JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

A. BRAVAIS

Mémoire sur le mouvement propre du système solaire dans l'espace

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 435-488.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__435_0>

MÉMOIRE

SUR

LE MOUVEMENT PROPRE DU SYSTÈME SOLAIRE DANS L'ESPACE,

PAR M. A. BRAVAIS.

La question du mouvement propre du Soleil a été longtemps un sujet de controverse pour les astronomes, et elle restait encore indécise, lorsque récemment le beau travail de M. Argelander est venu dissiper tous les doutes et prouver avec une complète évidence la réalité de ce mouvement. Les astronomes avaient presque toujours pris pour base des considérations géométriques; ils avaient admis que toutes les directions de mouvement étant également possibles, celle du mouvement solaire devait être déterminée de manière à compenser l'inégalité de tendance des étoiles vers telle ou telle région de l'espace, telle qu'elle résulte de l'observation des mouvements propres apparents. Mais est-il nécessaire que les mouvements des étoiles se fassent en tous sens avec une égale facilité? et si une plus grande facilité suivant une certaine direction est reconnue, le mouvement du Soleil en sens inverse en est-il la conséquence irrécusable? En toute rigueur, on peut dénier un pareil résultat: il est donc utile de rendre la question du mouvement solaire indépendante d'un semblable *postulatum*. D'ailleurs, le principe ci-dessus énoncé laisse de l'arbitraire dans son interprétation, c'est-à-dire dans la mise en équation des conditions du problème, et celle-ci dépend, en grande partie, du point de vue particulier auquel se place le calculateur. C'est ainsi que W. Herschel a déterminé le point de la sphère céleste vers lequel se meut le Soleil d'après la condition, que la somme des produits du mouvement propre de chaque étoile par le sinus de l'angle compris entre la direction observée et la direction *parallactique* soit un minimum. Burckardt a recherché si les étoiles situées à 90 degrés de ce point avaient des arcs de mouvement propre approchant du parallélisme. M. Bessel a cherché à fixer la position du plan normal au mouvement solaire, de telle sorte qu'il renfermât les pôles des arcs de grand cercle de chaque mouvement propre. Enfin M. Argelander s'est imposé la condition que la somme des carrés des angles compris entre les directions observées et les directions *parallactiques*, multipliés respectivement par le sinus de la distance angulaire de chaque étoile au point vers lequel tend le Soleil, fût la plus petite possible [*].

La méthode que je vais exposer diffère des méthodes antérieures en ce qu'elle se base sur des considérations *mécaniques;* elle donne les composantes de la vitesse solaire en fonction de quantités inconnues, il est vrai, telles que les masses des étoiles et leurs distances à la Terre; mais au point de vue théorique il est permis de les supposer connues, puisque notre ignorance à leur égard n'est que passagère et tend chaque jour à se dissiper. Dans cette méthode, les pétitions de principe, basées sur des probabilités, ne sont pas entièrement éliminées; mais elles y sont réduites, si je ne me trompe, aux termes les plus simples possible.

Commençons par grouper ensemble, par la pensée, un nombre considérable d'étoiles occupant l'intérieur d'une enceinte idéale qui contienne elle-même notre Soleil, et considérons le centre de gravité d'un pareil système. Si le nombre des étoiles est limité, si l'univers matériel a ses bornes, nous pourrons aussi considérer le centre de gravité de cet univers; nos démonstrations et nos formules s'appliqueront également à ces deux cas.

Le centre de gravité de cette agglomération d'étoiles peut être en repos ou en mouvement; je le supposerai en mouvement, le cas du repos n'étant lui-même qu'un cas particulier de ce dernier. Ce qu'il nous importe de déterminer, c'est le déplacement du Soleil *relativement à ce centre de gravité.* Une fois ce déplacement connu, il restera à déterminer le mouvement de ce centre par rapport au centre de gravité d'un second groupe beaucoup plus étendu, question distincte de la précédente et qui pourra se traiter entièrement à part. Quant à la dé-

---

[*] *Transactions philosophiques* pour 1805 et 1806. — *Connaissance des Temps* pour l'année 1809. — Le Journal *l'Institut,* 6e année.

termination de la translation du centre de gravité de tout l'univers, elle nous est évidemment inaccessible, attendu que les repères fixes propres à la faire connaître nous manquent complétement : peut-être cependant pourra-t-on quelque jour arriver, par induction, à opter entre l'état de repos et celui d'une translation rectiligne et uniforme.

Ces préliminaires posés, traitons d'abord la première partie du problème, et proposons-nous de déterminer le mouvement du Soleil par rapport au centre de gravité d'une réunion d'astres compris dans une vaste enceinte et formant un groupe naturel dont le Soleil est lui-même une des parties intégrantes. Puisqu'il ne s'agit que de mouvements relatifs, nous pouvons admettre que ce centre de gravité est immobile; la considération de l'immobilité de ce point forme en quelque sorte le principe de la méthode que nous allons développer.

Prenons pour origine *fixe* des coordonnées le lieu de l'espace occupé par le centre du Soleil à l'époque invariable que nous prendrons pour origine du temps (par exemple, au 1er janvier 1800). Menons par ce point les axes rectangulaires des x, des y et des z; et soient x, y, z les coordonnées d'une étoile rapportées à ces plans fixes : l'étoile venant à se déplacer, par l'effet de son mouvement réel, au bout de l'unité de temps, les nouvelles coordonnées seront $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$.

Prenons le centre mobile du Soleil pour origine *mobile* de nouvelles coordonnées parallèles aux précédentes; à l'origine du temps les coordonnées de l'étoile seront x, y, z dans ce système, ainsi que dans le précédent; mais au bout de l'unité de temps, les coordonnées relatives aux plans mobiles seront $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$. La caractéristique Δ indiquera toujours désormais les variations relatives à l'origine et aux plans coordonnés *fixes;* la caractéristique δ désignera les variations relatives à l'origine *mobile* et aux plans *mobiles*.

Soient ξ, η, ζ les trois coordonnées de l'origine mobile rapportée à l'origine fixe : ces quantités sont les composantes de la vitesse solaire suivant les axes fixes; ρ sera la vitesse totale ou $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$. Nous nommerons mouvements *parallactiques* les mouvements apparents produits par le déplacement solaire; pôle *parallactique,* le point de la sphère céleste vers lequel le Soleil se dirige, et duquel divergent tous les mouvements précédents; enfin *équateur parallactique* le grand cercle perpendiculaire au mouvement du Soleil.

Au bout de l'unité de temps, on aura

$$(x + \Delta x) = (x + \delta x) + \xi,$$

ou plus simplement

$$\Delta x = \delta x + \xi,$$

ce qui nous mène aux trois équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta x &= \delta x + \xi,\\ \Delta y &= \delta y + \eta,\\ \Delta z &= \delta z + \zeta. \end{aligned}\right.$$

Soit maintenant m la masse de l'étoile (x, y, z); soit m' la masse de l'étoile (x', y', z')...; il résulte de l'immobilité du centre de gravité de tout le système par rapport aux plans coordonnés fixes, que l'on aura

$$\begin{aligned} \Sigma(m\Delta x) &= 0,\\ \Sigma(m\Delta y) &= 0,\\ \Sigma(m\Delta z) &= 0. \end{aligned}$$

La somme Σ doit s'étendre à toutes les étoiles du groupe. Le Soleil faisant lui-même partie de ce groupe, et M étant sa masse, on aura, en faisant sortir la quantité de mouvement du Soleil de dessous le signe Σ,

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \Sigma(m\Delta x) + \mathrm{M}\,\xi &= 0,\\ \Sigma(m\Delta y) + \mathrm{M}\,\eta &= 0,\\ \Sigma(m\Delta z) + \mathrm{M}\,\zeta &= 0. \end{aligned}\right.$$

Substituons dans ces équations les valeurs de Δx, Δy, Δz, tirées des équations (1), et nous aurons

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} (\Sigma m + \mathrm{M})\,\xi + \Sigma(m\delta x) &= 0,\\ (\Sigma m + \mathrm{M})\,\eta + \Sigma(m\delta y) &= 0,\\ (\Sigma m + \mathrm{M})\,\zeta + \Sigma(m\delta z) &= 0, \end{aligned}\right.$$

équations qui donnent les composantes de la vitesse solaire en fonction des masses et des déplacements relatifs δx, δy, δz; déplacements que nos mesures peuvent nous faire apprécier, tandis que ces mêmes mesures ne peuvent nous faire connaître les déplacements absolus Δx, Δy, Δz.

Prenons maintenant pour coordonnées de l'étoile son rayon vecteur R à l'origine du temps, et les angles α, β, γ de ce rayon vecteur avec les trois axes, de sorte que l'on ait

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \mathrm{R}\cos\alpha,\\ y &= \mathrm{R}\cos\beta,\\ z &= \mathrm{R}\cos\gamma.\end{aligned}\right.$$

Différentions ces équations pour avoir les déplacements, au bout de l'unité de temps, relativement à l'origine mobile; nous aurons

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} \delta x &= -\mathrm{R}\sin\alpha\,\delta\alpha + \cos\alpha\,\delta\mathrm{R},\\ \delta y &= -\mathrm{R}\sin\beta\,\delta\beta + \cos\beta\,\delta\mathrm{R},\\ \delta z &= -\mathrm{R}\sin\gamma\,\delta\gamma + \cos\gamma\,\delta\mathrm{R},\end{aligned}\right.$$

et, après la substitution de ces valeurs dans les équations (3), elles deviennent

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} (\mathrm{M}+\Sigma m)\,\xi &= \Sigma(m\mathrm{R}\sin\alpha\,\delta\alpha) - \Sigma(m\cos\alpha\,\delta\mathrm{R}),\\ (\mathrm{M}+\Sigma m)\,\eta &= \Sigma(m\mathrm{R}\sin\beta\,\delta\beta) - \Sigma(m\cos\beta\,\delta\mathrm{R}),\\ (\mathrm{M}+\Sigma m)\,\zeta &= \Sigma(m\mathrm{R}\sin\gamma\,\delta\gamma) - \Sigma(m\cos\gamma\,\delta\mathrm{R}).\end{aligned}\right.$$

Si nous pouvions déterminer les valeurs des quantités m, R, δR, avec la même facilité que nous éprouvons dans la mesure des angles α, β, γ, et de leurs variations, les équations (6) donneraient immédiatement et sans arbitraire, les composantes de la vitesse du Soleil. Pour citer un exemple à l'appui, je ferai remarquer qu'on pourrait s'en servir pour déterminer à un instant donné la vitesse et la direction du mouvement de la Terre au milieu de notre système planétaire, si l'on n'avait d'ailleurs des moyens infiniment préférables pour cette détermination. Il faut pour cela supposer connues les masses du Soleil et des planètes : α, β, γ seront les lieux géocentriques, et $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$ les mouvements géocentriques diurnes; on conclura les R d'observations parallactiques, ou de l'observation des diamètres apparents, les δR des variations de ces mêmes diamètres; nos équations donneront aussitôt les trois composantes de la vitesse terrestre, le jour étant pris pour unité de temps. Dans la pratique, cette méthode n'est guère applicable au mouvement de translation de la Terre; mais pour le Soleil et les étoiles, nous sommes forcés de nous en contenter dans l'état actuel de nos connaissances.

