JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur un théorème de M. Gauss concernant le produit des deux rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 12 (1847), p. 291-304.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1847_1_12__291_0>

Sur un théorème de M. Gauss concernant le produit des deux rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface;

Par J. LIOUVILLE.

1. Dans le beau Mémoire intitulé : *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, M. Gauss a fait voir que l'expression du produit RR′ des deux rayons de courbure principaux en un point quelconque M d'une surface (produit dont la valeur inverse donne ce qu'il nomme la mesure de courbure en ce point) dépend uniquement de l'expression générale de l'élément linéaire ds qui joint deux points infiniment voisins quelconques de cette surface. Supposons, en effet, les trois coordonnées rectangles x, y, z de chaque point de la surface exprimées au moyen de deux variables indépendantes u, v; et soit

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}dudv + \mathrm{G}dv^2,$$

E, F, G désignant des fonctions de u, v. M. Gauss détermine le produit RR′ au moyen des trois quantités E, F, G et de leurs dérivées du premier et du second ordre par rapport à u, v. Pour calculer RR′, on n'a donc besoin que des coefficients E, F, G, et non des expressions de x, y, z en u, v; de sorte que, si E, F, G ont les mêmes valeurs en u, v pour deux surfaces différentes, le produit RR′ sera aussi le même pour ces deux surfaces.

Une surface étant donnée, traçons-y deux systèmes de lignes dont l'intersection puisse nous servir à fixer la position des divers points M sur la surface, et prenons pour variables u, v des quantités dépendantes de ces lignes, dont les valeurs restent les mêmes pour les différentes surfaces que l'on peut déduire de la proposée, en la déformant, par une simple flexion, à la manière des surfaces développables qui se déduisent ainsi du plan. Si l'on considère une ligne quelconque sur la surface donnée, et la ligne correspondante sur une autre surface qui en dérive, comme nous venons de l'indiquer, il est clair non-seulement que les éléments des deux lignes seront égaux chacun à chacun, mais encore qu'ils auront tous deux la même valeur en u, v. fournie par la formule unique

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2.$$

Il y a, du reste, on le conçoit, une infinité de systèmes de variables u, v pour lesquels l'expression de ds^2 reste ainsi constante d'une de nos surfaces à l'autre. Par exemple, u et v pourront être les plus courtes distances, mesurées sur la surface donnée par des lignes géodésiques, du point M à deux points fixes A, B; ces distances géodésiques ne changeront pas dans les transformations éprouvées par la surface, et le point M résultera toujours de l'intersection de deux courbes tracées par les extrémités mobiles de deux fils de longueurs constantes ayant A et B respectivement pour extrémités fixes et tendus sur la surface. On pourrait aussi ne considérer qu'un seul point fixe et prendre pour les variables u et v la longueur de l'arc géodésique AM et l'angle qu'il fait avec un autre arc géodésique fixe AB. L'expression de ds sera, suivant les cas, plus ou moins simple. Il est aisé de voir que l'on aura $F = 0$ si u et v sont les paramètres de deux systèmes de lignes orthogonales entre elles, de sorte que la valeur de ds^2 se réduit alors à

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2.$$

Nous verrons même qu'on peut arriver à avoir, pour une surface quelconque, $E = G$, ou $E = 1$. Mais, quel que soit le système de coordonnées ainsi adopté, l'identité d'expression des éléments linéaires correspondants ds suffit à M. Gauss pour en conclure que le produit RR' sera aussi constant aux divers points correspondants de toutes nos surfaces.

2. J'ai dit qu'en choisissant convenablement les variables u, v, on peut supposer le coefficient F réduit à zéro et les deux autres coefficients égaux entre eux. En écrivant α, β au lieu de u, v, et désignant par λ la valeur commune des deux coefficients, on a ainsi la formule

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

qui est beaucoup plus simple, et dont l'emploi permet d'arriver assez facilement au beau théorème concernant le produit RR′, que M. Gauss a déduit de calculs très-pénibles. Pour effectuer la réduction dont nous parlons, il faudrait, il est vrai, savoir intégrer une certaine équation différentielle du premier ordre, ou, si l'on veut, trouver le facteur à l'aide duquel on rend son premier membre une différentielle exacte. Mais, pour le but que nous nous proposons ici, on a besoin seulement d'être assuré que la valeur de ds^2 est susceptible de la forme indiquée; il n'est pas nécessaire d'avoir effectué le calcul qui doit l'y ramener.

