JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

LEBESGUE

**Note sur l'intégration de l'équation différentielle**
$(\mathrm{A}+\mathrm{A}'x+\mathrm{A}''y)(xdy-ydx)-(\mathrm{B}+\mathrm{B}'x+\mathrm{B}''y)dy+(\mathrm{C}+\mathrm{C}'x+\mathrm{C}''y)dx=o$

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 10 (1845), p. 316-319.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__316_0>

# NOTE

## SUR L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

$$(A + A'x + A''y)(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)\,dy + (C + C'x + C''y)\,dx = 0\,;$$

PAR M. LEBESGUE.

L'équation qui fait l'objet de cette Note a été traitée d'une manière fort élégante par M. Jacobi (Journal de M. Crelle, tome XXIV, page 1). Voici comment l'illustre auteur résume sa méthode :

« Étant donnée l'équation différentielle

$$(A + A'x + A''y)(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)\,dy + (C + C'x + C''y)\,dx = 0,$$

» il faudra résoudre l'équation cubique

$$(A - Z)(B' - Z)(C'' - Z) - B''C'(A - Z) - CA''(B' - Z) - A'B(C'' - Z) + A'B''C + A''BC' = 0\,;$$

» et si, en représentant les trois racines différentes par $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda''$, on
» pose, pour abréger,

$$B'C'' - B''C' = D,\quad C'A'' - C''A' = D',\quad A'B'' - A''B' = D'',\quad B' + C'' = E.$$

» l'intégrale complète de l'équation différentielle proposée sera

$$\left.\begin{array}{l}[D - E\lambda + \lambda^2 + (D' + A'\lambda)\,x + (D'' + A''\lambda)\,y]^{\lambda' - \lambda''}\\ \times[D - E\lambda' + \lambda'^2 + (D' + A'\lambda')\,x + (D'' + A''\lambda')\,y]^{\lambda'' - \lambda}\\ \times[D - E\lambda'' + \lambda''^2 + (D' + A'\lambda'')\,x + (D'' + A''\lambda'')\,y]^{\lambda - \lambda'}\end{array}\right\} = \textit{constante}. »$$

On peut se demander ce que devient cette formule pour le cas des racines égales, et comment on peut la mettre sous forme réelle quand elle est compliquée d'imaginaires. Pour le cas des racines inégales et sous la relation

$$D'A'' = A''D',$$

comme on a

$$D' + A'\lambda = o, \quad D'' + A''\lambda = o, \quad D - E\lambda + \lambda^2 = o,$$

il faut encore modifier la formule. L'auteur n'étant point entré dans ces détails plus longs que difficiles, j'indiquerai une méthode qui, dans tous les cas, et par la résolution de l'équation cubique donnée plus haut, conduit à l'intégrale sous forme réelle. Elle se rapproche beaucoup plus du moyen employé par Euler pour séparer les variables dans l'équation

$$y dx (c + nx) - dy (y + a + bx + nx^2) = o, \quad P dx - Q dy = o,$$

ou

$$nx (x dy - y dx) + dy (y + a + bx) - cy dx = o.$$

Euler pose

$$u = \frac{P}{Q},$$

ce qui conduit à l'équation

$$\frac{du}{u[na + c^2 - bc + (b - 2c) u + u^2]} = \frac{dx}{(c + nx)(a + bx + nx^2)};$$

mais il ne fait point remarquer qu'en posant

$$u - c = nv,$$

il en résulte

$$\frac{dv}{(c + nv)(a + bv + nv^2)} = \frac{dx}{(c + nx)(a + bx + nx^2)};$$

de sorte que l'intégration dépend uniquement de la résolution de l'équation cubique

$$(c + nx)(a + bx + nx^2) = o.$$

Pour l'équation plus générale

$$(A + A'x + A''y)(x dy - y dx) - (B + B'x + B''y) dy + (C + C'x + C''y) dx = o,$$

on posera d'abord

$$A + A'x + A''y = u,$$

et l'élimination de $y$ conduira à une équation qui peut se mettre sous la forme

$$\frac{dx}{du} = \frac{\alpha ux + \beta x + \gamma u + \delta}{\alpha u^2 + \beta' x + \gamma' u + \delta'} = \frac{P}{Q}, \quad (\alpha = A'').$$

