JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. MOLINS

Note sur les courbes dont les plans osculateurs font un angle constant avec une surface développable sur laquelle elles sont tracées

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 12 (1847), p. 394-409.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12__394_0>

NOTE

Sur les courbes dont les plans osculateurs font un angle constant avec une surface développable sur laquelle elles sont tracées ;

PAR M. H. MOLINS,

Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Nous nous sommes occupé, dans le tome VIII de ce Journal, des courbes qui coupent, sous un angle constant, les tangentes d'une courbe donnée ou les génératrices de la surface développable dont cette courbe est l'arête de rebroussement. Nous allons compléter ces recherches en étudiant les propriétés des trajectoires qui coupent les tangentes d'une courbe donnée, de telle manière que leurs plans osculateurs fassent un angle constant avec ceux de cette courbe. On remarquera que, si, suivant les tangentes d'une des trajectoires, on menait des plans faisant avec ses plans osculateurs un angle égal à l'angle constant, la courbe donnée serait l'arête de rebroussement de la surface enveloppe des premiers plans; ou bien encore la courbe donnée et chacune des trajectoires sont les arêtes de rebroussement de deux surfaces développables qui se coupent sous un angle constant. Lorsque cet angle est droit, les trajectoires sont des lignes géodésiques tracées sur une surface développable donnée, et nous verrons qu'on peut toujours obtenir leurs équations sous forme intégrable, au moyen de deux quadratures successives.

1. Soient

$$x = \varphi z, \quad y = \psi z$$

les équations de la courbe donnée; celles de la tangente, menée par le point pour lequel $z = \alpha$, seront

$$x - \varphi\alpha = (z - \alpha)\varphi'\alpha, \quad y - \psi\alpha = (z - \alpha)\psi'\alpha,$$

d'où

(1) $$(y - \psi\alpha)\,\varphi'\alpha = (x - \varphi\alpha)\,\psi'\alpha.$$

Si l'on considère une quelconque des trajectoires, elle coupera cette tangente en un point (x, y, z), et l'équation de son plan osculateur sera de la forme

$$z' - z = \mathrm{A}(x' - x) + \mathrm{B}(y' - y).$$

Concevons une seconde tangente menée par le point pour lequel $z = \alpha + d\alpha$, et soient $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ les coordonnées du point correspondant de la trajectoire; on trouvera, en différentiant les équations de la première tangente,

$$dx = \varphi'\alpha dz + (z - \alpha)\,\varphi''\alpha d\alpha, \quad dy = \psi'\alpha dz + (z - \alpha)\,\psi''\alpha d\alpha,$$

d'où

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'\alpha dz + (z - \alpha)\,\psi''\alpha d\alpha}{\varphi'\alpha dz + (z - \alpha)\,\varphi''\alpha d\alpha}.$$

On tire de la

$$dz = \frac{\psi''\alpha - \frac{dy}{dx}\varphi''\alpha}{\varphi'\alpha\frac{dy}{dx} - \psi'\alpha}(z - \alpha)\,d\alpha;$$

par suite,

$$dx = \frac{\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha}{\varphi'\alpha\frac{dy}{dx} - \psi'\alpha}(z - \alpha)\,d\alpha,$$

$$dy = \frac{(\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)\frac{dy}{dx}}{\varphi'\alpha\frac{dy}{dx} - \psi'\alpha}(z - \alpha)\,d\alpha.$$

Mais le plan osculateur de la trajectoire devant passer au point infiniment voisin du point (x, y, z), on aura

$$dz = \mathrm{A}\,dx + \mathrm{B}\,dy,$$

et, en substituant les valeurs de dx, dy, dz, on trouvera

(2) $$\psi''\alpha - \frac{dy}{dx}\varphi''\alpha = \left(\mathrm{A} + \mathrm{B}\frac{dy}{dx}\right)(\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha).$$