Rappelons d'abord en peu de mots comment on prouve qu'il est toujours permis de supposer

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

Le second membre de l'équation

$$ds^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}dudv + \mathrm{G}dv^2,$$

qui est du second degré par rapport aux différentielles du, dv, et qui, par sa nature même, doit rester > 0 tant que l'on n'a pas à la fois $du = 0$ et $dv = 0$, est le produit des deux expressions esssentiellement imaginaires

$$du\sqrt{\mathrm{E}} + \frac{dv}{\sqrt{\mathrm{E}}}\left(\mathrm{F} + \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}\sqrt{-1}\right)$$

et

$$du\sqrt{\mathrm{E}} + \frac{dv}{\sqrt{\mathrm{E}}}\left(\mathrm{F} - \sqrt{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}\sqrt{-1}\right).$$

Soit $\mu + \nu\sqrt{-1}$ le facteur à l'aide duquel la première de ces expressions devient une différentielle exacte (on aurait aisément ce facteur si l'on savait intégrer l'équation différentielle qu'on obtient en égalant l'expression citée à zéro), et désignons par $d(\alpha + \beta\sqrt{-1})$ la différentielle résultant de la multiplication par ce facteur; la seconde expression, multipliée par $\mu - \nu\sqrt{-1}$, donnera de même la différentielle $d(\alpha - \beta\sqrt{-1})$. On aura donc, en multipliant les deux différentielles,

$$(\mu^2 + \nu^2)ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2,$$

d'où

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2),$$

en faisant, pour abréger,

$$\lambda = \frac{1}{\mu^2 + \nu^2}.$$

Les deux variables α, β constituent un genre remarquable de coordonnées sur la surface. Le rectangle $d\alpha d\beta$ manquant dans l'expression $ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2)$, les équations

$$\alpha = \text{constante}, \quad \beta = \text{constante}$$

représentent deux familles de courbes qui se coupent à angle droit [*], et chaque point M de la surface est déterminé par la rencontre de deux de ces courbes. On sait aussi que les éléments ds'', ds' de ces deux

---

[*] Il suffit que le rectangle $d\alpha d\beta$ manque dans l'expression $ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2)$, pour que les courbes déterminées sur la surface par les paramètres α, β se coupent à angle droit. Mais l'égalité des coefficients de $d\alpha^2$ et $d\beta^2$ donne à ces deux systèmes de courbes orthogonales conjuguées un caractère tout particulier. En supposant les différentielles $d\alpha$, $d\beta$ constantes, on prouve aisément qu'ils divisent la surface en rectangles semblables, et même en carrés si $d\alpha = d\beta$. Cette propriété les distingue de tous les autres. Je confonds avec eux, bien entendu, ceux qu'on en déduirait en remplaçant α par une fonction de α, et β par une fonction de β, car les lignes (α), (β) resteraient les mêmes.

Au reste, comme il y a une infinité de facteurs qui rendent le premier membre d'une équation une différentielle exacte, il y a aussi une infinité de systèmes de variables α, β qui donnent $ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2)$. En effet, au lieu du facteur $\mu + \nu\sqrt{-1}$ qui produit la différentielle $d(\alpha + \beta\sqrt{-1})$, on peut employer le facteur $\varpi(\alpha + \beta\sqrt{-1})(\mu + \nu\sqrt{-1})$, qui produira la différentielle

$$\varpi(\alpha + \beta\sqrt{-1})\, d(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = d\Pi(\alpha + \beta\sqrt{-1}).$$