Les difficultés qui s'opposent en ce moment à la détermination des quantités m, R, δR, ne sont pas égales pour les grandeurs de chacun de ces trois ordres. L'heureuse application des méthodes micrométriques à la détermination des *parallaxes relatives* nous permet de penser que, sous peu, nous connaîtrons les distances de la Terre à un assez grand nombre d'étoiles. La détermination des masses stellaires offre un avenir bien moins favorable; nous ne pouvons guère espérer connaître *prochainement* que les masses des étoiles binaires, lesquelles forment, il est vrai, une fraction importante parmi les étoiles les plus rapprochées de nous; pour les autres astres, nous serons longtemps encore obligés de nous en tenir à une vague appréciation de leur masse, fondée sur la comparaison de leur splendeur et de leur distance, appréciation que la connaissance des masses des étoiles doubles pourra peut-être rectifier à un haut degré. Quant aux δR, l'absence de tout diamètre apparent et l'incertitude des mesures parallactiques s'opposent à toute tentative de mesures à leur égard, et nous sommes forcés d'ajourner celle-ci à l'époque indéfiniment reculée où les lois qui règlent les mouvements propres des étoiles nous seront connues.

Il paraît plausible, au premier abord, d'admettre que, sur un grand nombre d'étoiles, les termes de la forme $m \cos \alpha \delta R$ doivent se compenser et s'entre-détruire; mais il n'en est rien, et, pour le montrer, faisons coïncider un instant le pôle parallactique avec l'extrémité de l'axe des x, et avec le pôle boréal de l'équateur céleste : $\cos \alpha$ se change en $\sin D$, D étant la déclinaison de l'étoile. Considérons une zone comprise entre deux cercles parallèles boréaux; pour toutes les étoiles de cette zone, $\sin D$ peut être considéré comme positif et à peu près constant. Le signe des termes $m \sin D \delta R$, correspondants à cette zone, dépend donc du signe de δR. Mais, puisque le Soleil marche vers le pôle nord, δR sera *généralement* négatif. A l'équateur $\sin D$ est nul, et δR peut y être indifféremment positif ou négatif. Enfin, dans l'hémisphère austral, $\sin D$ devient négatif, et δR *généralement* positif : de sorte que les deux facteurs $\sin D$ et δR changent de signe à la fois dans le passage d'un hémisphère à l'autre, et la somme $\Sigma m \sin D \delta R$, loin de tendre à devenir nulle, convergera vers une certaine valeur négative. Ces remarques prouvent qu'il n'est pas permis de supposer $\delta R = 0$ dans les formules (6).

Les astronomes qui ont traité la question actuelle ont admis *implicitement* que le mouvement propre des étoiles a lieu suivant le plan tangent à la surface de la sphère céleste héliocentrique. Cette erreur agit sur la quantité du mouvement solaire, en l'atténuant; mais elle n'influe pas sur la direction de ce mouvement. Car, en continuant à placer le pôle parallactique sur l'axe des x, il n'est pas permis, il est vrai, de supposer $\Sigma m \cos\alpha\,\delta R = 0$; mais les suppositions $\Sigma m \cos\beta\,\delta R = 0$, $\Sigma m \cos\gamma\,\delta R = 0$ sont légitimes, ce que l'on reconnaîtrait de même en plaçant le pôle parallactique sur l'équateur céleste. On aura donc $\eta = 0$, $\zeta = 0$ dans l'hypothèse $\delta R = 0$, aussi bien que dans le cas de la nature où δR est laissée à sa valeur: ainsi la direction du mouvement est la même dans les deux hypothèses; mais l'ordonnée ξ, qui représente alors la vitesse solaire, étant déterminée par la condition $\delta R = 0$, sera nécessairement inférieure à la même ordonnée déduite des valeurs réelles de δR, puisque le terme négligé $-\Sigma(m \cos\alpha\,\delta R)$ est nécessairement positif.

On peut éluder cette difficulté en remplaçant δR par sa valeur en ΔR; pour cela, différentions, par rapport à l'origine fixe, l'équation

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

nous aurons, après avoir divisé par $2R$,

$$\Delta R = \cos\alpha\,\Delta x + \cos\beta\,\Delta y + \cos\gamma\,\Delta z;$$

en différentiant par rapport à l'origine mobile, on aurait obtenu de même

$$\delta R = \cos\alpha\,\delta x + \cos\beta\,\delta y + \cos\gamma\,\delta z.$$

Retranchant ces équations l'une de l'autre, en ayant égard aux équations (1), on trouve

$$(7) \qquad \Delta R - \delta R = \xi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma.$$

On pourrait arriver directement à cette dernière équation par des considérations géométriques; car son second membre n'est autre chose que la projection du chemin ρ parcouru par le Soleil sur le rayon vecteur R.

Si nous tirons de là la valeur de δR pour la substituer dans les équations (6), et si nous réunissons dans le premier membre tous les termes en ξ, η et ζ, celles-ci deviennent

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}&[M + \Sigma(m\sin^2\alpha)]\xi - \Sigma(m\cos\alpha\cos\beta)\eta - \Sigma(m\cos\alpha\cos\gamma)\zeta\\&\qquad = \Sigma(mR\sin\alpha\delta\alpha) - \Sigma(m\cos\alpha\Delta R),\\&[M + \Sigma(m\sin^2\beta)]\eta - \Sigma(m\cos\alpha\cos\beta)\xi - \Sigma(m\cos\beta\cos\gamma)\zeta\\&\qquad = \Sigma(mR\sin\beta\delta\beta) - \Sigma(m\cos\beta\Delta R),\\&[M + \Sigma(m\sin^2\gamma)]\zeta - \Sigma(m\cos\alpha\cos\gamma)\xi - \Sigma(m\cos\beta\cos\gamma)\eta\\&\qquad = \Sigma(mR\sin\gamma\delta\gamma) - \Sigma(m\cos\gamma\Delta R).\end{aligned}\right.$$

On trouve, introduite dans ces formules, la quantité ΔR, c'est-à-dire la variation de la distance de l'étoile à l'origine fixe : cette quantité est tout aussi difficile à déterminer directement que l'était la quantité δR. Mais nous pouvons admettre comme très-probable que les augmentations et diminutions des divers rayons vecteurs se compensent, et que les termes des sommes $\Sigma(m\cos\alpha\Delta R)$, $\Sigma(m\cos\beta\Delta R)$, $\Sigma(m\cos\gamma\Delta R)$, tendent à s'entre-détruire. L'opinion de W. Herschel, qui admettait dans la matière un pouvoir permanent de concentration, peut être objectée à cette manière de voir; mais dans le cas même où tous les ΔR seraient négatifs, le changement de signe du cosinus dans le passage d'un hémisphère à l'hémisphère opposé n'entraînerait pas moins la compensation demandée, pourvu que le pouvoir de concentration agisse avec une égale énergie dans les deux hémisphères, ce qui ne paraît pas pouvoir être refusé, *si le Soleil occupe la partie centrale du système stellaire que l'on envisage.*

Si l'on projette chaque étoile sur son rayon vecteur initial, les trois sommes $\Sigma(m\cos\alpha\Delta R)$, $\Sigma(m\cos\beta\Delta R)$, $\Sigma(m\cos\gamma\Delta R)$ représenteront les quantités de mouvement du centre de gravité des étoiles ainsi projetées par rapport aux trois axes coordonnés. L'hypothèse $\Delta R = 0$ revient donc à supposer que le centre de gravité de l'ensemble des étoiles projetées participe à l'immobilité du centre de gravité de l'ensemble des étoiles projetantes, supposition qui doit être très-peu écartée de la vérité.

Le Soleil a aussi son mouvement $\Delta R = \rho$, lequel, projeté sur les trois axes, donne les quantités de mouvement $M\xi$, $M\eta$, $M\zeta$. Nous les comprendrons dans les sommes des termes destinés à se compenser, et nous écrirons

$$M\xi + \Sigma(m\cos\alpha\Delta R) = 0,\quad M\eta + \Sigma(m\cos\beta\Delta R) = 0,\quad M\zeta + \Sigma(m\cos\gamma\Delta R) = 0.$$

Posons maintenant, pour simplifier,

$$(9)\left\{\begin{array}{lll} \Sigma(m\sin^2\alpha) = A, & \Sigma(m\sin^2\beta) = B, & \Sigma(m\sin^2\gamma) = C, \\ \Sigma(m\cos\beta\cos\gamma) = a, & \Sigma(m\cos\alpha\cos\gamma) = b, & \Sigma(m\cos\alpha\cos\beta) = c. \end{array}\right.$$

Les formules (8) se changent en

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{l} A\xi - b\eta - c\zeta = \Sigma(mR\sin\alpha\,\delta\alpha), \\ B\eta - c\xi - a\zeta = \Sigma(mR\sin\beta\,\delta\beta), \\ C\zeta - b\xi - a\eta = \Sigma(mR\sin\gamma\,\delta\gamma). \end{array}\right.$$

Ces trois équations linéaires déterminent complétement les trois inconnues ξ, η, ζ, du moins dès que l'on suppose connues les masses et les distances des étoiles.