Formons maintenant l'expression de l'angle θ que fait la tangente de la courbe donnée avec celle de la nouvelle courbe, ou, ce qui revient au même, avec l'intersection des plans osculateurs des deux courbes. Le plan osculateur de la courbe donnée a pour équation

$$z' - z = p(x' - x) + q(y' - y),$$

en faisant

$$p = \frac{\psi''\alpha}{\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha}, \quad q = -\frac{\varphi''\alpha}{\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha};$$

si l'on y joint l'équation

$$z' - z = A(x' - x) + B(y' - y),$$

on aura les équations de l'intersection des plans osculateurs des deux courbes. On en déduit

$$x' - x = \frac{q - B}{Aq - Bp}(z' - z), \quad y' - y = \frac{A - p}{Aq - Bp}(z' - z),$$

ou bien, en remplaçant p, q par leurs valeurs et mettant pour A sa valeur en fonction de B tirée de l'équation (2), ce qui fera disparaître la quantité B elle-même,

$$x' - x = \frac{\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha}{\psi''\alpha - \varphi''\alpha\dfrac{dy}{dx}}(z' - z),$$

$$y' - y = \frac{(\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)\dfrac{dy}{dx}}{\psi''\alpha - \varphi''\alpha\dfrac{dy}{dx}}(z' - z).$$

Désignons, pour abréger, par a et b les multiplicateurs de $z' - z$, et exprimons que la droite représentée par ces deux équations fait un angle égal à θ avec la tangente de la courbe donnée, dont la direction est déterminée par les quantités $\varphi'\alpha$, $\psi'\alpha$: nous aurons, par une formule connue,

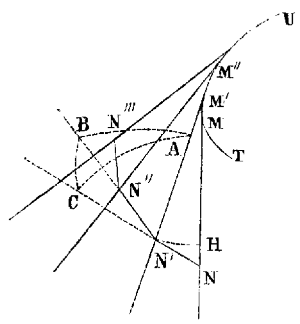
$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\sqrt{(a - \varphi'\alpha)^2 + (b - \psi'\alpha)^2 + (a\psi'\alpha - b\varphi'\alpha)^2}}{a\varphi'\alpha + b\psi'\alpha + 1},$$

ou bien, en mettant pour a, b leurs valeurs, et, après quelques réductions,

$$(3)\quad \operatorname{tang}\theta = \frac{\sqrt{(\varphi''\alpha)^2 + (\psi''\alpha)^2 + (\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)^2}}{(\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)\left(\varphi'\alpha + \psi'\alpha\frac{dy}{dx}\right) + \psi''\alpha - \varphi''\alpha\frac{dy}{dx}} \times \left(\psi'\alpha - \varphi'\alpha\frac{dy}{dx}\right).$$

Dans cette formule le radical peut être pris avec les signes $\pm$, ce qui donnera pour θ deux angles supplémentaires.

2. Il nous reste à former une autre expression générale de ϑ en fonction de α, qui soit indépendante de $\frac{dy}{dx}$, et c'est à quoi nous arriverons en nous appuyant sur ce que l'angle des plans osculateurs des deux courbes doit être constant.



Soient M, M', M'',... plusieurs points consécutifs de la courbe donnée TU; MN, M'N', M''N'',... les tangentes en ces points, et NN', N'N'', N''N''',... les éléments successifs de la trajectoire. Appelons ε l'angle de contingence et ω l'angle de torsion de la courbe donnée, ε_1 et ω_1 les mêmes quantités pour la trajectoire, et i l'angle constant des plans osculateurs des deux courbes; prolongeons les éléments NN', N'N'', et considérons l'angle trièdre ayant pour sommet le point N' et pour arêtes les droites N'A, N'B, N'C. Les plans de cet angle trièdre forment, sur une sphère ayant N' pour centre et l'unité pour rayon, un triangle sphérique ABC dans lequel on aura, comme il est aisé de voir,

$$a = \mathrm{BN'C} = \varepsilon_1, \quad b = \mathrm{CN'A} = \mathrm{N'NM} + \mathrm{NM'N'} = \vartheta + \varepsilon, \quad c = \mathrm{BN'A} = \vartheta + d\vartheta,$$
$$\mathrm{A} = \omega, \quad \mathrm{B} = 180^\circ - (i + \omega_1), \quad \mathrm{C} = i.$$

