JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ABEL TRANSON

Méthode géométrique pour les rayons de courbure d'une certaine classe de courbes

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 10 (1845), p. 148-156.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1845_1_10__148_0>

MÉTHODE GÉOMÉTRIQUE

POUR

LES RAYONS DE COURBURE

D'UNE CERTAINE CLASSE DE COURBES;

Par M. Abel TRANSON.

I.

On doit à Descartes d'avoir remarqué que, pour la roulette engendrée par un point quelconque du plan d'une courbe qui roule sans glissement sur une autre courbe fixe, la normale passe à chaque instant par le point de contact des deux courbes.

M. Chasles a généralisé ce principe au moyen du théorème suivant :

« *Quand une figure plane éprouve un mouvement infiniment petit dans son plan, il existe toujours un point qui, pendant ce mouvement, reste fixe;*

» *Les droites menées par les différents points de la figure, perpendiculairement aux trajectoires qu'ils décrivent pendant le mouvement infiniment petit, passent toutes par ce point fixe.*

» D'après ce théorème, quand une courbe est décrite par un point d'une figure en mouvement dans son plan, il suffira, pour mener sa normale par le point décrivant, de déterminer le point qui restera fixe au moment du mouvement où le point décrivant aura la position qu'on considère. Ce point se déterminera par les différentes conditions du mouvement de la figure. »

M. Chasles, après avoir montré comment cette méthode s'applique à la courbe engendrée par le sommet d'un triangle lorsque les extrémités de la base parcourent deux droites fixes, ce qui donne une ellipse, ou même lorsque les deux directrices sont des courbes quelconques; comment elle s'applique à la conchoïde de Nicomède, etc., continue en ces termes :

« Ce qui précède suffira pour faire voir que le théorème que nous avons énoncé est une généralisation de l'idée de Descartes au sujet de la tangente à la cycloïde, et qu'il constitue une véritable méthode des tangentes, méthode différente de toutes les autres, et même de celle de Roberval, quoiqu'elle repose, comme celle-ci, sur des considérations de mouvement. Mais on conçoit que cette méthode, si facile, sera aussi, comme celle de Roberval, bornée dans ses applications, puisqu'elle suppose qu'on connaît les conditions géométriques du mouvement d'une figure de forme invariable, à laquelle appartient le point décrivant. Cependant elle s'applique à un grand nombre de courbes particulières et à des familles entières de courbes. » (CHASLES, *Aperçu historique*, pages 548 et 549.)

Les géomètres qui se sont occupés autrefois des roulettes (notamment Waring), ont connu non-seulement la tangente, mais aussi le rayon de courbure de ces courbes pour chaque position du point décrivant. Je rappellerai d'abord comment on peut construire ce rayon de courbure des roulettes, et de là je tirerai une construction qui s'étendra à toutes les courbes auxquelles s'applique la méthode des tangentes de M. Chasles.

II.

Je vais établir le rayon de courbure des roulettes en supposant que la courbe mobile et la courbe fixe se présentent leurs convexités respectives; un simple changement de signe dans la formule répondra à la circonstance opposée.

J'appelle r et r' les rayons de courbure des courbes (l'une fixe et l'autre mobile), au point de contact; ρ la distance du centre de courbure de la roulette à ce même point; et ρ' la distance du point décrivant aussi au point de contact; enfin i l'angle que fait la normale de la roulette avec la normale commune des deux courbes.

L'arc de roulette s'exprime d'abord en multipliant ρ' par l'angle de rotation qui est la somme des deux angles de contingence, c'est-à-dire $\frac{ds}{r} + \frac{ds}{r'}$; s'exprime ensuite par le produit du rayon de courbure de la roulette (rayon égal à $\rho + \rho'$), multiplié par l'angle des deux normales consécutives, c'est-à-dire par $\frac{ds \cos i}{\rho}$. De cette double expression on déduit la formule très-simple

$$(\alpha_1) \qquad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \frac{1}{\cos i},$$

avec

$$(\beta_1) \qquad R = \rho + \rho' = \rho'^2 \frac{\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}}{\rho'\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) - \cos i},$$

pour exprimer le rayon de courbure de la roulette.