Si nous projetons chaque étoile sur une sphère dont le centre est à l'origine mobile, et qui a pour rayon le rayon vecteur de cette étoile, δR sera nul pour l'étoile projetée, considérée comme mobile elle-même. Faisons donc $\delta R = 0$ dans les équations (5), et remplaçons y δx, δy, δz par (δx), (δy), (δz), les parenthèses indiquant que les variations se rapportent aux étoiles projetées; on aura

$$(\delta x) = -R\sin\alpha\,\delta\alpha,\quad (\delta y) = -R\sin\beta\,\delta\beta,\quad (\delta z) = -R\sin\gamma\,\delta\gamma.$$

On peut trouver encore un autre équivalent des quantités $R\sin\alpha\,\delta\alpha$, $R\sin\beta\,\delta\beta$, $R\sin\gamma\,\delta\gamma$. En effet, soit δs l'angle correspondant au mouvement propre, tel qu'il est observé de la Terre; $R\delta s$ sera l'arc parcouru par la projection de l'étoile sur la sphère héliocentrique de rayon R. Soient u, v, w, les angles formés par la tangente à cet arc avec les demi-axes des x, des y et des z positives; on aura évidemment

$$(\delta x) = R\cos u\,\delta s,$$
$$(\delta y) = R\cos v\,\delta s,$$
$$(\delta z) = R\cos w\,\delta s.$$

On a donc, pour exprimer les derniers membres des équations (10), les doubles égalités

$$(11)\quad \begin{cases} \Sigma(m\mathrm{R}\sin\alpha\,\delta\alpha) = -\Sigma[m(\delta x)] = -\Sigma(m\mathrm{R}\cos u\,\delta s),\\ \Sigma(m\mathrm{R}\sin\beta\,\delta\beta) = -\Sigma[m(\delta y)] = -\Sigma(m\mathrm{R}\cos v\,\delta s),\\ \Sigma(m\mathrm{R}\sin\gamma\,\delta\gamma) = -\Sigma[m(\delta z)] = -\Sigma(m\mathrm{R}\cos w\,\delta s).\end{cases}$$

Ainsi ces derniers membres sont, aux signes près, les *quantités de mouvement* obtenues dans la supposition $\delta\mathrm{R} = 0$, et projetées sur chacun des trois axes fixes.

D'un autre côté, considérons la sphère de rayon 1, et dont le centre est au Soleil; rapportons par la pensée chaque étoile au point où son rayon vecteur héliocentrique vient percer cette surface. Soient x', y', z' ce que deviennent alors les coordonnées x, y, z de l'étoile; on aura évidemment

$$\begin{array}{lll} \cos\alpha = x', & \cos\beta = y', & \cos\gamma = z',\\ \sin^2\alpha = y'^2 + z'^2, & \sin^2\beta = x'^2 + z'^2, & \sin^2\gamma = x'^2 + y'^2.\end{array}$$

La quantité A [voir les équations (9)] prendra la forme $\Sigma m(y'^2 + z'^2)$, et représentera le *moment d'inertie* de la sphère à surface étoilée et de rayon 1, par rapport à l'axe des x; B sera le moment d'inertie des mêmes étoiles par rapport à l'axe des y, et C par rapport à l'axe des z. Les termes a, b, c correspondront aux sommes de rectangles $\Sigma my'z'$, $\Sigma mx'z'$, $\Sigma mx'y'$, sommes qui, comme on le sait, jouent un grand rôle dans la théorie des moments d'inertie. Concevons donc que l'on ait déterminé les trois axes principaux de cette surface sphérique étoilée, et prenons ces axes pour axes coordonnés; remplaçons en conséquence ξ, η, ζ par ξ', η', ζ'; les moments A, B, C par les trois moments principaux A', B', C', et α, β, γ par α', β', γ'; les sommes de rectangles s'évanouiront dans ce nouveau système d'axes, et l'on aura simplement

$$(12)\quad \begin{cases} \mathrm{A}'\xi' = \Sigma(m\mathrm{R}\sin\alpha'\delta\alpha'),\\ \mathrm{B}'\eta' = \Sigma(m\mathrm{R}\sin\beta'\delta\beta'),\\ \mathrm{C}'\zeta' = \Sigma(m\mathrm{R}\sin\gamma'\delta\gamma').\end{cases}$$

On arrive à une équation semblable, si l'on fait coïncider l'axe des x

avec la droite suivant laquelle se meut le Soleil ; car, en faisant

$$\eta = 0, \quad \zeta = 0, \quad \xi = \rho,$$

dans la première des équations (10), on trouve

$$(13) \qquad A\rho = \Sigma (m\mathrm{R} \sin\alpha\,\delta\alpha).$$

On peut maintenant, en tenant compte des équations (11), (12) et (13), énoncer ces derniers résultats sous la forme du théorème suivant :

« Si, d'une part, on rapporte les étoiles sur une surface sphérique » de rayon 1, en leur conservant leurs masses et leurs positions rela- » tives angulaires; et, si d'autre part, on projette sur un axe pas- » sant par le Soleil leurs quantités de mouvement normales aux » rayons vecteurs héliocentriques, la somme de ces quantités, divisée » par le moment d'inertie que possède autour du même axe la surface » sphérique étoilée de rayon 1, donnera, après avoir changé son si- » gne, la composante de la vitesse du Soleil suivant ce même axe, si » celui-ci est d'ailleurs, ou l'un des trois axes principaux de la surface » sphérique, ou la droite suivant laquelle se meut le Soleil. »

Il est cependant plus simple, dans la pratique, de ne point effectuer de changement d'axe, et de prendre pour plans coordonnés l'équateur et les deux colures, les axes des x, des y et des z positives venant percer la sphère céleste au premier point du Bélier, au point équatorial de 6 heures, et au pôle nord.

Nommons D et Æ la déclinaison et l'ascension droite de l'étoile (x, y, z); nous aurons

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos\alpha &= \cos \mathrm{D} \cos Æ, \\ \cos\beta &= \cos \mathrm{D} \sin Æ, \\ \cos\gamma &= \sin \mathrm{D}. \end{aligned} \right.$$

Prenons l'année pour unité de temps; les variations $\delta\mathrm{D}$, $\delta Æ$ représenteront les mouvements propres annuels de l'étoile en déclinaison et en ascension droite, et l'on aura

$$(15) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sin\alpha\,\delta\alpha &= \cos \mathrm{D} \sin Æ\,\delta Æ + \sin \mathrm{D} \cos Æ\,\delta \mathrm{D}, \\ \sin\beta\,\delta\beta &= -\cos \mathrm{D} \cos Æ\,\delta Æ + \sin \mathrm{D} \sin Æ\,\delta \mathrm{D}, \\ \sin\gamma\,\delta\gamma &= -\cos \mathrm{D}\,\delta \mathrm{D}. \end{aligned} \right.$$

Les équations (14) et (15) suffisent pour éliminer complétement les angles α, β, γ des équations (10).

Pour pouvoir les appliquer, malgré notre ignorance des distances et des masses des étoiles, j'ai supposé les masses constantes, ce qui fait disparaître le facteur commun m des équations (10). J'ai supposé en outre la distance R constante et égale à la distance moyenne des étoiles qui composent le groupe. On trouve alors

$$(16)\quad\left\{\begin{aligned}&\Sigma(1-\cos^2 D\cos^2 Æ)\xi-\Sigma(\cos^2 D\sin Æ\cos Æ)\eta-\Sigma(\cos D\sin D\cos Æ)\zeta\\&\qquad\qquad=R\,\Sigma(\cos D\sin Æ\,\delta Æ+\sin D\cos Æ\,\delta D),\\&\Sigma(1-\cos^2 D\sin^2 Æ)\eta-\Sigma(\cos^2 D\sin Æ\cos Æ)\xi-\Sigma(\cos D\sin D\sin Æ)\zeta\\&\qquad\qquad=R\,\Sigma(-\cos D\cos Æ\,\delta Æ+\sin D\sin Æ\,\delta D),\\&\Sigma(\cos^2 D)\zeta-\Sigma(\cos D\sin D\cos Æ)\xi-\Sigma(\cos D\sin D\sin Æ)\eta\\&\qquad\qquad=R\,\Sigma(-\cos D\,\delta D).\end{aligned}\right.$$

En appliquant ces formules aux soixante et onze étoiles à mouvement propre supérieur à 0″,5, dont M. Bessel a donné le catalogue dans ses *Fundamenta Astronomiæ*, p. 310, j'ai obtenu

$$(17)\quad\left\{\begin{aligned}&41{,}949\,\xi-3{,}376\,\eta+1{,}200\,\zeta=-\ \ 6'',140.R,\\&45{,}149\,\eta-3{,}376\,\xi+4{,}299\,\zeta=-20'',928.R,\\&54{,}901\,\zeta+1{,}200\,\xi+4{,}299\,\eta=+15'',807.R.\end{aligned}\right.$$

Il est visible qu'en opérant ainsi, chaque étoile intervient dans le résultat définitif proportionnellement à la grandeur de son mouvement propre. La plupart des astronomes, et notamment M. Argelander, ont opéré différemment, et ont assigné à chaque étoile une part d'influence égale dans la formation des moyennes et des sommes, quel que soit d'ailleurs son mouvement propre. Soit toujours δs le mouvement propre annuel, abstraction faite de tout signe : l'hypothèse de ces auteurs revient à supposer que la distance R est en raison inverse de δs, que l'on a $R=\frac{r}{\delta s}$, r étant la distance moyenne des étoiles, dont le mouvement propre est 1″. Or, s'il est certain, d'un côté, que R croît *généralement* à mesure que δs diminue, il est pareillement certain que R croît *généralement* avec une rapidité moindre que celle de $\frac{1}{\delta s}$; car les causes qui déterminent un mouvement propre lent ou rapide sont au nombre de trois: *distance à la Terre, valeur absolue du mouvement*, et *obliquité du mouvement sur le rayon visuel de l'étoile*. Admettre l'exacte proportionnalité de R à $\frac{1}{\delta s}$, ou de δs à $\frac{1}{R}$, serait donc nier l'existence des deux dernières de ces trois causes. La vérité est donc entre les deux hypothèses de R constant et de R inverse du mouvement propre. Les résultats de cette deuxième hypothèse sont déjà connus par l'important travail de M. Argelander. J'ai dû adopter ici la première hypothèse, afin de parvenir à renfermer les inconnues de la question entre deux limites dont les erreurs soient forcément de signes contraires.