Ce triangle donne, par une formule connue,

$$\cot c \sin b = \cos b \cos \mathrm{A} + \sin \mathrm{A} \cot \mathrm{C}.$$

ou bien

$$\cot(\theta + d\theta)\sin(\theta + \varepsilon) = \cos(\theta + \varepsilon)\cos\omega + \sin\omega\cot i,$$

d'où l'on déduira sans difficulté, en remplaçant $\cot(\theta + d\theta)$ par $\frac{\cos(\theta + d\theta)}{\sin(\theta + d\theta)}$, développant les sinus et cosinus de $\theta + d\theta$ et $\theta + \varepsilon$, et négligeant par rapport aux infiniment petits du premier ordre ceux d'un ordre supérieur,

$$(4) \qquad d\theta - \varepsilon + \omega \cot i \sin\theta = 0.$$

Comme ε et ω sont déterminés en fonction de α par les équations de la courbe donnée, cette équation est une équation différentielle du premier ordre par rapport à θ, dont l'intégration donnerait θ en fonction de α et d'une constante arbitraire. Mais on ne sait pas l'intégrer pour une valeur quelconque de l'angle i.

Si cet angle était droit, on aurait

$$\cot i = 0,$$

et l'équation deviendrait

$$d\theta - \varepsilon = 0, \quad \text{d'où} \quad \theta = \int \varepsilon + C.$$

Ce cas important est celui où la trajectoire devient une ligne de plus courte distance entre deux de ses points sur une surface développable donnée. En effet, la relation $d\theta = \varepsilon$ prouve que l'angle N″N′M′ ou $\theta + d\theta$ est égal à $\theta + \varepsilon$ ou à l'angle NN′K, d'où l'on conclut immédiatement que si l'on développait sur un point la surface développable, lieu des tangentes de la courbe donnée, les divers éléments de la trajectoire seraient en ligne droite, et, par suite, que cette trajectoire est une ligne géodésique ou de plus courte distance entre deux quelconques de ses points sur la surface. Ceci démontre pour les surfaces développables cette proposition générale, que les lignes de plus courte distance sur une surface ont leurs plans osculateurs perpendiculaires à ses plans tangents.

3. Pour obtenir sous forme intégrable les équations des lignes géodésiques, désignons $\int \varepsilon$ par E qui représente une fonction de α; on aura

$$\theta = E + C,$$

et la constante C se déterminerait par une valeur connue de θ répondant à une valeur particulière de α. Si l'on porte cette valeur générale de θ dans l'équation (3), on en tirera α en fonction de $\frac{dy}{dx}$, expression qu'on portera dans l'équation (1). Or cette équation peut être mise sous la forme

$$y = \frac{\psi'\alpha}{\varphi'\alpha}\,x + \frac{\psi\alpha\varphi'\alpha - \varphi\alpha\psi'\alpha}{\varphi'\alpha},$$

et puisque α est fonction de $\frac{dy}{dx}$, on voit qu'elle rentre dans une classe d'équations qu'on sait intégrer. Pour cela, on éliminera $y - \psi\alpha$ entre l'équation (1) et sa différentielle, prise en faisant varier toutes les quantités qui y entrent : on trouvera

$$(5) \qquad \left(\varphi'\alpha\frac{dy}{dx} - \psi'\alpha\right)dx = \frac{\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha}{\varphi'\alpha}(x - \varphi\alpha)\,d\alpha.$$

D'un autre côté, on a pour la valeur de l'angle ε,

$$\varepsilon = \frac{\sqrt{(\varphi''\alpha)^2 + (\psi''\alpha)^2 + (\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)^2}}{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}\,d\alpha,$$

d'où l'on tirera la valeur du radical qui est au numérateur pour la porter dans l'équation (3). On trouvera

$$d\alpha = \frac{\left(\psi'\alpha - \varphi'\alpha\frac{dy}{dx}\right)[1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2].\cot\theta.\varepsilon}{(\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)\left(\varphi'\alpha + \psi'\alpha\frac{dy}{dx}\right) + \psi''\alpha - \varphi''\alpha\frac{dy}{dx}},$$

d'où l'on tirera la valeur suivante de $\frac{dy}{dx}$, en remplaçant $\cot\theta.\varepsilon$ par $\cot\theta\,d\theta = d.l\sin\theta = d.l\sin(\mathrm{E}+\mathrm{C})$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'\alpha[1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2]\cdot\frac{d.l\sin(\mathrm{E}+\mathrm{C})}{d\alpha} - \varphi'\alpha(\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha) - \psi''\alpha}{\varphi'\alpha[1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2]\cdot\frac{d.l\sin(\mathrm{E}+\mathrm{C})}{d\alpha} + \psi'\alpha(\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha) - \varphi''\alpha}.$$