Pour l'exactitude de ces formules, il faut compter l'angle i entre les deux droites qui, partant du point de contact, vont, l'une au rayon de courbure de la courbe mobile, et l'autre au point décrivant; de sorte que $\cos i$ changera de signe quand cet angle sera obtus.

Si les courbes roulent dans la concavité l'une de l'autre, il faut changer, dans les formules précédentes, à la fois les signes de ρ' et de r', ce qui donne les formules correspondantes

$$(\alpha_2) \qquad \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho'} = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) \frac{1}{\cos i},$$

$$(\beta_2) \qquad R = \rho - \rho' = \rho'^2 \frac{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}}{\rho'\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) - \cos i}.$$

III.

Je ferai deux observations sur ces formules. Premièrement, si dans (α_1) on suppose $r' = r$, on aura, pour la roulette engendrée par un point quelconque du plan d'une courbe qui roule sur une autre courbe identique,

$$\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} = \frac{2}{r \cos i}.$$

Or telle est précisément, comme on sait, la relation entre les deux distances conjuguées ρ' et ρ, dans la réflexion de la lumière.

Rappelons ici le beau théorème de M. Quetelet sur la caustique (par réflexion). C'est la développée d'une courbe que ce géomètre appelle *caustique secondaire,* et qui est l'enveloppe d'une suite de cercles ayant leurs centres sur la courbe réfléchissante, et passant tous par le foyer lumineux.

Eh bien, il résulte du rapprochement ci-dessus que la caustique secondaire (dans le cas de la réflexion) n'est autre chose que la roulette que décrirait le point lumineux si l'on faisait rouler sur elle-même la courbe réfléchissante. J'ignore si cela avait été remarqué, et d'ailleurs cela se voit directement et sans l'aide de la formule ci-dessus.

(Pareillement, dans le cas des rayons incidents non issus d'un point unique, mais normaux à une courbe déterminée, on sait que la caustique secondaire est enveloppe de tous les cercles ayant leurs centres sur la courbe réfléchissante et qui touchent la courbe en question. On peut dire que la caustique secondaire est aussi l'enveloppe de toutes les positions que prend la courbe normale au faisceau lumineux si on la suppose entraînée dans le roulement de la courbe réfléchissante sur elle-même.)

La seconde observation sur les formules ci-dessus est relative au rayon de courbure de l'ellipse. On sait que cette courbe est engendrée par un point du plan d'un cercle de diamètre égal à la somme, ou à la différence, de ses demi-axes, tournant intérieurement sur un cercle de diamètre double. On appliquera donc la formule (α_2), et on trouvera une construction extrêmement simple pour le rayon de courbure de l'ellipse; formule que j'ai communiquée à la Société philomatique (séance du 30 novembre 1844) et insérée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* pour décembre.

Soient T le point décrivant et O le point actuel du contact, de sorte que TO est la longueur représentée par ρ' dans la formule; on a d'ailleurs

$$r' = \frac{r}{2};$$

et il vient

$$\mathrm{R} = \frac{\overline{\mathrm{TO}}^2}{\mathrm{TO} - r\cos i}.$$

De plus, si on projette le centre du cercle fixe sur la direction de la normale TO; soit C le pied de la perpendiculaire projetante, on aura

$$TC = TO - r \cos i;$$

de sorte que le rayon de courbure de l'ellipse décrite par le point T est une troisième proportionnelle aux lignes TC et TO.

IV.

Maintenant, pour en venir à l'objet de cette Note, puisqu'on a une méthode pour construire les rayons de courbure de toutes les roulettes, n'est-il pas naturel de chercher si le principe sur lequel elle repose serait susceptible de quelque généralisation qui le rende applicable à d'autres questions?...