La résolution des équations (17) donne

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= -\ 0'',1969.R,\\ \eta &= -\ 0'',5099.R,\\ \zeta &= +\ 0'',3322.R. \end{aligned}\right.$$

Prenons maintenant pour coordonnées du mouvement solaire sa vitesse $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$, et les coordonnées astronomiques D_0, $Æ_0$ du pôle parallactique; ces coordonnées se déduiront facilement des valeurs de ξ, η, ζ, et l'on aura

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} D_0 &= +31^\circ\,17',\\ Æ_0 &= \ \ 248^\circ\,53',\\ \rho &= 0'',6397.R. \end{aligned}\right.$$

Si l'on ramène les valeurs de D_0, $Æ_0$ à l'époque 1792,5 adoptée par M. Argelander, elles se changent en $+\ 31^\circ\,12'$ et $249^\circ\,14'$.

Les soixante et onze étoiles que j'ai considérées correspondent aux classes I et II de M. Argelander. En prenant la moyenne entre les résultats que chacune de ces deux classes a fournis, et tenant compte du nombre différent d'étoiles dans chacune de ces classes, je trouve que pour ces soixante et onze étoiles fondamentales les résultats des calculs de M. Argelander sont les suivants:

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned} D_0 &= +38^\circ\,50',\\ Æ_0 &= \ \ 257^\circ\,34'. \end{aligned}\right.$$

La position du pôle parallactique de M. Argelander diffère donc de $10^\circ,2$ de celle que lui assignent nos calculs. Cette différence paraîtra sans doute peu importante, si l'on songe à la dissemblance des hypothèses faites par les deux calculateurs sur les valeurs des distances R. Il n'est pas inutile de rappeler à ce sujet que l'inexactitude de l'hypothèse $\delta R = 0$ n'influe pas sur la position du pôle parallactique.

Nous n'avons considéré jusqu'ici que le groupe formé par soixante et onze étoiles et le Soleil; or il est certain qu'à des distances moindres que la plus éloignée de ces étoiles, il en existe un assez grand nombre d'autres, disséminées dans l'espace, et dont le mouvement propre est inférieur à $0'',5$. Il est naturel de les faire entrer en ligne de compte; car il est médiocrement utile de connaître le mouvement du Soleil par rapport au centre de gravité du système de soixante et onze étoiles prises çà et là dans l'espace; mais il importe de déterminer le mouvement de ce centre par rapport au centre d'un groupe naturel stellaire compris dans l'intérieur d'une enceinte sphérique dont le Soleil occupe la partie centrale. Si les distances des étoiles nous étaient connues, il serait facile de combler cette lacune, et d'adjoindre au groupe étudié toutes celles dont la distance à la Terre est inférieure à une limite donnée. Ne pouvant opérer ainsi, tâchons du moins d'apprécier le sens dans lequel sera modifiée la vitesse du Soleil.

Pour cela, différentions les équations (4), en considérant les variations relatives à l'origine fixe; nous aurons

$$(21)\quad \begin{cases} \Delta x = -R\sin\alpha\,\Delta\alpha + \cos\alpha\,\Delta R, \\ \Delta y = -R\sin\beta\,\Delta\beta + \cos\beta\,\Delta R, \\ \Delta z = -R\sin\gamma\,\Delta\gamma + \cos\gamma\,\Delta R. \end{cases}$$

Retranchons des équations (21) les équations (5), en ayant égard aux équations (1) et à l'équation (7); il viendra

$$(22)\quad \begin{cases} \xi = R\sin\alpha\,\delta\alpha - R\sin\alpha\,\Delta\alpha + \cos\alpha\,(\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma), \\ \eta = R\sin\beta\,\delta\beta - R\sin\beta\,\Delta\beta + \cos\beta\,(\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma), \\ \zeta = R\sin\gamma\,\delta\gamma - R\sin\gamma\,\Delta\gamma + \cos\gamma\,(\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma). \end{cases}$$

Multiplions ces équations par m, et étendons-les à toutes les étoiles du groupe, nous aurons, après avoir formé la somme Σ,

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned}&\Sigma(m\sin^2\alpha)\xi - \Sigma(m\cos\alpha\cos\beta)\eta - \Sigma(m\cos\alpha\cos\gamma)\zeta\\ &\qquad = \Sigma(m\mathrm{R}\sin\alpha\,\delta\alpha) - \Sigma(m\mathrm{R}\sin\alpha\,\Delta\alpha),\\ &\Sigma(m\sin^2\beta)\eta - \Sigma(m\cos\alpha\cos\beta)\xi - \Sigma(m\cos\beta\cos\gamma)\zeta\\ &\qquad = \Sigma(m\mathrm{R}\sin\beta\,\delta\beta) - \Sigma(m\mathrm{R}\sin\beta\,\Delta\beta),\\ &\Sigma(m\sin^2\gamma)\zeta - \Sigma(m\cos\alpha\cos\gamma)\xi - \Sigma(m\cos\beta\cos\gamma)\eta\\ &\qquad = \Sigma(m\mathrm{R}\sin\gamma\,\delta\gamma) - \Sigma(m\mathrm{R}\sin\gamma\,\Delta\gamma).\end{aligned}\right.$$

Si l'on nomme U, V, W les angles formés par la tangente à l'arc de mouvement propre sur la sphère à centre fixe, avec les trois axes coordonnés, on aura

$$\Sigma\, m\mathrm{R}\sin\alpha\,\Delta\alpha = -\Sigma(m\mathrm{R}\cos\mathrm{U}\,\Delta s).$$

L'angle U pouvant avoir indifféremment toutes sortes de valeurs, de 0 à 180 degrés, on est conduit à supposer $\Sigma\, m\mathrm{R}\cos\mathrm{U}\Delta s = 0$. On arriverait au même résultat en admettant que les projections des quantités de mouvement perpendiculaires au rayon vecteur s'entre-détruisent sur un axe fixe. On retombe alors sur les équations (10) par une voie bien différente de la première.

L'hypothèse qui conduit à $\Sigma\, m\mathrm{R}\sin\alpha\Delta\alpha = 0$ n'est applicable que dans le cas où la somme Σ comprend en effet toutes les étoiles du groupe, ou du moins un certain nombre d'étoiles *prises entièrement au hasard*. Or, la condition $\delta s > 0'',5$, d'après laquelle ont été choisies nos soixante et onze étoiles, empêchera généralement les divers termes des sommes $\Sigma\, m\mathrm{R}\sin\alpha\Delta\alpha$, $\Sigma\, m\mathrm{R}\sin\beta\Delta\beta$, $\Sigma\, m\mathrm{R}\sin\gamma\Delta\gamma$, de s'entre-détruire.

Pour le démontrer, prenons pour axe des x la droite suivant laquelle se meut le Soleil, et supposons, pour simplifier, que cet axe soit un des axes principaux du système. Les équations (23) deviendront

$$(24)\quad \left\{\begin{aligned}&\Sigma(m\sin^2\alpha)\xi = \Sigma m\mathrm{R}\sin\alpha\,\delta\alpha - \Sigma m\mathrm{R}\sin\alpha\,\Delta\alpha,\\ &\Sigma(m\sin^2\beta)\eta = \Sigma m\mathrm{R}\sin\beta\,\delta\beta - \Sigma m\mathrm{R}\sin\beta\,\Delta\beta = 0,\\ &\Sigma(m\sin^2\gamma)\zeta = \Sigma m\mathrm{R}\sin\gamma\,\delta\gamma - \Sigma m\mathrm{R}\sin\gamma\,\Delta\gamma = 0,\end{aligned}\right.$$

et la première des équations (22) donne, en y faisant $\eta = 0$, $\zeta = 0$, $\xi = \rho$,

$$\delta\alpha - \Delta\alpha = \rho\,\frac{\sin\alpha}{\mathrm{R}}.$$

La quantité $\delta\alpha - \Delta\alpha$ est le *déplacement parallactique* de l'étoile, lequel a lieu suivant un méridien parallactique, c'est-à-dire dans un plan passant par l'axe des x et par l'étoile. Soit σ le déplacement angulaire de l'étoile normalement à ce méridien. Il est clair que l'on aura

$$\delta s^2 = \sigma^2 + \delta\alpha^2 = \sigma^2 + \left(\rho\,\frac{\sin\alpha}{R} + \Delta\alpha\right)^2.$$

La condition $\delta s > 0'',5$ suppose donc que l'on ait

$$\sigma^2 + \rho^2\,\frac{\sin^2\alpha}{R^2} + \Delta\alpha^2 + 2\rho\,\frac{\sin\alpha}{R}\,\Delta\alpha > (0'',5)^2.$$

Deux valeurs égales de $\Delta\alpha$, mais de signes contraires, ne satisferont pas également bien à cette inégalité; si $\Delta\alpha = -\sqrt{\Delta\alpha^2}$ satisfait à l'inégalité, à plus forte raison y sera-t-il satisfait par $\Delta\alpha = +\sqrt{\Delta\alpha^2}$; mais il se peut très-bien que la valeur $+\sqrt{\Delta\alpha^2}$ y satisfasse, et que $-\sqrt{\Delta\alpha^2}$ n'y satisfasse pas. Concluons de là que pour les soixante et onze étoiles déterminées d'après la condition $\delta s > 0'',5$, la valeur de $\Delta\alpha$ est le plus ordinairement positive. Donc le terme $\Sigma m \sin\alpha\Delta\alpha$ est positif, α étant nécessairement compris entre $0°$ et $180°$. Donc la valeur $\xi = \rho$, déterminée d'après la supposition $\Delta\alpha = 0$, est trop forte. Ainsi l'introduction des étoiles à mouvement propre $< 0'',5$ devra diminuer la valeur de la vitesse solaire conclue seulement des étoiles à grand mouvement propre. Si la supposition $\Sigma m R \sin\alpha\Delta\alpha = 0$ est illégitime, il est légitime toutefois de supposer

$$\Sigma(mR\sin\beta\Delta\beta) = 0, \quad \Sigma(mR\sin\gamma\Delta\gamma) = 0.$$

En effet, l'inégalité conclue de $\delta s > 0'',5$ devient, relativement à l'axe des y,

$$\sigma'^2 + \rho^2\,\frac{\cos^2\alpha\cot^2\beta}{R^2} + \Delta\beta^2 - 2\rho\,\frac{\cos\alpha\cot\beta}{R}\,\Delta\beta > (0'',5)^2,$$

et cette dernière inégalité est aussi bien satisfaite par des valeurs positives que par des valeurs négatives de $\Delta\beta$, à cause des changements de signe du facteur $\cos\alpha\cot\beta$. Ainsi, que l'on ait égard ou non à ces termes dans les équations (24), que l'on tienne compte ou non des étoiles pour lesquelles $\delta s < 0'',5$, on aura également $\eta = 0$, $\zeta = 0$; et la position du pôle parallactique restera la même. Toutefois, ce dernier résultat n'est rigoureux que dans le cas où le Soleil parcourt l'un des trois axes principaux du système. Dans le cas général, la position de ce pôle pourra être un peu modifiée.