On portera enfin cette expression de $\frac{dy}{dx}$ dans l'équation (5), qui donnera après quelques réductions,

$$dx = \left[\frac{\varphi''\alpha - \psi'\alpha(\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)}{\varphi'\alpha[1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2]} - \frac{d.l\sin(E + C)}{d\alpha}\right] \times (x - \varphi\alpha)\,d\alpha.$$

Mais l'on a

$$\frac{\varphi''\alpha - \psi'\alpha(\varphi'\alpha\psi''\alpha - \psi'\alpha\varphi''\alpha)}{\varphi'\alpha[1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2]}\,d\alpha = d.l\frac{\varphi'\alpha}{\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}};$$

par suite, l'équation précédente devient

$$dx = d.l\frac{\varphi'\alpha}{\sin(E + C).\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}} \times (x - \varphi\alpha).$$

C'est une équation différentielle du premier ordre, linéaire par rapport à x et dx, qui a pour intégrale

$$x = -\frac{\varphi'\alpha}{\sin(E + C)\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}}$$
$$\times\left[C' + \int\frac{\varphi\alpha\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}\sin(E + C)}{\varphi'\alpha}\,d.l\frac{\varphi'\alpha}{\sin(E + C)\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}}\right],$$

C' étant une nouvelle constante qu'on déterminerait par la valeur de x répondant à une valeur particulière de α. Cette équation se simplifie en remarquant que l'on a

$$\int\frac{\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}\sin(E + C)}{\varphi'\alpha}\,d.l\frac{\varphi'\alpha}{\sin(E + C)\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}}$$
$$= -\frac{\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}\sin(E + C)}{\varphi'\alpha};$$

par suite, en intégrant par parties,

$$\int\frac{\varphi\alpha\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}\sin(E + C)}{\varphi'\alpha}\,d.l\frac{\varphi'\alpha}{\sin(E + C)\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}}$$
$$= -\frac{\varphi\alpha\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}\sin(E + C)}{\varphi'\alpha} + \int\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}\sin(E + C).d\alpha;$$

et enfin, en substituant,

$$(6)\quad x - \varphi\alpha = -\frac{\varphi'\alpha}{\sin(E + C)\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}}\left[C' + \int\sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}\sin(E + C).d\alpha\right].$$

L'élimination de α entre les équations (1) et (6) donnerait une relation en x, y, qui serait l'équation de la projection sur le plan des x, y d'une ligne géodésique quelconque. On prendrait pour la seconde équation de cette ligne, celle de la surface développable qui les contient toutes, et on l'obtiendrait, en éliminant α entre les équations de la tangente de la courbe donnée.

4. Revenons au cas général où l'angle i est quelconque, et désignant, pour abréger, par $T = 0$ l'équation (3), différentions-la en faisant varier toutes les quantités qui y entrent, α, $\frac{dy}{dx}$ ou y' et θ, ce qui donne

$$\frac{dT}{d\alpha}d\alpha + \frac{dT}{d\theta}d\theta + \frac{dT}{dy'}dy' = 0.$$

On y mettra pour $d\theta$ sa valeur donnée par l'équation (4), et pour $d\alpha$ la valeur suivante, tirée de l'équation (1) différentiée,

$$d\alpha = \frac{y'\varphi'\alpha - \psi'\alpha}{(x - \varphi\alpha)\psi''\alpha - (y - \psi\alpha)\varphi''\alpha}dx.$$

L'équation $dT = 0$ deviendra une relation entre α, θ, x, y, y', dx, dy', et, en éliminant enfin α, θ entre cette équation et les équations (1) et (3), on aura une équation entre x, y, y', dx, dy' qui sera l'équation différentielle du second ordre de la projection d'une trajectoire quelconque sur le plan des x, y. L'intégration de cette équation introduirait deux constantes arbitraires qu'on déterminerait par les données initiales, et, en y joignant l'équation de la surface développable qui contient toutes les trajectoires, on aurait les équations d'une trajectoire quelconque.