En d'autres termes, si l'on pose

$$\alpha' + \beta'\sqrt{-1} = \Pi(\alpha + \beta\sqrt{-1}),$$

en prenant pour α' la partie réelle, et pour β' le coefficient de $\sqrt{-1}$ dans le second membre, on aura encore $ds^2 = \lambda'(d\alpha'^2 + d\beta'^2)$, ce qu'on peut aisément vérifier. La formule

$$\alpha' + \beta'\sqrt{-1} = \Pi(\alpha \pm \beta\sqrt{-1})$$

fournit, au surplus, la solution la plus générale du problème proposé. On peut le démontrer comme il suit. Pour que les deux systèmes (α, β), (α', β') donnent

$$ds^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2) = \lambda'(d\alpha'^2 + d\beta'^2),$$

courbes (α), (β) sont exprimés par

$$ds'' = \sqrt{\lambda}\,.\,d\beta,\quad ds' = \sqrt{\lambda}\,.\,d\alpha.$$

3. Maintenant je vais démontrer le théorème de M. Gauss, en prouvant qu'on a

$$\frac{1}{RR'} = -\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{d^2\log\lambda}{d\alpha^2} + \frac{d^2\log\lambda}{d\beta^2}\right),$$

---

il faut et il suffit qu'on ait à la fois

$$\left(\frac{d\alpha'}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d\beta'}{d\alpha}\right)^2 = \left(\frac{d\alpha'}{d\beta}\right)^2 + \left(\frac{d\beta'}{d\beta}\right)^2$$

et

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha}\frac{d\alpha'}{d\beta} + \frac{d\beta'}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\beta} = 0.$$

La seconde équation exige que l'on ait

$$\frac{d\beta'}{d\alpha} : \frac{d\alpha'}{d\alpha} = -\frac{d\alpha'}{d\beta} : \frac{d\beta'}{d\beta} = w,$$

d'où

$$\frac{d\beta'}{d\alpha} = w\frac{d\alpha'}{d\alpha},\quad \frac{d\beta'}{d\beta} = -\frac{1}{w}\frac{d\alpha'}{d\beta},$$

et la première équation donne ensuite

$$\left(\frac{d\alpha'}{d\beta}\right)^2 = w^2\left(\frac{d\alpha'}{d\alpha}\right)^2,$$

d'où

$$\frac{d\alpha'}{d\beta} = \mp w\frac{d\alpha'}{d\alpha} = \mp\frac{d\beta'}{d\alpha},$$

ce qui, à cause de l'équation

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha}\frac{d\alpha'}{d\beta} + \frac{d\beta'}{d\alpha}\frac{d\beta'}{d\beta} = 0,$$

fournit encore

$$\frac{d\beta'}{d\beta} = \pm\frac{d\alpha'}{d\alpha}.$$

Il est aisé d'en conclure

$$\frac{d(\alpha' + \beta'\sqrt{-1})}{d\beta} = \pm\sqrt{-1}\,\frac{d(\alpha' + \beta'\sqrt{-1})}{d\alpha},$$

et, par conséquent,

$$\alpha' + \beta'\sqrt{-1} = \Pi(\alpha \pm \beta\sqrt{-1}),$$

ce qu'il fallait démontrer.

les signes des rayons R, R′ étant pris comme dans la formule ordinaire

$$\frac{1}{RR'} = \frac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2},$$

où p, q, r, s, t sont les dérivées du premier et du second ordre de l'ordonnée z exprimée en x et y, savoir :

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}, \quad r = \frac{d^2z}{dx^2}, \quad s = \frac{d^2z}{dxdy}, \quad t = \frac{d^2z}{dy^2}.$$

Donnons aux axes des x, y, z une position particulière. Mettons l'origine des coordonnées au point M de la surface, et faisons coïncider l'axe des z avec la normale en M, et les axes des x et des y avec les tangentes aux deux lignes (β), (α) qui passent par ce point M. En augmentant ou en diminuant chaque quantité α, β d'une constante, on pourra faire en sorte que α et β soient nulles au point M : c'est ce que nous admettrons désormais. D'après la position particulière de nos axes, quand on fera $\alpha = 0$, $\beta = 0$, on pourra confondre dx avec ds', dy avec ds''.