Convenons maintenant de réserver la notation Σ pour les étoiles à mouvement propre $> 0'',5$ et la notation Σ' pour les étoiles à mouvement moindre. Nous pourrons mettre la première des équations (24) sous la forme

$$(\Sigma m \sin^2\alpha + \Sigma' m \sin^2\alpha)\rho = \Sigma\, m\mathrm{R}\sin\alpha\,\delta\alpha + \Sigma'\, m\mathrm{R}\sin\alpha\,\delta\alpha - (\Sigma m\mathrm{R}\sin\alpha\,\Delta\alpha + \Sigma' m\mathrm{R}\sin\alpha\,\Delta\alpha).$$

La quantité fonction de $\Delta\alpha$ est nulle, puisqu'elle représente la projection sur l'axe des x des quantités de mouvement de tout le groupe; ainsi, en changeant $\sin\alpha\,\delta\alpha$ en $-\cos u\,\delta s$, nous aurons

$$\rho = -\frac{\Sigma m\mathrm{R}\cos u\,\delta s + \Sigma' m\mathrm{R}\cos u\,\delta s}{\Sigma m\sin^2\alpha + \Sigma' m \sin^2\alpha}.$$

Soient N le nombre des étoiles à mouvement propre $> 0'',5$, et N' le nombre inconnu des étoiles à mouvement propre $< 0'',5$; soit $\mathrm{S} = \Sigma\delta s$ la somme des mouvements propres des N premières; soit $\mathrm{S}' = \Sigma'\delta s$ la somme des mouvements propres des N' secondes, le mouvement moyen $\frac{\mathrm{S}'}{\mathrm{N}'}$ de ces N' étoiles étant nécessairement bien inférieur au mouvement moyen $\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}}$ des N autres. On pourra écrire

$$\mathrm{N}' = i\mathrm{N}, \quad \mathrm{S}' = ei\mathrm{S}, \tag{25}$$

e étant un nombre plus petit que 1, et i un autre nombre plus grand ou plus petit que 1. Ceci posé, remarquons qu'avant l'introduction des N' étoiles, on avait

$$\rho = -\frac{\Sigma m\mathrm{R}\cos u\,\delta s}{\Sigma m\sin^2\alpha}$$

L'introduction des étoiles N' augmentera le dénominateur dans le rapport de N à N + N'. Mais dans quel rapport variera le numérateur? Ce rapport dépend évidemment de la loi de possibilité qu'offrent des valeurs de plus en plus grandes de $\Delta\alpha$; si les probabilités diverses des valeurs $\Delta\alpha = \pm 0'',1$, $\Delta\alpha = \pm 0'',2$, $\Delta\alpha = \pm 0'',3, \ldots$ étaient connues, il serait possible de traiter les équations (24) sous ce point de vue.

Mais cette loi est inconnue; en conséquence, je me suis borné à admettre que le numérateur augmente dans le rapport de $S + S'$ à S, ce qui revient à dire que la valeur moyenne du facteur $\cos u$ dans la somme $\Sigma m R \cos u\, \delta s$ reste la même dans la seconde somme Σ', hypothèse qui pourrait à la rigueur ne pas être entièrement conforme à la vérité [*]. D'après cette manière de voir, l'introduction des N' étoiles dans nos calculs introduit dans la valeur de ρ le facteur

$$\frac{1 + \dfrac{S'}{S}}{1 + \dfrac{N}{N'}} = \frac{1 + ei}{1 + i}.$$

On aura donc

$$(26) \qquad \rho = 0'',6397 . R \, \frac{1 + ei}{1 + i}.$$

La quantité $\frac{S}{N}$ est connue et a pour valeur $0'',940$. On aura donc aussi

$$(27) \qquad \rho = 0,6805 . R \, \frac{S + S'}{N + N'}.$$

Ces équations montrent qu'il n'est pas possible de déterminer la vitesse solaire ρ dans l'état actuel de nos connaissances; mais l'on peut cependant comparer cette vitesse inconnue avec la vitesse moyenne pareillement inconnue des étoiles qui nous avoisinent, et déterminer assez exactement le rapport de ces deux vitesses.

---

[*] Voilà la seule objection sérieuse qui me paraisse pouvoir être faite à la détermination du rapport existant entre la vitesse du Soleil et la vitesse moyenne des étoiles. Le seul moyen possible d'éluder cette difficulté sera sans doute de grouper les étoiles, non plus d'après l'intensité de leurs mouvements propres, comme l'ont fait MM. Bessel et Argelander, et comme je l'ai fait pareillement dans ce Mémoire, mais bien d'après l'ordre de leurs grandeurs optiques, indépendamment de la considération de la grandeur du mouvement propre; de réunir dans un premier groupe les étoiles de première et de deuxième grandeur, celles de troisième dans un second groupe, et ainsi de suite. On aura alors

$$e = 1, \quad \frac{S + S'}{N + N'} = \frac{S}{N};$$

et la restitution idéale des étoiles comparativement obscures ne tendra plus alors à modifier la vitesse de translation du Soleil.

Dans ce but, je représenterai par $\Delta\odot$ la moyenne des mouvements propres que paraîtra avoir le Soleil successivement envisagé des divers points de la sphère des étoiles, ou plus simplement de la distance moyenne R à laquelle ces étoiles sont situées. Je représenterai de même par $\delta\star$ le mouvement moyen des étoiles vues du Soleil, et par $\Delta\star$ le même moyen mouvement lorsqu'on considère les étoiles non plus du Soleil mobile, mais de notre origine fixe des coordonnées.

Rapportons le point d'où nous regardons le Soleil à l'équateur parallactique et au pôle parallactique; soit ε la distance de ce point à l'équateur parallactique, mesurée sur un arc de grand cercle normal à cet équateur, et soit E la distance du pied de ce grand cercle à un point fixe de l'équateur parallactique. Le mouvement propre du Soleil vu du point (ε, E) sera égal à $0{,}6805 \cos\varepsilon \frac{S+S'}{N+N'}$.

Le facteur $\cos\varepsilon$ variant avec la position de l'observateur, il faut obtenir sa valeur moyenne; or l'élément différentiel de la surface sphérique est

$$\cos\varepsilon\, d\varepsilon\, dE.$$

On l'obtiendra donc par la formule

$$\frac{\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\varepsilon . \cos\varepsilon\, d\varepsilon\right) dE}{\int_0^{2\pi}\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\varepsilon\, d\varepsilon\right) dE},$$

et l'on trouve

$$\textit{valeur moyenne de } \cos\varepsilon = \tfrac{1}{4}\pi.$$

On aura donc

$$(28) \qquad \Delta\odot = 0{,}5345 \frac{S+S'}{N+N'} = 0{,}5345\, \delta\star.$$

S'il était permis de supposer $\delta\star = \Delta\star$, cette formule résoudrait immédiatement la question proposée.

Pour déterminer le rapport $\frac{\Delta\star}{\delta\star}$, reprenons les équations (22), et nommons λ l'angle formé par la route du Soleil avec le rayon vecteur de l'étoile. En observant que l'on a

$$(29)\qquad \rho\cos\lambda = \xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma,$$

nous trouverons

$$(30)\qquad \begin{cases} \mathrm{R}\sin\alpha\,\Delta\alpha = \mathrm{R}\sin\alpha\,\delta\alpha + \rho\cos\alpha\cos\lambda - \xi, \\ \mathrm{R}\sin\beta\,\Delta\beta = \mathrm{R}\sin\beta\,\delta\beta + \rho\cos\beta\cos\lambda - \eta, \\ \mathrm{R}\sin\gamma\,\Delta\gamma = \mathrm{R}\sin\gamma\,\delta\gamma + \rho\cos\gamma\cos\lambda - \zeta. \end{cases}$$

Formons la somme des carrés de ces trois équations: en tenant compte de la suivante

$$\sin\alpha\cos\alpha\,\delta\alpha + \sin\beta\cos\beta\,\delta\beta + \sin\gamma\cos\gamma\,\delta\gamma = 0,$$

nous trouverons

$$\begin{aligned} \mathrm{R}^2\Delta s^2 &= \mathrm{R}^2\delta s^2 + \rho^2\cos^2\lambda + \rho^2 \\ &- 2\mathrm{R}(\xi\sin\alpha\,\delta\alpha + \eta\sin\beta\,\delta\beta + \zeta\sin\gamma\,\delta\gamma) - 2\rho^2\cos^2\lambda. \end{aligned}$$

Multiplions par m, et étendons cette équation à toutes les étoiles du système; nous trouverons

$$(31)\qquad \begin{cases} \Sigma\, m\mathrm{R}^2\Delta s^2 = \Sigma\, m\mathrm{R}^2\delta s^2 + \rho^2\,\Sigma\, m\sin^2\lambda \\ - 2\left[\xi\,\Sigma\,(m\mathrm{R}\sin\alpha\,\delta\alpha) + \eta\,\Sigma\,(m\mathrm{R}\sin\beta\,\delta\beta) + \zeta\,\Sigma\,(m\mathrm{R}\sin\gamma\,\delta\gamma)\right]. \end{cases}$$

Soit maintenant G le moment d'inertie des étoiles rapportées à la sphère de rayon 1, et relatif à l'axe qui coïncide avec la route du Soleil; on aura, en ayant égard aux équations (10) et à la théorie connue des moments d'inertie,

$$\begin{aligned} &\xi\,\Sigma\,(m\mathrm{R}\sin\alpha\,\delta\alpha) + \eta\,\Sigma\,(m\mathrm{R}\sin\beta\,\delta\beta) + \zeta\,\Sigma\,(m\mathrm{R}\sin\gamma\,\delta\gamma) \\ &= \mathrm{A}\xi^2 + \mathrm{B}\eta^2 + \mathrm{C}\zeta^2 - 2a\eta\zeta - 2b\xi\zeta - 2c\xi\eta = \mathrm{G}\rho^2, \end{aligned}$$

$$\Sigma\, m\sin^2\lambda = \mathrm{G}.$$

Donc on a

$$(32)\qquad \Sigma\,(m\mathrm{R}^2\Delta s^2) = \Sigma\,(m\mathrm{R}^2\delta s^2) - \mathrm{G}\rho^2;$$