5. On peut appliquer à la question que nous venons de résoudre une méthode plus simple qui permet de ne pas faire usage de l'équation (3). Elle repose sur l'expression de la partie de la tangente de la courbe donnée comprise entre cette courbe et la trajectoire; nous désignerons par ρ cette longueur, qui est égale à MN au point M de la courbe TU; au point suivant M', cette longueur est

$$M'N' = \rho + d\rho.$$

Soit décrit, du point M' comme centre avec le rayon M'N', l'arc infiniment petit N'H; MH étant le prolongement de $MM' = ds'$, on a

$$M'N' = M'MH,$$

ou bien

$$\rho + d\rho = MH + ds.$$

D'un autre côté, l'angle NM'N' étant égal à ε, on aura

$$N'H = (\rho + d\rho).\varepsilon;$$

par suite, au moyen du triangle NN'H,

$$NH = N'H \times \cot\theta = (\rho + d\rho)\,\varepsilon\cot\theta.$$

Donc

$$MN \quad \text{ou} \quad \rho = MH + (\rho + d\rho)\,\varepsilon\cot\theta,$$

relation qui, retranchée de la première, donne enfin

$$(7) \qquad d\rho + \rho\varepsilon\cot\theta = ds,$$

en négligeant $\cot\theta.\varepsilon d\rho$, quantité infiniment petite du second ordre. Si θ était connu en fonction de α, cette équation, qui est linéaire et du premier ordre par rapport à ρ, serait intégrable et déterminerait ρ en fonction de α et d'une constante arbitraire; par suite, on obtiendrait les équations d'une trajectoire quelconque en éliminant α entre les équations de la tangente de la courbe donnée et l'équation suivante :

$$(8) \qquad \rho^2 = (x - \varphi\alpha)^2 + (y - \psi\alpha)^2 + (z - \alpha)^2.$$

Lorsque l'angle i est droit, on a

$$\theta = E + C;$$

et si l'on remplace $\varepsilon\cot\theta$ par $d.l\sin(E+C)$, on trouvera, pour l'intégrale de l'équation (7),

$$(9) \qquad \rho = \frac{1}{\sin(E+C)}\left[C'' + \int \sin(E+C).ds\right],$$

C'' étant la nouvelle constante arbitraire. Portant enfin cette expression dans l'équation (8), on obtiendra les équations d'une ligne géodésique quelconque de la surface donnée en éliminant α entre les équations

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} x - \varphi\alpha = \varphi'\alpha.(z-\alpha), \quad y - \psi\alpha = \psi'\alpha.(z-\alpha), \\ \frac{1}{\sin^2(E+C)}[C'' + \int \sin(E+C).ds]^2 = (x-\varphi\alpha)^2 + (y-\psi\alpha)^2 + (z-\alpha)^2 \end{array}\right.$$

On remarquera que l'on a

$$\rho^2 = \frac{(x-\varphi\alpha)^2}{(\varphi'\alpha)^2}[1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2],$$

et

$$ds = \sqrt{1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2}.d\alpha,$$

valeurs qui, substituées dans la dernière des équations (10), font retrouver l'équation (6) obtenue par la première méthode.

6. Il existe entre les angles de contingence et de torsion de la courbe donnée et ceux de chacune des trajectoires, des relations remarquables et fort simples qui se déduisent du triangle sphérique que nous avons déjà considéré. Ce triangle donne

$$\cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b,$$

ou bien

$$-\cos(i + \omega_1) = -\cos\omega \cos i + \sin\omega \sin i \cos(\theta + \varepsilon).$$

Développant $\cos(i+\omega_1)$, $\cos(\theta+\varepsilon)$, et négligeant dans les deux membres les infiniment petits du second ordre par rapport à ceux du premier, on trouve

$$(11)\qquad \omega_1 = \omega \cos\theta.$$

D'un autre côté, l'on a

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin c}{\sin C}, \quad \text{ou bien} \quad \frac{\sin \varepsilon_1}{\sin\omega} = \frac{\sin(\theta + d\theta)}{\sin i};$$

d'où l'on tire, en procédant de même,

$$(12)\qquad \varepsilon_1 \sin i = \omega \sin\theta.$$

Les relations (11) et (12) font connaître les angles de contingence et de torsion de chaque trajectoire, au moyen de l'angle de torsion de la courbe donnée et de l'angle θ qui lui-même est déterminé par l'équation (4) au moyen de ε et ω. Si l'on fait la somme des carrés de ces relations, on trouve

$$(13) \qquad \omega^2 = \omega_1^2 + \varepsilon_1^2 \sin^2 i,$$

et si on les divise l'une par l'autre, on obtient

$$(14) \qquad \tang \theta = \frac{\varepsilon_1}{\omega_1} \sin i.$$

Dans le cas où les trajectoires sont des lignes géodésiques tracées sur la surface développable donnée, les relations (13) et (14) deviennent