Or il est facile de voir que *si une figure plane possède dans son plan un mouvement soumis à certaines conditions géométriques, le même mouvement pourra toujours être représenté par le roulement d'une certaine courbe sur une autre courbe supposée fixe.*

D'après ce principe, quand une courbe est décrite par un point d'une figure en mouvement dans son plan, il suffira, pour construire son rayon de courbure, de savoir construire les deux courbes qui sont propres à diriger ce même mouvement, c'est-à-dire, premièrement, la courbe fixe, et ensuite, pour chaque situation du point décrivant, la courbe mobile;

Ou, beaucoup plus simplement: il suffira de connaître, pour chaque situation du point décrivant, celle du point de contact des deux courbes, la position de leur normale commune et leurs rayons de courbure en ce point.

La courbe fixe est facile à construire; c'est le lieu des points qui restent fixes successivement dans tous les déplacements infiniment petits du point décrivant; autrement, c'est le lieu de ces mêmes points à l'aide desquels M. Chasles enseigne la construction de la normale.

Pour avoir la courbe mobile, il faut d'abord renverser les conditions du mouvement, comme fait le même géomètre pour établir la *loi de dualité* relative à l'art du tourneur (*Aperçu,* page 409). Je ne puis mieux faire que transcrire ses expressions :

« *Quand une figure plane est en mouvement dans son plan, l'un de ses points décrit une courbe.*

» *Le mouvement de cette figure est déterminé par des relations constantes, qui doivent avoir lieu entre elle et des points ou des lignes fixes tracées dans son plan.*

» *Ces points et ces lignes forment, par leur ensemble, une seconde figure, qui reste fixe pendant le mouvement de la première.*

» *Que l'on considère maintenant la première figure dans une de ses positions, et qu'on la suppose fixe; puis qu'on fasse mouvoir la seconde figure, de manière qu'elle se trouve toujours dans les mêmes conditions de position par rapport à la première figure....* »

Dans cette nouvelle loi de mouvement, il y aura, sur le plan de la courbe primitivement mobile et maintenant fixe, un lieu géométrique pour tous les points qui resteront successivement immobiles pendant les déplacements infiniment petits du nouveau système mobile. Ce lieu sera la seconde courbe cherchée.

Mais le plus souvent on pourra éviter la considération de ces deux courbes, parce qu'il suffit, comme je l'ai dit, de connaître pour chaque situation du point décrivant, la situation du point de contact, avec la normale commune et les deux rayons de courbure.

Et cela même apportera beaucoup de facilité dans l'application de la méthode, en considération de ce que, dans les formules ci-dessus données pour le rayon de courbure des roulettes, on voit que les rayons de courbure des deux courbes dirigeantes n'y entrent que par la fonction

$$\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r'},$$

c'est-à-dire qu'on peut se donner toujours l'une des deux quantités r et r'; supposer, par exemple, que l'arc de roulette actuel est décrit par le roulement d'un cercle sur une ligne droite, ou de deux cercles dont les rayons ont tel rapport de grandeur et de situation qu'on voudra...

V.

Je laisse au lecteur que ces problèmes intéresseront le plaisir de trouver les rayons de courbure des diverses conchoïdes et cissoïdes considérées dans leur génération par mouvement continu.

Je vais de suite indiquer la construction du rayon de courbure pour la courbe décrite par le point M situé sur le plan d'une figure dont le mouvement est défini par celui de deux de ses points, A et B, assujettis à demeurer sur deux courbes fixes.

Je profite de la latitude que j'ai signalée dans les formules pour les roulettes, et j'y fais

$$\frac{1}{r} \pm \frac{1}{r'} = \frac{1}{k};$$

en d'autres termes, je nomme k le rayon du cercle qui, en roulant sur la tangente commune aux deux courbes de roulement (l'une fixe et l'autre mobile), ferait parcourir au point M l'arc (circulaire) qu'il parcourt effectivement; c'est ce que j'appellerai le *cercle de roulement*.