$m\mathrm{R}^2\Delta s^2$ est la force vive de l'étoile parallèlement à la sphère fixe, et $m\mathrm{R}^2\delta s^2$ est sa force vive parallèle à la sphère mobile. L'excès de la seconde somme sur la première est donc absolument indépendant de la grandeur et de la direction des mouvements propres; il ne dépend que du mouvement du Soleil et du mode de distribution des étoiles sur la sphère. On est ainsi conduit à ce théorème :

« L'excès de la somme des forces vives des étoiles dues à leurs mou-
» vements propres apparents sur la somme des forces vives des mou-
» vements propres absolus, est une quantité qui reste constante, quelle
» que soit la direction et l'intensité de ces mouvements; cet excès a pour
» mesure le moment d'inertie des étoiles projetées sur la sphère qui a
» pour rayon la vitesse du Soleil, l'axe de ce moment d'inertie étant
» la droite suivant laquelle se meut ce dernier astre. »

Si maintenant dans l'équation (31) on remplace $\rho^2 \sin^2\lambda$ par sa valeur tirée de l'équation (29), c'est-à-dire par

$$\begin{gathered}\xi^2 \sin^2\alpha + \eta^2 \sin^2\beta + \zeta^2 \sin^2\gamma \\ - 2\xi\eta \cos\alpha \cos\beta - 2\xi\zeta \cos\alpha \cos\gamma - 2\eta\zeta \cos\beta \cos\gamma,\end{gathered}$$

si l'on différentie cette équation (31), en y considérant les Δs ou les mouvements propres sur la sphère à centre fixe, comme étant fonction des quantités ξ, η, ζ que l'on supposera variables et indépendantes entre elles, et si de plus l'on pose

$$d[\Sigma(m\mathrm{R}^2\Delta s^2)] = 0,$$

l'on devra égaler séparément à zéro les coefficients différentiels par rapport à ξ, η, ζ, et l'on trouvera

$$\begin{aligned}
&\Sigma m(2\xi \sin^2\alpha - 2\eta \cos\alpha \cos\beta - 2\zeta \cos\alpha \cos\gamma) - 2\,\Sigma m\mathrm{R} \sin\alpha\, \delta\alpha = 0,\\
&\Sigma m(2\eta \sin^2\beta - 2\xi \cos\alpha \cos\beta - 2\zeta \cos\beta \cos\gamma) - 2\,\Sigma m\mathrm{R} \sin\beta\, \delta\beta = 0,\\
&\Sigma m(2\zeta \sin^2\gamma - 2\xi \cos\alpha \cos\gamma - 2\eta \cos\beta \cos\gamma) - 2\,\Sigma m\mathrm{R} \sin\gamma\, \delta\gamma = 0,
\end{aligned}$$

équations qui coïncident parfaitement avec les équations (10). Pour s'assurer si ces équations correspondent à un maximum ou à un minimum de la fonction $\Sigma(m\mathrm{R}^2\Delta s^2)$, formons la différentielle seconde qui aura pour expression

$$2\mathrm{A}(d\xi)^2 + 2\mathrm{B}(d\eta)^2 + 2\mathrm{C}(d\zeta)^2 - 4a\,d\zeta\,d\eta - 4b\,d\xi\,d\zeta - 4c\,d\xi\,d\eta.$$

Cette quantité représente le double produit de $(d\xi)^2+(d\eta)^2+(d\zeta)^2$ par le moment d'inertie de la sphère étoilée de rayon 1 autour d'un axe faisant avec les trois axes coordonnés trois angles dont les cosinus respectifs sont

$$\frac{d\xi}{\sqrt{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}},\qquad \frac{d\eta}{\sqrt{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}},\qquad \frac{d\zeta}{\sqrt{d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2}}.$$

Cette quantité sera donc toujours positive; ainsi « les composantes » ξ, η, ζ jouissent de la propriété remarquable de rendre un *minimum* » la somme des forces vives des étoiles parallèlement à la sphère fixe »; et, réciproquement, on peut déterminer le mouvement du Soleil d'après la condition d'atténuer autant que possible la somme des forces vives apparentes qui s'exercent parallèlement à la surface de la sphère.

Revenons maintenant aux quantités moyennes $\Delta\star$, $\delta\star$; on a d'abord

$$\Delta\star : \delta\star :: \Sigma\Delta s : \Sigma\delta s;$$

d'un autre côté, on doit avoir, à fort peu près,

$$(\Sigma\Delta s)^2 : (\Sigma\delta s)^2 :: \Sigma(m\mathrm{R}^2\Delta s^2) : \Sigma(m\mathrm{R}^2\delta s^2),$$

d'où nous conclurons, en ayant égard à l'équation (32),

$$(33)\qquad \Delta\star = \delta\star\sqrt{1-\frac{\mathrm{G}\rho^2}{\Sigma(m\mathrm{R}^2\delta s^2)}}.$$

Dans le cas particulier qui nous occupe, changeons G en G − G', le moment G se rapportant au groupe Σ, et le moment G' au groupe Σ'. Changeons de même $\Sigma m\mathrm{R}^2\delta s^2$ en $\Sigma m\mathrm{R}^2\delta s^2 + \Sigma' m\mathrm{R}^2\delta s^2$. Supposons R constant, m constant et égal à 1; nous trouverons

$$\mathrm{G} = 41,875,\qquad \Sigma m\mathrm{R}^2\delta s^2 = 110,058\,\mathrm{R}^2\sin^2 1''.$$

Mais puisque l'on a, d'après l'équation (25),

$$\frac{\mathrm{S}'}{\mathrm{N}'} = e\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{N}},\qquad \text{ou}\qquad \frac{\Sigma\delta s'}{\mathrm{N}'} = e\frac{\Sigma\delta s}{\mathrm{N}},$$

les mouvements moyens dans les deux groupes sont entre eux dans le rapport de 1 à e, et les moyennes de leurs carrés seront entre elles à fort peu près :: 1 : e^2. On aura donc

$$\frac{\Sigma'\delta s^2}{\mathrm{N}'} = e^2\frac{\Sigma\delta s^2}{\mathrm{N}},$$

$$\Sigma m\mathrm{R}^2\delta s^2 + \Sigma' m\mathrm{R}^2\delta s^2 = (1+e^2 i)\,110,058\,\mathrm{R}^2\sin^2 1'',$$

et l'on aura aussi, à très-peu près,

$$G + G' = (1 + i)\,41,875.$$

L'équation (26) donne ensuite

$$\rho^2 = (0,6397)^2 \left(\frac{1+ei}{1+i}\right)^2 R^2 \sin^2 1''.$$

Si maintenant nous substituons ces trois valeurs dans le second membre de l'équation (33), la quantité sous le radical deviendra

$$1 - 0,1557 \frac{(1+ei)^2}{(1+i)(1+e^2 i)}.$$

Le facteur $\frac{(1+ei)^2}{(1+i)(1+e^2 i)}$ a un minimum égal à $\frac{4e}{(1+e)^2}$, et correspondant à $i = \frac{1}{e}$; de sorte qu'il est nécessairement compris entre 1 et $\frac{4e}{(1+e)^2}$. Je le supposerai égal à $\frac{1}{2} + \frac{2e}{(1+e)^2}$.

Faisons successivement

$$e = \tfrac{1}{3},\ \tfrac{1}{4},\ \tfrac{1}{5} \quad \text{et} \quad \tfrac{1}{6};$$

nous aurons, à cause de $\frac{S}{N} = 0'',940$,

$$\frac{S'}{N'} = 0'',31, \quad 0'',23, \quad 0'',19, \quad 0'',16.$$

Il n'est guère permis de supposer $\frac{S'}{N'} < 0'',16$; car $\frac{S'}{N'}$ est la moyenne des mouvements propres inférieurs à $0'',5$, et, d'un autre côté, à cause du mouvement propre du Soleil, et des déplacements parallactiques qu'il occasionne, $\delta s = 0$ n'est pas la valeur la plus probable d'un mouvement propre isolé. Notre facteur devient alors égal à 0,87, 0,82, 0,78, 0,74, à un cinquième près de sa valeur, et le radical de l'équation (33) devient lui-même égal à l'un des nombres 0,930, 0,934, 0,937 et 0,940. Si l'on fait abstraction du groupe Σ' des étoiles à mouvements propres inconnus et plus petits que $0'',5$, on supposera $i = 0$, et le même radical est alors égal à 0,919. Ainsi l'introduction de ces étoiles modifie peu ce radical, et l'on peut adopter

$$(34) \qquad \Delta\star = 0,93\,\delta\star.$$

Le rapport $\frac{\Delta\star}{\delta\star}$ pourra donc être considéré comme exact à $\frac{1}{80}$ près de sa valeur. Ainsi, « le mouvement propre du Soleil augmente en » apparence les mouvements propres des étoiles d'un quartorzième de » leur grandeur. »

Si l'on transporte dans l'équation (28) la valeur de $\delta\star$, tirée de l'équation (34), on aura enfin

$$\Delta\odot = 0,56\,\Delta\star. \tag{35}$$

Le même rapport $0,56 : 1$ doit pareillement exister entre la vitesse du Soleil et la vitesse moyenne des étoiles qui l'entourent. Concluons donc que le Soleil est une étoile à faible mouvement propre, et que sa vitesse égale à peine les $\frac{6}{10}$ de la vitesse moyenne des étoiles qui l'environnent.

S'il existe, dans les espaces interstellaires, des astres dépourvus de lumière, et dont la distance à la Terre soit inférieure à celle de quelques-unes de nos étoiles N ou N', nous devons les mentionner théoriquement dans nos formules. Toutefois, si dans les équations (23) on applique l'indice Σ aux seules étoiles lumineuses, ξ, η, ζ continuant à représenter les vraies composantes solaires, on voit qu'il est permis de supposer

$$\Sigma m\mathrm{R}\sin\alpha\,\Delta\alpha = 0,\quad \Sigma m\mathrm{R}\sin\beta\,\Delta\beta = 0,\quad \Sigma m\mathrm{R}\sin\gamma\,\Delta\gamma = 0,$$

dans ces équations, pourvu que l'on admette que l'égale facilité de mouvement en tous sens et la compensation des signes qui en est le résultat se retrouvent et dans le système des astres lumineux et dans le système des astres obscurs considérés chacun isolément, hypothèse qui est d'une haute probabilité. Les équations desquelles se déduisent la vitesse et la direction solaires restent donc les mêmes; ainsi les astres obscurs ne peuvent pas modifier sensiblement les résultats auxquels conduisent les mouvements propres des seuls astres lumineux.