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \varepsilon_1^2, \quad \tang \theta = \frac{\varepsilon_1}{\omega_1}.$$

Supposons maintenant que l'on connaisse une trajectoire quelconque, et que l'on veuille exprimer ε et ω en fonction de ε_1 et ω_1. L'équation (13) détermine d'abord ω; pour déterminer ε, nous ferons usage de l'équation (4), qui donne

$$\varepsilon = \cot i . \omega \sin \theta + d\theta,$$

ou bien, en vertu de l'équation (12),

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \cos i + d\theta.$$

D'ailleurs l'angle θ est déterminé par l'équation (14), qui donne, par la différentiation,

$$\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \frac{\omega_1 d\varepsilon_1 - \varepsilon_1 d\omega_1}{\omega_1^2} \sin i,$$

ou bien, en remplaçant $\frac{1}{\cos^2\theta}$ par $1 + \tang^2 \theta = \frac{\omega_1^2 + \varepsilon_1^2 \sin^2 i}{\omega_1^2}$,

$$d\theta = \frac{\omega_1 d\varepsilon_1 - \varepsilon_1 d\omega_1}{\omega_1^2 + \varepsilon_1^2 \sin^2 i} \sin i.$$

Substituant enfin cette valeur, on trouve pour celle de ε,

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \cos i + \frac{\omega_1 d\varepsilon_1 - \varepsilon_1 d\omega_1}{\omega_1^2 + \varepsilon_1^2 \sin^2 i} \sin i.$$

7. Nous appliquerons ce qui précède à la détermination des lignes géodésiques de l'héliçoïde développable dont l'arête de rebroussement est une hélice tracée sur un cylindre circulaire droit. Nous emploierons, comme plus commode pour la discussion de ces courbes, la méthode exposée au n° 5. Si l'on prend le centre de la base pour origine d'un système d'axes coordonnés rectangulaires dont l'axe des z serait l'axe du cylindre; si, de plus, on fait passer l'axe des x par la trace de l'hélice sur le plan de la base, et qu'on appelle R le rayon du cylindre, a la cotangente de l'angle constant que font les tangentes de l'hélice avec les génératrices du cylindre, on trouvera, pour les équations de cette courbe,

$$x = \mathrm{R}\cos\frac{z}{\mathrm{R}a}, \quad y = \mathrm{R}\sin\frac{z}{\mathrm{R}a}:$$

par suite, les fonctions désignées plus haut par $\varphi\alpha$, $\psi\alpha$ sont ici

$$\varphi\alpha = \mathrm{R}\cos\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}, \quad \psi\alpha = \mathrm{R}\sin\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}.$$

Pour appliquer la méthode du n° 5, nous avons besoin de la valeur de ρ dont l'expression est donnée par l'équation (9) : or on trouve aisément

$$\varepsilon = \frac{d\alpha}{\mathrm{R}a\sqrt{1+a^2}};$$

par suite,

$$\int\varepsilon \quad \text{ou} \quad \mathrm{E} = \frac{\alpha + \mathrm{C}}{\mathrm{R}a\sqrt{1+a^2}},$$

et, comme l'on a

$$\theta = \int\varepsilon,$$

on aura aussi

$$\theta = \frac{\alpha + \mathrm{C}}{\mathrm{R}a\sqrt{1+a^2}}.$$

La valeur de la constante C peut se déduire de la valeur θ_0 que prend θ pour $\alpha = 0$,

$$\mathrm{C} = \mathrm{R}a\sqrt{1+a^2}.\theta_0;$$

par suite,

$$\alpha = \mathrm{R}a\sqrt{1+a^2}.(\theta - \theta_0).$$

On trouve aussi

$$ds = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}\,d\alpha = \mathrm{R}(1+a^2)\,d\theta.$$