Les valeurs générales de dx et dy étant représentées par

$$dx = kd\alpha + ld\beta, \quad dy = md\alpha + nd\beta,$$

développons les coefficients k, l, m, n suivant les puissances ascendantes des quantités α, β, qui sont très-petites dans les environs du point M, en concevant toutefois les séries complétées par des restes, et bornées ainsi à un nombre limité de termes, pour n'avoir pas à nous occuper de leur convergence. Posons, par exemple,

$$k = k_0 + k_1 + k_2 + \ldots,$$

k_0 étant une constante, k_1 un polynôme homogène en α, β, du premier degré, k_2 un polynôme homogène du second degré, etc. En adoptant une notation semblable pour tous les coefficients, on aura

$$\begin{aligned} dx &= (k_0 + k_1 + k_2 + \ldots)\, d\alpha + (l_0 + l_1 + l_2 + \ldots)\, d\beta, \\ dy &= (m_0 + m_1 + m_2 + \ldots)\, d\alpha + (n_0 + n_1 + n_2 + \ldots)\, d\beta. \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 0$, $\beta = 0$, ces valeurs deviennent

$$dx = k_0 d\alpha + l_0 d\beta, \quad dy = m_0 d\alpha + n_0 d\beta.$$

Mais alors on doit avoir $dx = ds'$, $dy = ds''$. Or ds' ne contient pas $d\beta$, et ds'' ne contient pas $d\alpha$; donc $l_0 = 0$, $m_0 = 0$, ce qui réduit les valeurs générales de dx et dy à

$$dx = (k_0 + k_1 + k_2 + \ldots)\,d\alpha + (l_1 + l_2 + \ldots)\,d\beta,$$
$$dy = (m_1 + m_2 + \ldots)\,d\alpha + (n_0 + n_1 + n_2 + \ldots)\,d\beta.$$

De plus, les conditions d'intégrabilité des seconds membres donnent, par la comparaison des parties homogènes,

$$\frac{dk_1}{d\beta} = \frac{dl_1}{d\alpha},\quad \frac{dk_2}{d\beta} = \frac{dl_2}{d\alpha},\ldots,$$
$$\frac{dm_1}{d\beta} = \frac{dn_1}{d\alpha},\quad \frac{dm_2}{d\beta} = \frac{dn_2}{d\alpha},\ldots.$$

Enfin, puisqu'on doit avoir $z = 0$ et $dz = 0$ au point M, on pourra écrire

$$z = \frac{a\alpha^2}{2} + b\alpha\beta + \frac{c\beta^2}{2} + \ldots,$$

les termes qui viennent après les trois premiers étant d'un ordre supérieur au second. De là

$$dz = (a\alpha + b\beta + \ldots)\,d\alpha + (b\alpha + c\beta + \ldots)\,d\beta,$$

les termes à ajouter entre les parenthèses étant au moins du second ordre.

D'après les valeurs précédentes de dx et dy, on a $x = k_0\alpha$, $y = n_0\beta$ aux termes près du second ordre en α, β, et, par conséquent, $x^2 = k_0^2\alpha^2$, $xy = k_0 n_0 \alpha\beta$, $y^2 = n_0^2\beta^2$, aux termes près du troisième ordre. Il s'ensuit qu'en négligeant les puissances de x et y supérieures à la seconde, on a

$$z = \frac{ax^2}{2k_0^2} + \frac{bxy}{k_0 n_0} + \frac{cy^2}{2n_0^2};$$

de sorte qu'au point M, l'expression de RR' est fournie par

$$\frac{1}{RR'} = \frac{ac - b^2}{k_0^2 n_0^2},$$

Maintenant j'observe que la valeur de ds^2 doit être de la forme

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \lambda(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

