)\,ab^2ce + (3n-9)\,ab^2d^2 - (24n-36)\,abc^2d + (8n-16)\,ac^4 \\ & - (3n-3)\,b^4e + (5n-7)\,b^3cd - (2n-4)\,b^2c^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C = & \quad 8\,na^3ce - 9na^3d^2 - (4n-4)\,a^2b^2e + (10n-12)\,a^2bcd \\ & - (4n-8)\,a^2c^3 - (2\,n-2)\,ab^3d + (n-2)\,ab^2c^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D = & - 10\,na^3cf + 12\,na^3de + (5n-5)\,a^2b^2f - (2\,n-8)\,a^2bce \\ & - (12n-9)\,a^2bd^2 + (4n-12)\,a^2c^2d - (n-1)\,ab^3e + (9n-9)\,ab^2cd \\ & - (4n-8)\,abe^3 - (2\,n-2)\,b^4d + \overline{n-2}\,b^3c^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E} = {} & 15na^3df - 16na^3e^2 - (15n-10)a^2bcf + (17n-12)a^2bde \\
& + (16n-16)a^2c^2e - (15n-18)a^2cd^2 + (5n-5)ab^3f \\
& - (17n-18)ab^2ce + (14n-24)abc^2d - (n-3)ab^2d^2 \\
& - (4n-8)ac^4 + (3n-3)b^4e - (3n-5)b^3cd + (n-2)b^2c^3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{F} = {} & -15a^2bdf + 16a^2be^2 + 20a^2c^2f - 27a^2d^3 - 48a^2cde \\
& - 5ab^2cf + 7ab^2de - 4abc^2e - 18abcd^2 + 4ac^3d \\
& - 3b^3ce + 4b^3d^2 - b^2c^2d^2.
\end{aligned}$$

Il serait évidemment inutile de vouloir pousser plus loin ces calculs.