Portant ces valeurs de E et ds dans l'équation (9), on effectuera immédiatement l'intégration qui y est indiquée, et l'on aura

$$\rho = \frac{1}{\sin\theta}[C'' - R(1+a^2)\cos\theta].$$

Soit ρ_0 la valeur de ρ répondant à $\alpha = 0$, la valeur de la constante est

$$C'' = \rho_0 \sin\theta_0 + R(1+a^2)\cos\theta_0,$$

par suite

$$(15) \qquad \rho = \rho_0 \frac{\sin\theta_0}{\sin\theta} + \frac{R(1+a^2)}{\sin\theta}(\cos\theta_0 - \cos\theta).$$

Avant de nous servir de cette valeur de ρ pour former les équations des lignes géodésiques, il est bon de voir ce qu'elle fait connaître sur la nature de ces courbes.

Si l'on fait croître α à partir de zéro, θ croîtra aussi à partir de $\theta = \theta_0$ et deviendra égal à π pour la valeur

$$\alpha = Ra\sqrt{1+a^2}(\pi - \theta_0).$$

Or, pour $\theta = \pi$, la quantité ρ devient infinie, et il en résulte que la tangente de l'hélice, au point qui répond à cette valeur de α, est une asymptote de la ligne géodésique. Si, au contraire, on fait décroître α à partir de zéro, θ décroîtra aussi; or, si l'on égale à zéro le numérateur de la valeur de ρ, on trouvera

$$\cos\theta = \cos\theta_0 + \frac{\rho_0 \sin\theta_0}{R(1+a^2)},$$

valeur qui n'est admissible qu'autant que l'on a

$$\rho_0 \sin\theta_0 + R(1+a^2)\cos\theta_0 < R(1+a^2).$$

Supposons cette condition satisfaite: pour cette valeur de θ que j'appelle θ_1 et qui est moindre que θ_0, on aura

$$\alpha = -Ra\sqrt{1+a^2}(\theta_0 - \theta_1);$$

et la quantité ρ est nulle. Donc la ligne géodésique coupe l'hélice au point qui répond à cette valeur de α. Si l'on fait encore décroître α, ρ sera négatif et deviendra égal à $-\infty$ pour $\theta = 0$, qui répond à

$$\alpha = -Ra\sqrt{1+a^2}\,.\,\theta_0;$$

ce qui montre qu'une partie de la ligne géodésique est située sur la seconde nappe de l'héliçoïde et a pour asymptote la tangente de l'hélice au point déterminé par cette dernière valeur de α. On remarquera que la différence des valeurs de α répondant aux deux asymptotes est égale à $\pi R a \sqrt{1+a^2}$. Pour les valeurs de θ comprises entre π et 2π, ρ reprend, mais en sens inverse et avec un signe différent, les mêmes valeurs que de $\theta = 0$ à $\theta = \pi$. En continuant ainsi et concevant que l'on donne à α toutes les valeurs possibles, on voit que la ligne géodésique se compose d'un nombre infini de branches, dont chacune est formée de deux parties situées respectivement sur les deux nappes de l'héliçoïde. Deux branches consécutives ont une asymptote commune, et les diverses branches coupent l'hélice en parties alternativement égales, de telle manière que la différence des distances de deux points de division consécutifs au plan de la base du cylindre est égale tantôt à $2Ra\sqrt{1+a^2}(\pi - \theta_1)$, tantôt à $2Ra\sqrt{1+a^2}.\theta_1$. Si la ligne géodésique coupait l'hélice à angle droit, on aurait

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2},$$

et il est clair que toutes les parties de l'hélice deviendraient égales. C'est ce qui a lieu pour les développées de l'hélice, qui sont des lignes géodésiques tracées sur un héliçoïde développable dont l'arête de rebroussement est une autre hélice, de même axe et de même pas que la première, mais située sur un cylindre d'un rayon égal à Ra^2. Les équations de la nouvelle hélice se déduiraient de celles de la première en y changeant a en $\frac{1}{a}$. Remplaçant R par Ra^2, a par $\frac{1}{a}$, et θ_1 par $\frac{\pi}{2}$ dans l'expression $2Ra\sqrt{1+a^2}\,\theta_1$, on obtient $\pi R\sqrt{1+a^2}$, pour la différence des distances, au plan de la base du cylindre, de deux points de rencontre consécutifs de la nouvelle hélice et d'une développée quelconque de l'hélice donnée. On en conclut ce résultat connu, que la longueur de chacune des divisions de la nouvelle hélice est égale à $\pi R(1+a^2)$.