Donc

$$\begin{aligned}\lambda &= (k_0 + k_1 + k_2 + \ldots)^2 + (m_1 + m_2 + \ldots)^2 + (a\alpha + b\beta + \ldots)^2 \\ &= (l_1 + l_2 + \ldots)^2 + (n_0 + n_1 + n_2 + \ldots)^2 + (b\alpha + c\beta + \ldots)^2,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}o = (k_0 + k_1 + k_2 + \ldots)(l_1 + l_2 + \ldots) + (m_1 + m_2 + \ldots)(n_0 + n_1 + n_2 + \ldots) \\ + (a\alpha + b\beta + \ldots)(b\alpha + c\beta + \ldots).\end{aligned}$$

En développant cette dernière équation pour égaler séparément à zéro les termes homogènes, on a

$$\begin{aligned}&k_0 l_1 + n_0 m_1 = o, \\ &k_0 l_2 + k_1 l_1 + n_0 m_2 + m_1 n_1 + (a\alpha + b\beta)(b\alpha + c\beta) = o, \quad \text{etc.}\end{aligned}$$

La comparaison des deux valeurs de λ entre elles donne d'autres résultats. On trouve d'abord

$$k_0^2 = n_0^2, \quad \text{d'où} \quad n_0 = \pm k_0.$$

Il est d'ailleurs évident qu'on peut toujours prendre le signe supérieur, sauf à changer, s'il le faut, α en $-\alpha$; nous ferons donc

$$n_0 = k_0.$$

On trouve ensuite

$$2k_0 k_1 = 2n_0 n_1, \quad \text{d'où} \quad n_1 = k_1;$$

et

$$k_1^2 + 2k_0 k_2 + m_1^2 + (a\alpha + b\beta)^2 = l_1^2 + n_1^2 + 2n_0 n_2 + (b\alpha + c\beta)^2.$$

Mais cette dernière équation et les deux premières qu'on avait obtenues peuvent être simplifiées. A cause de $n_0 = k_0$, l'équation

$$k_0 l_1 + n_0 m_1 = o$$

devient, en effet,

$$m_1 = -l_1;$$

les deux autres se réduisent ensuite à

$$\begin{aligned}&k_0 l_2 + k_0 m_2 + (a\alpha + b\beta)(b\alpha + c\beta) = o, \\ &2k_0 k_2 + (a\alpha + b\beta)^2 = 2k_0 n_2 + (b\alpha + c\beta)^2.\end{aligned}$$

Nous avons besoin encore des valeurs de

$$\lambda, \quad \frac{d\lambda}{d\alpha}, \quad \frac{d\lambda}{d\beta}, \quad \frac{d^2\lambda}{d\alpha^2}, \quad \frac{d^2\lambda}{d\beta^2},$$

au point M, c'est-à-dire pour $\alpha = 0$, $\beta = 0$. En les déduisant de la formule

$$\lambda = (k_0 + k_1 + k_2 + \ldots)^2 + (l_1 + l_2 + \ldots)^2 + (a\alpha + b\beta + \ldots)^2,$$

on trouve aisément, pour les valeurs citées $\alpha = 0$, $\beta = 0$:

$$\lambda = k_0^2, \quad \frac{d\lambda}{d\alpha} = 2k_0\frac{dk_1}{d\alpha}, \quad \frac{d\lambda}{d\beta} = 2k_0\frac{dk_1}{d\beta},$$

$$\frac{d^2\lambda}{d\alpha^2} = 2\left(\frac{dk_1}{d\alpha}\right)^2 + 2k_0\frac{d^2k_2}{d\alpha^2} + 2\left(\frac{dm_1}{d\alpha}\right)^2 + 2a^2,$$

$$\frac{d^2\lambda}{d\beta^2} = 2\left(\frac{dk_1}{d\beta}\right)^2 + 2k_0\frac{d^2k_2}{d\beta^2} + 2\left(\frac{dm_1}{d\beta}\right)^2 + 2b^2.$$

