JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. CAYLEY

Démonstration d'un théorème de M. Chasles

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 383-384.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__383_0>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. CHASLES;

PAR M. A. CAYLEY.

« Soient P, P′ des points correspondants de deux figures homographiques; si la droite PP′ passe toujours par un point fixe O, les points P sont situés sur une courbe du troisième degré, qui passe par ce même point. »

Soient $\frac{x}{w}$, $\frac{y}{w}$, $\frac{z}{w}$ les coordonnées de P; $\frac{x'}{w'}$, $\frac{y'}{w'}$, $\frac{z'}{w'}$ celles de P′. En supposant que x', y', z', w' sont des fonctions linéaires (sans terme constant) de x, y, z, w, les deux figures seront homographiques.

Soient, de même, $\frac{\alpha}{\delta}$, $\frac{\beta}{\delta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ les coordonnées de O; $\frac{\lambda}{\varpi}$, $\frac{\mu}{\varpi}$, $\frac{\nu}{\varpi}$ les coordonnées d'un point quelconque T.

Puisque P, P′, O sont sur la même droite, on peut faire passer un plan par les quatre points P, P′, O, T. Cela donne tout de suite l'équation

$$\left\{\begin{matrix} \lambda, & \mu, & \nu, & \varpi \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta \\ x, & y, & z, & w \\ x', & y', & z', & w' \end{matrix}\right\} = 0,$$

(en représentant de cette manière le déterminant formé avec les quantités λ, μ, ν, etc.), équation qui doit être satisfaite quels que soient λ, μ, ν, ϖ, et qui équivaut ainsi aux deux conditions

$$\left\{\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \gamma \\ x, & y, & z \\ x', & y', & z' \end{matrix}\right\} = 0, \qquad \left\{\begin{matrix} \alpha, & \beta, & \delta \\ x, & y, & w \\ x', & y', & w' \end{matrix}\right\} = 0.$$

Ces deux dernières équations sont du second degré par rapport aux quantités $\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}$. Le point P est donc situé à l'intersection de deux surfaces du second ordre. Mais ces surfaces ont en commun la droite représentée par les équations

$$\alpha y - \beta x = 0, \quad \alpha x' - \beta y' = 0.$$

Donc elles se coupent de plus suivant une courbe du troisième degré qui passe évidemment par le point O, parce qu'on satisfait aux équations en écrivant

$$x : \alpha = y : \beta = z : \gamma = w : \delta.$$