Cette équation se traite précisément comme celle d'Euler, en posant

$$z = \frac{P}{Q},$$

ce qui donne l'équation à variables séparées

$$\frac{dz}{\beta'^2 z^3 - \beta'(2\beta - \gamma')z^2 + (\beta^2 - \beta\gamma' - \beta'\gamma + \alpha\delta')z - (\alpha\delta - \beta\gamma)}$$
$$= \frac{du}{\alpha^2 u^3 + \alpha(\beta + \gamma')u^2 + (\beta\gamma' - \beta'\gamma + \alpha\delta')u + \beta\delta' - \beta'\delta}.$$

Quand on n'a ni $\alpha = 0$, ni $\beta' = 0$, en posant

$$\alpha u + \beta = \beta' w,$$

on trouvera

$$\frac{dz}{\psi z} = \frac{dw}{\psi w},$$

$$\psi z = \beta'^2 z^3 - \beta'(2\beta - \gamma')z^2 + (\beta^2 - \beta\gamma' - \beta'\gamma + \alpha\delta')z - (\alpha\delta - \beta\gamma);$$

et de même, en posant

$$\alpha w + \beta = \beta' z,$$

on trouvera

$$\frac{dw}{\varphi w} = \frac{du}{\varphi u},$$

$$\varphi u = \alpha^2 u^3 + \alpha(\beta + \gamma')u^2 + (\beta\gamma' - \beta'\gamma + \alpha\delta')u + \beta\delta' - \beta'\delta.$$

Ainsi l'intégrale dépend de la résolution de l'une des équations

$$\psi z = 0, \quad \varphi u = 0.$$

La dernière revient précisément à l'équation cubique donnée plus haut.

Il y a quelques cas en défaut, mais pour lesquels les variables se séparent sans difficulté, et la résolution de $\varphi u = 0$ suffit toujours pour la détermination de l'intégrale.

L'équation différentielle

$$(A + A'x + A''y)(xdy - ydx) - (B + B'x + B''y)dy + (C + C'x + C''y)dx = 0$$

n'est pas réduite à la forme la plus simple; on pourrait prendre

$$(a'x + a''y)(xdy - ydx) + (b + b'x + b''y)\,dy + (c + c'x + c''y)\,dx = 0;$$

c'est pour la symétrie des calculs et du résultat que l'auteur a introduit un coefficient surnuméraire et pris convenablement les signes.

Si l'on se proposait ce problème : Quelles sont les équations de la forme

$$dx\,(\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \mathrm{C}y^2 + \mathrm{D}y + \mathrm{E}x + \mathrm{F}) + dy\,(\mathrm{A}'x^2 + \mathrm{B}'xy + \mathrm{C}'y^2 + \mathrm{D}'y + \mathrm{E}'x + \mathrm{F}') = 0$$

qui peuvent avoir une intégrale de forme

$$(\alpha + \beta x + \gamma y)^{\delta}.(\alpha' + \beta' x + \gamma' y)^{\delta'}.(\alpha'' + \beta'' x + \gamma'' y)^{\delta''} = \textit{constante},$$

on serait conduit à un système de douze équations qui déterminerait les rapports $\frac{\alpha}{\gamma}, \frac{\beta}{\gamma}; \frac{\alpha'}{\gamma'}, \frac{\beta'}{\gamma'}; \frac{\alpha''}{\gamma''}, \frac{\beta''}{\gamma''}$ par le moyen d'une équation du troisième degré et d'autres de degré inférieur, et qui donnerait, en outre, des équations de condition entre les coefficients A, B, etc., A', B', etc. Ces équations de condition n'existent plus pour l'équation

$$dx\,(\mathrm{A}xy + \mathrm{B}y^2 + \mathrm{C}y + \mathrm{D}x + \mathrm{F}) - dy\,(\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}xy + \mathrm{C}'y + \mathrm{D}'x + \mathrm{F}') = 0,$$

et les équations définitives prennent une forme symétrique quand on choisit l'équation différentielle de M. Jacobi; l'analyse même indique l'introduction d'un coefficient surnuméraire, car on obtient finalement huit équations qui se simplifient quand on partage l'une d'elles en deux autres. Nous ne mettrons pas ici ce calcul, assez élégant, parce que la méthode indiquée plus haut est plus simple et plus générale.