Le résultat obtenu ci-dessus pour la vitesse du Soleil est contraire à celui qu'a obtenu M. Argelander. Je pense toutefois que cette différence peut être expliquée, du moins en grande partie.

M. Argelander partage en trois classes les étoiles à mouvement propre bien avéré. Ses classes I et II correspondent à nos soixante et onze étoiles fondamentales. Il assimile la différence de direction entre le mouvement propre et le mouvement parallactique à une erreur d'observation, et trouve pour la valeur *probable* de cette différence (celle dont la probabilité est $\frac{1}{2}$) un angle d'environ $32^\circ 10'$. Il réduit cet angle à 30°, dans la pensée que les erreurs commises sur la mesure des mouvements propres ont dû tendre à l'augmenter; mais, si je ne me trompe, ces erreurs peuvent agir indifféremment dans les deux sens, et je crois devoir, en conséquence, conserver cet angle de $32^\circ 10'$. Le calcul des probabilités donne entre l'erreur *probable* et l'erreur *moyenne* le rapport connu $0,8453 : 1$. La valeur *moyenne* de l'angle compris entre le mouvement observé et le mouvement parallactique sera donc

$$\frac{32^\circ 10'}{0,8453} = 38^\circ 4'.$$

D'un autre côté, M. Argelander pense que pour les étoiles situées sur l'équateur parallactique, et dont le mouvement de translation égale celui du Soleil, la valeur moyenne de cet angle doit égaler la moitié de l'angle droit ou 45 degrés: sans doute il en sera ainsi si nous ne considérons que la vitesse de translation des étoiles, parallèlement à la surface de la sphère céleste; mais une partie du mouvement total se fait suivant le rayon vecteur. Pour déduire du mouvement moyen de translation des étoiles perpendiculairement au rayon vecteur, leur mouvement moyen dans l'espace, il faut multiplier le premier par la valeur moyenne de la sécante de l'angle formé par la surface de la sphère et par la direction du mouvement absolu. On déterminera ce nombre par un procédé analogue à celui déjà employé pour obtenir la valeur moyenne des cosinus de l'angle ε (page 453), et l'on trouvera pour la valeur moyenne de cette sécante

$$\frac{1}{2}\pi = 1,5708.$$

C'est la vitesse moyenne de translation des étoiles auxquelles correspond la moyenne différence angulaire de 45 degrés entre le mouvement observé et le mouvement parallactique, la vitesse du Soleil étant prise pour unité. Si la vitesse absolue de translation est égale à 1, la différence angulaire sera réduite dans le même rapport, et deviendra égale à $32°29'$. Cet angle est donc inférieur à l'angle $38°4'$ donné par l'observation. La comparaison des tangentes trigonométriques de ces angles donne le rapport $0,81:1$ pour la vitesse du Soleil comparée à celle des étoiles. Ce rapport surpasse encore considérablement le rapport $0,56:1$ que j'ai obtenu : il reste à savoir si cette différence peut s'expliquer complétement par la différence des deux hypothèses adoptées par les deux calculateurs sur la valeur des distances R, M. Argelander ayant supposé $R = \frac{r}{\delta s}$, tandis que j'ai considéré R comme constant. En attendant un nouvel examen de la question, on peut adopter comme probable le rapport simple $\Delta\odot = \frac{6}{10}\Delta\star$.

Les mouvements propres des étoiles du ciel austral, au delà du trentième degré de déclinaison australe, nous sont presque tous inconnus. Cette zone représente le quart du ciel étoilé : c'est une lacune importante à combler; mais il est impossible de prévoir dans quel sens les nouvelles étoiles modifieront l'ancien résultat, à moins que l'on n'admette le pouvoir de concentration d'Herschel, ou une tendance générale de toutes les étoiles du groupe vers le centre de gravité de l'ensemble, c'est-à-dire à peu près vers le Soleil. Pour apprécier l'effet de cette cause, reprenons les équations (16), lesquelles dérivent des équations rigoureuses (8) par la suppression des termes en ΔR. Rétablissons ces termes dans les équations (16), en remplaçant $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ par leurs valeurs tirées des équations (14), les derniers membres des équations (16) se changeront en

$$\begin{aligned}
&R\Sigma(\ \ \cos D\sin Æ\,\delta Æ + \sin D\cos Æ\,\delta D) - \Sigma(\cos D\cos Æ\,\Delta R),\\
&R\Sigma(-\cos D\cos Æ\,\delta Æ + \sin D\sin Æ\,\delta D) - \Sigma(\cos D\sin Æ\,\Delta R),\\
&R\Sigma(-\cos D\,\delta D) - \Sigma(\sin D\,\Delta R),
\end{aligned}$$

et supposons-y tous les ΔR négatifs. Les termes $\Sigma(\cos D\cos Æ\,\Delta R)$ et $\Sigma(\cos D\sin Æ\,\Delta R)$ doivent continuer à s'entre-détruire malgré la suppression des étoiles australes, à cause de l'égale possibilité des valeurs positives et des valeurs négatives des facteurs $\cos Æ$ et $\sin Æ$; ainsi ξ et η ne varient pas. Mais le terme $\Sigma\sin D\,\Delta R$ sera généralement négatif, $\sin D$ étant généralement positif, à cause de la prédominance des étoiles boréales. La restitution des étoiles australes permet seule de supposer

$$\Sigma \sin D\Delta R = 0.$$

Ainsi, en continuant à admettre l'hypothèse de W. Herschel, la troisième des équations (16) ne peut être considérée comme vraie qu'à la condition de comprendre, par la pensée, les étoiles australes dans le groupe général d'étoiles dont le centre de gravité sert de repère fixe pour la détermination de la translation du Soleil. Si l'on excluait ces étoiles australes, et généralement si le Soleil était placé excentriquement dans le système dont il fait partie, la concentration produirait un mouvement du Soleil vers le centre de gravité de l'ensemble, mouvement que l'observation des mouvements apparents serait tout à fait insuffisante pour dévoiler.

J'ai dit ci-dessus d'après quelles hypothèses sur les valeurs de m et de R mes calculs avaient été effectués; je suis loin de regarder ces suppositions comme étant les plus plausibles que l'on puisse faire sur ces quantités. Il est certainement moins invraisemblable d'admettre l'égale densité des corps célestes et leur égalité de pouvoir éclairant sur l'unité de surface, que de supposer m et R constants. En substituant ces nouvelles hypothèses aux anciennes, et nommant l l'intensité lumineuse d'une étoile vue de la Terre, on aura entre les quantités inconnues m, R et la quantité l, que des mesures directes permettent de connaître, la relation

$$m = K\, l^{\frac{3}{2}}\, R^3,$$

K étant un coefficient constant que les masses des étoiles doubles permettraient de mesurer, mais qui, du reste, s'éliminera de lui-même dans les équations (10), de sorte que l'on peut se borner à écrire

$$m = l^{\frac{3}{2}}\, R^3. \tag{36}$$

Nous avons vu que la valeur de R était comprise entre R constant ou $R = r\delta s^0$ et R inverse de δs ou $R = r\delta s^{-1}$. Posons donc

$$R = r\,\delta s^{-n}; \tag{37}$$

l'exposant $n < 1$ devra se conclure de la comparaison d'un certain nombre de quantités R avec les δs correspondants, et le coefficient r continuera à représenter la distance moyenne des étoiles dont le mouvement propre δs égale $1''$. On aura alors

$$(38)\qquad m = l^{\frac{3}{2}}\, r^3\, \delta s^{-3n}, \quad m\mathrm{R} = l^{\frac{5}{2}}\, r^4\, \delta s^{-4n}.$$

Cette dernière formule prouve que l'on ne doit pas supposer n supérieur à $\frac{1}{4}$; sans cela les termes des sommes $\Sigma(m\mathrm{R}\cos u\,\delta s)$, équations (11), deviendraient infinis pour $\delta s = 0$, et les quantités de mouvement des étoiles sans mouvement propre seraient infinies, résultat tout à fait impossible. Provisoirement, on peut admettre comme probable la valeur $n = \frac{1}{5}$. Substituons-la dans les formules (38), et divisons les seconds membres de ces formules par le facteur r^3, qui, conservant la même valeur, disparaîtra de lui-même des équations (10): nous trouverons

$$(39)\qquad m = l^{\frac{3}{2}}\, \delta s^{-\frac{3}{5}}, \quad m\mathrm{R} = r.\, l^{\frac{3}{2}}\, \delta s^{-\frac{4}{5}}.$$

En introduisant ces valeurs dans les équations (10), leur résolution conduira aux équations

$$(40)\qquad \xi = \mathrm{H}.r, \quad \eta = \mathrm{J}.r, \quad \zeta = \mathrm{L}.r,$$

H, J et L étant trois nombres fort petits.

On en conclura la position du pôle parallactique, sans avoir besoin de déterminer r, et la vitesse du Soleil sera donnée par la formule

$$(41)\qquad \rho = \sqrt{\mathrm{H}^2 + \mathrm{J}^2 + \mathrm{L}^2}\,.\, r,$$

et pourra être calculée en myriamètres dès que la distance moyenne r des étoiles, dont le mouvement propre égale $1''$ (b Aigle, η Cassiopée, etc.), sera connue de nous; mais, à cause des remarques faites ci-dessus, remarques que résume l'équation (26), nous n'obtiendrons ainsi qu'une limite supérieure de cette vitesse, à cause du facteur inconnu $\frac{1+ei}{1+i} < 1$, lequel entre dans la valeur définitive de la vitesse ρ.