On en conclut sans peine l'expression de la quantité

$$\frac{1}{2\lambda^3}\left[\lambda\frac{d^2\lambda}{d\alpha^2} + \lambda\frac{d^2\lambda}{d\beta^2} - \left(\frac{d\lambda}{d\alpha}\right)^2 - \left(\frac{d\lambda}{d\beta}\right)^2\right] = \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{d^2\log\lambda}{d\alpha^2} + \frac{d^2\log\lambda}{d\beta^2}\right),$$

qui figure dans la formule que nous voulons démontrer. En observant que, par ce qui précède,

$$\frac{dm_1}{d\alpha} = -\frac{dl_1}{d\alpha} = -\frac{dk_1}{d\beta}, \quad \frac{dm_1}{d\beta} = \frac{dn_1}{d\alpha} = \frac{dk_1}{d\alpha},$$

cette expression devient

$$\frac{1}{k_0^2}\left(k_0\frac{d^2k_2}{d\alpha^2} + k_0\frac{d^2k_2}{d\beta^2} + a^2 + b^2\right).$$

Mais l'équation

$$2k_0k_2 + (a\alpha + b\beta)^2 = 2k_0n_2 + (b\alpha + c\beta)^2,$$

différentiée deux fois de suite par rapport à α, donne

$$k_0\frac{d^2k_2}{d\alpha^2} = k_0\frac{d^2n_2}{d\alpha^2} + b^2 - a^2.$$

D'un autre côté, on a

$$\frac{dk_2}{d\beta} = \frac{dl_2}{d\alpha}, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2k_2}{d\beta^2} = \frac{d^2l_2}{d\alpha d\beta};$$

et l'équation

$$k_0 l_2 + k_0 m_2 + (a\alpha + b\beta)(b\alpha + c\beta) = 0,$$

différentiée par rapport à α, puis par rapport à β, donne

$$k_0 \frac{d^2 l_2}{d\alpha d\beta} = - k_0 \frac{d^2 m_2}{d\alpha d\beta} - ac - b^2 = - k_0 \frac{d^2 n_2}{d\alpha^2} - ac - b^2.$$

Donc

$$k_0 \frac{d^2 k_2}{d\beta^2} = - k_0 \frac{d^2 n_2}{d\alpha^2} - ac - b^2.$$

En substituant ces valeurs de

$$k_0 \frac{d^2 k_2}{d\alpha^2}, \quad k_0 \frac{d^2 k_2}{d\beta^2},$$

il vient enfin

$$\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{d^2 \log \lambda}{d\alpha^2} + \frac{d^2 \log \lambda}{d\beta^2}\right) = \frac{b^2 - ac}{k_0^4}.$$

Mais

$$\frac{1}{\mathrm{RR'}} = \frac{ac - b^2}{k_0^2 n_0^2} = - \frac{b^2 - ac}{k_0^4}.$$

Donc

$$\frac{1}{\mathrm{RR'}} = - \frac{1}{2\lambda}\left(\frac{d^2 \log \lambda}{d\alpha^2} + \frac{d^2 \log \lambda}{d\beta^2}\right),$$

comme nous l'avions annoncé. Les valeurs de λ et des dérivées de λ sont relatives au point M; mais on peut d'ailleurs se débarrasser de la condition que α et β soient nulles, en rétablissant ou supprimant les constantes dont on avait diminué ou augmenté d'abord ces variables pour en mettre l'origine au point M. Cela ne changera rien à la formule, qui est, par conséquent, tout à fait générale [*].

Quand une surface est applicable sur une autre surface, l'élément

---

[*] Peut-être aurait-on rendu l'analyse précédente un peu plus simple en développant d'abord x et y suivant les groupes homogènes des divers ordres en α, β, pour en déduire ensuite dx et dy, tandis que nous avons pris pour point de départ les valeurs de ces différentielles mises sous la forme $dx = kd\alpha + ld\beta$, $dy = md\alpha + nd\beta$, puis développé k, l, m, n. Les conditions d'intégrabilité des seconds membres, que nous avons dû introduire, auraient été alors satisfaites d'elles-mêmes. C'est au lecteur à choisir celui des deux procédés qui lui paraîtra le plus facile; la marche générale des calculs est d'ailleurs la même dans les deux cas.

linéaire ds peut s'exprimer par nos variables α, β de la même manière pour les deux surfaces; la valeur de λ étant identique de part et d'autre, le produit RR' devra donc être aussi le même, ce qu'il fallait démontrer.