Si, en même temps, j'appelle N la portion de normale entre le point décrivant et le point O actuellement fixe, ce qu'on a appelé ρ' dans les formules générales, il viendra l'expression

$$R = N^2 \frac{1}{N - k \cos i},$$

qui est la formule pour les rayons de courbure de toutes les CYCLOIDES (*allongées, accourcies* ou *ordinaires*).

Or les points A et B appartiennent au système mobile; ainsi cette formule leur est applicable.

Représentons par R_1 le rayon de courbure de la courbe sur laquelle A est assujetti à rester. Soit N_1 la distance AO entre A et le point fixe, rencontre des normales AO et BO. Enfin, soit i_1 l'angle (inconnu) que fait la ligne AO avec la normale commune des deux courbes de roulement; on aura

$$(\delta) \qquad k \cos i_1 = N_1 - \frac{N_1^2}{R_1},$$

c'est-à-dire qu'on pourra, à l'aide des lignes connues N_1 et R_1, construire la projection, sur OA, du rayon de roulement k. Seulement il faut faire attention que, pour l'exactitude de la formule (δ), la courbe décrite par le point A doit tourner sa *concavité* vers O. Si elle y tournait sa *convexité*, on aurait

$$k \cos i_1 = N_1 + \frac{N_1^2}{R_1}.$$

Mais, d'une manière générale, « à partir de A sur la normale AO, » et *dans la concavité* de la courbe que décrit le point A, portez une » longueur égale à $\frac{N_1^2}{R_1}$; son extrémité marquera la projection sur AO, » du centre du cercle de roulement.

» On construira la projection de ce même centre sur la normale OB » avec les valeurs correspondantes N_2 et R_2, et alors il sera bien facile » de construire le centre de roulement lui-même.

» Ce centre construit, projetez-le en T sur la normale passant par » le point M, c'est-à-dire sur la ligne MO; *le rayon de courbure de* » *la courbe décrite par* M *sera une troisième proportionnelle aux* » *lignes* MO *et* MT; c'est-à-dire qu'on aura pour sa valeur

$$R = \frac{\overline{MO}^2}{MT};$$

» et le centre de courbure sera placé, par rapport au point M, du » même côté que le point T. »

VI.

Lorsque le mouvement sera défini autrement que par celui de deux points assujettis à rester sur deux courbes fixes, il y aura une autre détermination pour ce que j'ai appelé le centre du cercle de roulement; mais toujours il suffira de construire ce centre et le projeter sur la normale MO en T; le rayon de courbure en M sera encore donné par cette même formule

$$R = \frac{\overline{MO}^2}{MT}.$$

Si l'on considère le mouvement simultané de tous les points M, M', M'',... de la figure plane, leurs vitesses sont proportionnelles à MO, M'O, M''O,...: de sorte qu'il suffit d'avoir déterminé le point O et l'une des vitesses pour connaître toutes les autres, circonstance qui peut être d'une grande utilité dans le calcul des machines, comme l'a fait remarquer M. Chasles, en exposant la propriété du point O par rapport à la détermination des tangentes.

Le calcul des machines pourra, ce me semble, tirer aussi quelque utilité de la présente méthode pour les rayons de courbure; car une fois déterminé ce que j'ai appelé le centre de roulement, si on le projette en T, T', T'',... sur les diverses normales MO, M'O, M''O,..., la force centrifuge pour l'unité de masse en chacun des points M, M', M'',..., étant proportionnelle respectivement à

$$\frac{\overline{MO}^2}{R}, \quad \frac{\overline{M'O}^2}{R'}, \quad \frac{\overline{M''O}^2}{R''}, \ldots,$$

se trouvera, à cause de la valeur des rayons R, R', R'',..., représentée graphiquement par les lignes MT, M'T', M''T'',..., solution bien simple, puisque tous ces points T, T', T'' sont sur le cercle passant en O et décrit sur le rayon du cercle de roulement comme diamètre.