Supposons, en second lieu,

$$\rho_0 \sin\theta_0 + R(1+a^2)\cos\theta_0 > R(1+a^2):$$

dans ce cas, ρ ne pouvant devenir nul, la ligne géodésique ne rencontre pas l'hélice. Mais si l'on égale à zéro la quantité

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{\mathrm{R}(1+a^2) - [\rho_0 \sin\theta_0 + \mathrm{R}(1+a^2)\cos\theta_0]\cos\theta}{\sin^2\theta},$$

on en déduit

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{R}(1+a^2)}{\rho_0\sin\theta_0 + \mathrm{R}(1+a^2)\cos\theta_0},$$

valeur admissible puisqu'elle est moindre que l'unité, d'apres l'hypothèse actuelle. En outre, pour cette valeur de θ, que j'appelle θ_1, on a

$$\frac{d^2\rho}{d\theta^2} > 0,$$

ce qui prouve que la valeur de ρ correspondante est un minimum ; et ce minimum sera donné par la formule

$$\rho = \sqrt{[\rho_0 \sin\theta_0 + \mathrm{R}(1+a^2)\cos\theta_0]^2 - \mathrm{R}^2(1+a^2)^2}.$$

Pour des valeurs de θ moindres que θ_1, la quantité ρ restera positive et ira en croissant jusqu'à ∞, ce qui indique l'existence d'une seconde asymptote qui répond à $\theta = 0$. Par où l'on voit qu'aux valeurs de θ, comprises entre 0 et π, répond une branche de la ligne géodésique, située tout entière sur une seule nappe de l'héliçoïde. On voit, en outre, que la courbe se compose d'un nombre infini de branches, situées alternativement sur les deux nappes, et dont deux consécutives ont une asymptote commune.

Déterminons maintenant les équations d'une ligne géodésique quelconque. Nous nous servirons des équations (10) dont les deux premières donnent

$$(16) \quad x - \mathrm{R}\cos\frac{\alpha}{\mathrm{R}a} = -\frac{1}{a}\sin\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}\cdot(z-\alpha), \quad y - \mathrm{R}\sin\frac{\alpha}{\mathrm{R}a} = \frac{1}{a}\cos\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}\cdot(z-\alpha),$$

d'où l'on tire, en éliminant $z - \alpha$,

$$(17) \qquad x\cos\frac{\alpha}{\mathrm{R}a} + y\sin\frac{\alpha}{\mathrm{R}a} = \mathrm{R}.$$

Quant à la dernière des équations (10), son second membre devient

$$\frac{(x-\varphi\alpha)^2}{(\varphi'\alpha)^2}[1 + (\varphi'\alpha)^2 + (\psi'\alpha)^2] = \left(\frac{x - \mathrm{R}\cos\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}}{\sin\frac{\alpha}{\mathrm{R}a}}\right)^2\cdot(1+a^2).$$

Or, si l'on tire de l'équation (17) les valeurs de $\cos\frac{\alpha}{Ra}$, $\sin\frac{\alpha}{Ra}$ en fonction de x, y, on trouvera

$$\frac{x - R\cos\frac{\alpha}{Ra}}{\sin\frac{\alpha}{Ra}} = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - R^2}.$$

Par suite, le second membre de la troisième équation (10) deviendra $(x^2 + y^2 - R^2)(1 + a^2)$, et cette équation elle-même deviendra

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} &\pm\sqrt{1+a^2}\sqrt{x^2+y^2-R^2} \\ &= \frac{\rho_0 \sin\theta_0 + R(1+a^2)\left[\cos\theta_0 - \cos\left(\theta_0 + \frac{\alpha}{Ra\sqrt{1+a^2}}\right)\right]}{\sin\left(\theta_0 + \frac{\alpha}{Ra\sqrt{1+a^2}}\right)}. \end{aligned}\right.$$

Enfin, l'élimination de α entre les équations (16) donnera l'équation de l'héliçoïde, sur lequel se trouvent toutes les lignes géodésiques; et l'élimination de α entre (17) et (18) donnera l'équation de la projection sur le plan des x, y, d'une quelconque de ces lignes.