4. Si, par exemple, une surface est applicable sur un plan, auquel cas elle rentre dans la classe des surfaces qu'on nomme *développables*, il faudra qu'on ait pour cette surface, comme pour le plan,

$$\frac{1}{RR'} = 0.$$

C'est de là que M. Gauss tire l'équation aux différences partielles connues

$$rt - s^2 = 0, \quad \text{ou} \quad \frac{d^2z}{dx^2}\frac{d^2z}{dy^2} - \left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2 = 0,$$

qui a lieu pour ce genre de surfaces. Mais j'ajoute que, réciproquement, si l'on a

$$rt - s^2 = 0,$$

la surface sera développable ou applicable sur un plan.

Il s'ensuivra, en effet,

$$\frac{1}{RR'} = 0,$$

et, par suite,

$$\frac{d^2 \log \lambda}{d\alpha^2} + \frac{d^2 \log \lambda}{d\beta^2} = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned}\log \lambda &= \varphi(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + \psi(\alpha - \beta\sqrt{-1}) \\ &= \Phi(\alpha - \beta\sqrt{-1}) + \Psi(\alpha + \beta\sqrt{-1}),\end{aligned}$$

en désignant par des lettres majuscules ce que deviennent les fonctions φ et ψ lorsqu'on y change le signe de $\sqrt{-1}$.

En posant donc

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + \Psi(\alpha + \beta\sqrt{-1}) &= 2f(\alpha + \beta\sqrt{-1}), \\ \psi(\alpha - \beta\sqrt{-1}) + \Phi(\alpha - \beta\sqrt{-1}) &= 2F(\alpha - \beta\sqrt{-1}),\end{aligned}$$

on aura

$$\log \lambda = f(\alpha + \beta\sqrt{-1}) + \mathrm{F}(\alpha - \beta\sqrt{-1}),$$

expression dans laquelle les deux fonctions se changent l'une dans l'autre lorsqu'on change le signe de $\sqrt{-1}$.

Ayant ainsi

$$\lambda = e^{f(\alpha+\beta\sqrt{-1})}.e^{\mathrm{F}(\alpha-\beta\sqrt{-1})},$$

faisons

$$\int e^{f(\alpha+\beta\sqrt{-1})}\, d(\alpha + \beta\sqrt{-1}) = \mathrm{x} + \mathrm{y}\sqrt{-1},$$
$$\int e^{\mathrm{F}(\alpha-\beta\sqrt{-1})}\, d(\alpha - \beta\sqrt{-1}) = \mathrm{x} - \mathrm{y}\sqrt{-1},$$

et il nous viendra

$$\lambda(d\alpha^2 + d\beta^2) = d\mathrm{x}^2 + d\mathrm{y}^2,$$

quantité qui peut se construire sur un plan par des coordonnées rectangulaires x, y; d'où l'on conclut que la surface est réellement applicable sur ce plan, les divers éléments ds venant se placer chacun à chacun sur leurs correspondants.

5. Si l'on voulait retrouver cette autre propriété des surfaces développables d'être engendrées par un plan mobile dont l'équation contient un seul paramètre variable, il faudrait intégrer l'équation

$$rt - s^2 = 0.$$

Mise sous la forme

$$\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy} - \frac{dp}{dy}\frac{dq}{dx} = 0,$$

cette équation donne

$$\frac{dq}{dx} : \frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dy} : \frac{dp}{dy} = \omega,$$

d'où

$$dq = \omega dp,$$

et, par conséquent,

$$q = \mathrm{f}(p), \quad dq = \mathrm{f}'(p)\, dp.$$

Maintenant posons

$$px + qy - z = \zeta;$$

nous aurons, en différentiant,

$$d\zeta = xdp + ydq = [x + y\,\mathrm{f}'(p)]\,dp,$$

et nous en conclurons que $x + y\,\mathrm{f}'(p)$ et ζ sont des fonctions de p. Soit, d'après cela,

$$\zeta = \mathfrak{F}(p), \quad x + y\,\mathrm{f}'(p) = \mathfrak{F}'(p).$$

L'intégrale demandée résultera de l'élimination de p entre les deux équations

$$\begin{aligned} z &= px + y\,\mathrm{f}\,(p) - \mathfrak{F}\,(p), \\ 0 &= x + y\,\mathrm{f}'(p) - \mathfrak{F}'(p). \end{aligned}$$

