JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

C. JOUBERT

Démonstration d'un théorème de statique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 13 (1848), p. 241-244.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1848_1_13__241_0>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE STATIQUE;

PAR M. C. JOUBERT,
Élève de l'École Normale.

Avant de donner l'énoncé de ce théorème, j'en rappellerai un autre qui m'y a conduit, et que voici :

« Quand on applique à tous les éléments d'une surface fermée quel-
» conque des forces normales proportionnelles au produit $d\sigma\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{r}\right)$,
» $d\sigma$ désignant la surface de l'élément auquel la force est appliquée, R
» et r les rayons de courbure principaux de la surface, toutes ces
» forces se font équilibre. »

Pour le démontrer, souvenons-nous d'abord que des forces appliquées à tous les éléments d'une surface fermée quelconque, dirigées suivant la normale, et proportionnelles aux surfaces de ces éléments, se font équilibre.

Cela posé, considérons sur la surface proposée un élément $d\sigma$, auquel nous appliquons une force $Pd\sigma$, P désignant un facteur constant. Si, par les différents points de la surface, nous menons les normales, et si nous prolongeons chacune d'elles vers l'extérieur d'une même longueur ds, le lieu de ces extrémités sera une seconde surface ayant les mêmes normales que la proposée. A l'élément $d\sigma$ de la première surface correspondra sur la seconde un élément $d\sigma'$, déterminé par l'intersection avec cette dernière des différentes normales menées par les points de contour de l'élément $d\sigma$. Appliquons de même à l'élément $d\sigma'$ une force normale $Pd\sigma'$, mais contraire à la force $Pd\sigma$. Nous faisons la même chose pour tous les éléments des deux surfaces.

Toutes les forces appliquées à la première surface se feront équilibre, d'après le théorème cité en commençant : il en sera de même des forces appliquées à la seconde. Si nous composons ces forces entre elles, leurs résultantes se feront encore équilibre. Or les deux forces $Pd\sigma'$ et $Pd\sigma$ donnent une résultante égale à leur différence $P(d\sigma' - d\sigma)$, que nous pouvons supposer appliquée à l'élément $d\sigma$ et dirigée suivant la normale. Nous faisons la même chose pour tous les éléments correspondants des deux surfaces; et les forces $P(d\sigma' - d\sigma)$, appliquées à la première, se feront équilibre.

Or il résulte d'une formule démontrée par M. Bertrand, dans un Mémoire sur les surfaces isothermes orthogonales, que la différence $d\sigma' - d\sigma$ des deux éléments correspondants peut se mettre sous la forme $d\sigma ds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)$. La démonstration de cette formule y est présentée à peu près dans les termes suivants :

Quelque petit que soit l'élément $d\sigma$, nous pouvons toujours le concevoir décomposé en une infinité de rectangles infiniment petits par rapport à lui-même. Supposons ces rectangles déterminés par les lignes de courbure; les deux surfaces ayant les mêmes normales, les lignes de courbure se correspondent, et à chaque rectangle ABCD, formé par quatre lignes de courbure sur la première surface, correspondra un rectangle A'B'C'D' sur la seconde. Posons

$$AB = \alpha, \qquad AC = \beta,$$
$$A'B' = \alpha + d\alpha, \quad A'C' = \beta + d\beta.$$

Les droites A'A, B'B sont normales à la première surface, et vont se rencontrer en un point O à une distance R du point A et $R + ds$ du point A'. Nous aurons donc, dans le triangle A'B'O,

$$\alpha + d\alpha : \alpha :: R + ds : R,$$

donc

$$d\alpha = \frac{\alpha ds}{R};$$

et, de même,

$$d\beta = \frac{\beta ds}{r},$$

et, par suite, le rectangle A'B'C'D' sera

$$(\alpha + d\alpha)(\beta + d\beta) = \alpha\beta\left(1 + \frac{ds}{R} + \frac{ds}{r}\right).$$

Ainsi donc, en passant de la première surface à la seconde, les rectangles augmentent proportionnellement à la somme $\frac{1}{R} + \frac{1}{r}$: il en sera donc de même des éléments correspondants, et nous aurons

$$d\sigma' - d\sigma = d\sigma ds \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right).$$

En remplaçant $d\sigma' - d\sigma$ par cette valeur dans l'expression de la force appliquée à l'élément $d\sigma$, nous voyons que des forces $Pd\sigma ds \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)$, appliquées à tous les éléments de la première surface, se font équilibre, et ces forces sont précisément proportionnelles au produit $d\sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)$; de sorte que le théorème énoncé se trouve démontré [*].

Le théorème, bien connu du reste, dont je viens d'indiquer une démonstration nouvelle, telle qu'elle a été donnée par M. Bertrand dans ses Conférences à l'École Normale, m'a conduit au suivant :

« Si l'on applique à tous les éléments d'une surface fermée des forces
» normales proportionnelles à l'expression $\frac{d\sigma}{Rr}$, $d\sigma$ désignant toujours
» la surface de l'élément, R et r les deux rayons de courbure de la
» surface, toutes ces forces se font équilibre. »

Considérons toujours les deux surfaces dont il a été question dans la démonstration du théorème précédent; appliquons à l'élément $d\sigma$ de la première surface une force normale représentée par

$$Pd\sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right),$$

et à l'élément correspondant de la seconde, une force

$$Pd\sigma' \left(\frac{1}{R + ds} + \frac{1}{r + ds}\right),$$

normale, mais contraire à la précédente. Faisons la même chose pour tous les éléments correspondants des deux surfaces.

---

[*] Une démonstration analogue prouverait que des forces appliquées à tous les éléments d'une courbe plane fermée, dirigées suivant la normale et proportionnelles à $\frac{ds}{\rho}$ (ds désignant l'élément de l'arc et ρ le rayon de courbure), se font équilibre.

D'après le théorème précédent, les forces appliquées à la première surface se font équilibre, et, en faisant attention que $R + ds$ et $r + ds$ sont les rayons principaux de la seconde surface, nous voyons qu'il en est de même des forces appliquées à cette dernière. Si nous composons ces forces entre elles, leurs résultantes se feront encore équilibre : or les deux forces $Pd\sigma\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)$ et $Pd\sigma'\left(\frac{1}{R + ds} + \frac{1}{r + ds}\right)$, composées entre elles, donnent une résultante égale à leur différence

$$Pd\sigma'\left(\frac{1}{R + ds} + \frac{1}{r + ds}\right) - Pd\sigma\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right);$$

en remplaçant $d\sigma'$ par sa valeur

$$d\sigma + d\sigma ds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right),$$

cette différence devient

$$Pd\sigma\left(\frac{1}{R + ds} + \frac{1}{r + ds} - \frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right) + Pd\sigma ds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right)\left(\frac{1}{R + ds} + \frac{1}{r + ds}\right).$$

Réduisant et négligeant les quantités infiniment petites du quatrième ordre, l'expression de cette force deviendra

$$2Pd\sigma ds\frac{1}{Rr}.$$

Cette force $2Pd\sigma ds\frac{1}{Rr}$ peut être considérée comme appliquée à l'élément $d\sigma$ de la première surface. Nous pouvons faire la même chose pour tous les éléments correspondants des deux surfaces. Ainsi donc les forces $2Pd\sigma ds\frac{1}{Rr}$, appliquées à tous les éléments de la première surface, se font équilibre, et ces forces sont proportionnelles à $\frac{d\sigma}{Rr}$: le théorème énoncé se trouve donc démontré.