Ces équations appartiennent toutes deux à des plans, quand on regarde p comme un paramètre; et cela indique déjà que la surface est formée par des lignes droites. Mais, de plus, la seconde équation est la dérivée de la première par rapport à p : donc la surface est l'enveloppe du plan mobile représenté par la première équation.

6. On pourrait encore obtenir une expression simple du produit RR' et démontrer, sans de trop longs calculs, le théorème de M. Gauss, en employant de nouvelles variables dont je vais dire un mot.

La formule générale

$$ds^2 = \mathrm{E}du^2 + 2\mathrm{F}dudv + \mathrm{G}dv^2$$

se réduit à

$$ds^2 = \mathrm{E}du^2 + \mathrm{G}dv^2,$$

quand les équations $u =$ *constante*, $v =$ *constante* sont celles de deux groupes de lignes se coupant à angle droit. Supposons, de plus, que la seconde équation, $v =$ *constante*, représente toujours des lignes géodésiques, ce qui arrivera, par exemple, dans le second des deux systèmes particuliers de coordonnées que nous avons cités au n° **1**, et, par conséquent, est applicable à une surface quelconque. Je dis qu'alors le coefficient E est une simple fonction de u, en sorte qu'on peut remplacer $\int du\sqrt{\mathrm{E}}$ par une simple lettre u et écrire

$$ds^2 = du^2 + \mathrm{G}dv^2.$$

En effet, les lignes géodésiques sont celles que parcourt un mobile assujetti à rester sur la surface et qui n'est sollicité par aucune force accélératrice. Il faut donc que les équations

$$\frac{d.\mathrm{E}\frac{du}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{E}}{du}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{G}}{du}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2,$$

$$\frac{d.\mathrm{G}\frac{dv}{dt}}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{E}}{dv}\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{G}}{dv}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

soient satisfaites par $v = constante$. Or cela donne $\frac{d\mathrm{E}}{dv} = 0$, et, par conséquent, $\mathrm{E} =$ *fonction de* u, puisque la valeur constante de v peut d'ailleurs être quelconque. On remarquera en passant, que si l'équation $u = constante$ représentait aussi des lignes géodésiques, on pourrait prendre de même $\mathrm{G} = 1$; l'expression de ds^2 se réduirait donc à

$$ds^2 = du^2 + dv^2.$$

ce qui ne peut arriver que pour une surface développable. C'est donc un caractère spécial de ces surfaces que deux groupes rectangulaires de lignes puissent y être à la fois géodésiques.

Au contraire, l'équation

$$ds^2 = du^2 + \mathrm{G}dv^2$$

peut être admise pour une surface quelconque, et, en l'employant, on trouve

$$\frac{1}{\mathrm{RR}'} = \frac{1}{4\mathrm{G}}\left[\left(\frac{d\mathrm{G}}{du}\right)^2 - 2\mathrm{G}\frac{d^2\mathrm{G}}{du^2}\right] = -\frac{1}{\sqrt{\mathrm{G}}}\frac{d^2.\sqrt{\mathrm{G}}}{du^2}.$$

Cette dernière formule (dont M. Gauss s'est beaucoup servi dans son Mémoire) est élégante et commode. Mais c'est assez d'avoir développé ici le calcul de la formule du n° **5**, qui a aussi ses avantages, et dont M. Gauss n'a point parlé. Voyez, au surplus, dans le Mémoire de M. Gauss, la démonstration de la formule générale applicable à un système quelconque de variables.