Dans les étoiles doubles, soit θ le temps de la révolution de la petite étoile autour de la grande, conclu de l'observation et exprimé en années sidérales; soit ω le demi-grand axe en secondes de l'ellipse relative que la petite étoile décrit autour de la grande supposée fixe; m étant la somme des masses des deux étoiles partielles, M la masse du Soleil, on aura

$$(42) \qquad m = \frac{\mathrm{M} \sin^3 \omega}{\theta^2} \mathrm{R}^3.$$

Cette équation donne la masse m si R est connu, et peut dans tous les cas servir à l'élimination de m. Je ferai remarquer que la détermination des valeurs de $\frac{\mathrm{M} \sin^3 \omega}{\theta^2}$ peut nous donner, sur la valeur relative de la distance R, des présomptions qui peuvent guider les astronomes dans leurs recherches sur la parallaxe des étoiles. Puisque l'on a

$$(43) \qquad \frac{\theta^2}{\omega^3} = \left(\mathrm{M} \sin^3 1'' \frac{\mathrm{R}^3}{m}\right),$$

une grande valeur du terme $\frac{\theta^2}{\omega^3}$ indiquera *généralement* une grande valeur de la distance R; je dis généralement, à cause du diviseur variable m qui altère la régularité du rapport $\frac{\theta^2}{\omega^3} : \mathrm{R}^3$. Voici la valeur de $\frac{\theta^2}{\omega^3}$ pour quelques étoiles doubles :

p Ophiuchus	$\frac{\theta^2}{\omega^3}$	$= 81$
α Gémeaux..........		$= 154$
γ Vierge...		$= 162$
ξ grande Ourse.......		$= 305$
η Couronne..........		$= 1113$
σ Couronne..........		$= 1589$

α Gémeaux et p Ophiuchus, étoiles douées d'ailleurs d'un fort mouvement propre, sont donc des étoiles probablement peu éloignées de la Terre. Quoi qu'il en soit, l'équation (42) donnera le moyen d'éliminer la masse m des termes relatifs à ces étoiles doubles.

Étudions maintenant le mouvement du centre de gravité de notre groupe stellaire, par rapport à un système beaucoup plus étendu dont le groupe précédent occuperait la partie centrale, et ferait lui-même partie. Nous pouvons admettre que le centre de gravité du groupe total est immobile, et chercher quel est, par rapport à ce dernier, le mouvement propre du Soleil.

Nous agrandirons alors le rayon de l'enceinte sphérique qui servait de limite à nos soixante et onze étoiles à mouvement propre $> 0'',5$, et nous embrasserons dans la nouvelle enceinte toutes les étoiles dont le mouvement propre surpasse $0'',1$.

Nous pourrions de même reculer encore les bornes de l'enceinte stellaire, et considérer toute la catégorie des étoiles pour lesquelles $\delta s > 0'',05$. Il est difficile, il est vrai, de répondre avec certitude de mouvements propres plus petits que $0'',1$; mais les erreurs commises pourront néanmoins se compenser, à cause du grand nombre d'étoiles qui interviendront, et le mouvement propre du Soleil devra encore en ressortir avec évidence. Enfin, on pourrait considérer toutes les étoiles du catalogue de Bradley, et je regarde comme très-probable que le mouvement du Soleil, que l'on obtiendrait en supposant exactes les différences des catalogues même les plus minimes, serait peu éloigné de la vérité, à cause de la compensation des erreurs et de la tendance qu'ont les causes constantes à ressortir des moyennes d'un très-grand nombre d'observations même médiocrement exactes.

Soient $\xi, \xi', \xi'',\ldots$ les composantes successives du mouvement solaire, parallèlement à l'axe des x, et relativement aux centres de gravité du premier, du deuxième, du troisième, etc., de ces systèmes; soient $\eta, \eta', \eta'',\ldots, \zeta, \zeta', \zeta'',\ldots$ les composantes du même mouvement parallèlement aux deux autres axes. Les quantités $\xi, \xi'-\xi, \xi''-\xi',\ldots$ représenteront donc, la première, la composante de la vitesse du Soleil relativement à la sphère des étoiles $\delta s > 0'',5$; la deuxième, la composante de la vitesse du centre de gravité de cette sphère par rapport à la sphère des étoiles $\delta s > 0'',1$; la troisième, la composante de la vitesse du centre de cette dernière par rapport au groupe $\delta s > 0'',05$, et ainsi de suite jusqu'aux dernières limites des mouvements observables.

Il est fort à croire que les quantités $\xi, \xi'-\xi, \xi''-\xi',\ldots, \eta, \eta'-\eta, \eta''-\eta',\ldots, \zeta, \zeta'-\zeta, \zeta''-\zeta',\ldots$, qui représentent cette suite de mouvements relatifs, vont en diminuant rapidement de grandeur à mesure que nous nous élevons d'une sphère à une autre sphère stellaire plus étendue, et que la rapidité de ce décroissement est au moins aussi grande que celle du décroissement des mouvements propres des étoiles les plus reculées de chaque groupe. Cette décroissance rapide est, en effet, indiquée par les calculs de M. Argelander, et par la comparaison qu'il a établie entre les trois classes d'étoiles pour lesquelles on a successivement

$$\delta s > 1'', \quad \delta s \gtrless {}^{0'',5}_{1'',0}, \quad \delta s \gtrless {}^{0'',1}_{0'',5}.$$

Il résulte en effet de ces calculs, que les quantités $\frac{\xi}{\rho}, \frac{\xi'}{\rho'}, \frac{\xi''}{\rho''},\ldots$ ont à peu près la même valeur; qu'il en est de même des quantités $\frac{\eta}{\rho}, \frac{\eta'}{\rho'}, \frac{\eta''}{\rho''},\ldots$ comparées entre elles, ainsi que des quantités $\frac{\zeta}{\rho}, \frac{\zeta'}{\rho'}, \frac{\zeta''}{\rho''},\ldots, \rho, \rho', \rho''$ étant les vitesses solaires correspondantes; d'où il est naturel d'inférer que l'on a à peu près $\xi = \xi' = \xi'',\ldots,\ \eta = \eta' = \eta'',\ldots,\ \zeta = \zeta' = \zeta'',\ldots,$ $\rho = \rho' = \rho'',\ldots,$ et que les quantités $\sqrt{(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2 + (\zeta' - \zeta)^2}$, $\sqrt{(\xi'' - \xi')^2 + (\eta'' - \eta')^2 + (\zeta'' - \zeta')^2}$ sont d'un ordre de grandeur fort inférieur à la quantité $\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$.

On pouvait s'attendre à priori à ce résultat : les forces accélératrices qui peuvent déplacer le centre de gravité d'un système de corps libres sont nécessairement extérieures à ce système, en vertu du principe général de la *réaction*. Le centre de gravité reçoit ici l'action de ces forces dans une multitude de directions variées, de sorte qu'elles tendent en grande partie à s'entre-détruire, tandis que la masse à mouvoir s'accroît sans cesse à mesure que le nombre des composantes du système devient plus grand. Mais, outre les forces accélératrices, il existe généralement en Mécanique d'autres causes de vitesse : ce sont les impulsions initiales dont l'intensité ne saurait être calculée d'avance. Ces impulsions auraient pu, dès l'origine des temps, donner au groupe des étoiles les plus rapprochées de nous un mouvement commun de translation. Or, c'est là précisément ce que les recherches de M. Argelander semblent tout à fait infirmer, et ce résultat est certainement l'un des plus curieux parmi ceux auxquels il a été conduit.

S'il devient possible un jour de constater par les observations la loi suivant laquelle décroissent les composantes ξ, $\xi'-\xi$, $\xi''-\xi'$,..., η, $\eta'-\eta$, $\eta''-\eta'$,..., ζ, $\zeta'-\zeta$, $\zeta''-\zeta'$,... à mesure que l'enceinte stellaire augmente de diamètre, on pourra supposer ces séries prolongées à l'infini, en faire la somme, et les résultats de ces sommations représenteront les composantes de la vitesse du Soleil par rapport au centre de gravité du monde sidéral. Alors seulement nous connaîtrons le véritable mouvement de translation du Soleil par rapport à l'univers matériel.

Si un groupe restreint d'étoiles, groupe dont le Soleil ferait lui-même partie, se mouvait d'un mouvement commun par rapport au reste de l'univers, on pourrait le reconnaître dans la loi de succession des quantités ξ, $\xi'-\xi$,..., η, $\eta'-\eta$,..., ζ, $\zeta'-\zeta$,..., qui cesserait d'offrir une série décroissante et régulière. Toutes ces recherches se feraient d'ailleurs bien plus sûrement si, au lieu de classer les étoiles d'après la rapidité de leurs mouvements propres apparents, nous parvenions à pouvoir les distribuer d'après le véritable ordre de leur éloignement de la Terre.

Note sur la distribution des étoiles à mouvement propre dans l'espace.

Le résultat de nos calculs assigne aux moments d'inertie A, B, C, et aux sommes de rectangles a, b, c, les valeurs suivantes [voir les équations (10) et (17)],

$$\text{(A)}\qquad \begin{cases} A = 41{,}949, & a = -4{,}299, \\ B = 45{,}149, & b = -1{,}210, \\ C = 54{,}901, & c = +3{,}376. \end{cases}$$

Si les étoiles à grand mouvement propre étaient uniformément distribuées sur la surface de la sphère céleste, en tenant compte de l'absence des étoiles voisines du pôle austral qui tend à rendre le moment C plus grand que A et que B, on devrait avoir

$$\text{(B)}\qquad a = b = c = A - B = 0.$$

L'uniformité de distribution n'existe donc pas, et se manifeste surtout dans la valeur $-4{,}299$ de la quantité a. Sur les soixante et onze termes qui composent la somme

$$\Sigma(\cos D \sin D \sin \text{Æ}) = a,$$

quarante-sept sont négatifs, et seulement vingt-quatre ont une valeur positive; ce qui indique une tendance marquée des facteurs sin D et sin Æ à être de signe contraire; ainsi les étoiles à grand mouvement propre sont *généralement* boréales entre 180 et 360 degrés d'ascension droite, et sont *plus volontiers* australes dans l'autre hémisphère.

Le défaut d'uniformité est-il assez marqué pour faire admettre l'existence d'une cause spéciale qui l'ait produit? Cette question pourrait être complétement résolue, si la lacune que nous offre encore l'hémisphère austral était comblée. Néanmoins l'existence de cette cause est assez probable. L'explication la plus simple qui se présente consiste à admettre que les étoiles à fort mouvement propre sont distribuées de préférence suivant un grand cercle de la sphère. Il reste alors à déterminer les nœuds et l'inclinaison de ce grand cercle.

Pour pouvoir exprimer algébriquement la tendance que peuvent avoir eue nos soixante et onze étoiles à se ranger sur un grand cercle de la sphère, je supposerai que ces étoiles sont distribuées de la manière suivante : une partie représentée par la fraction $\frac{1}{q+1}$ sera distribuée uniformément le long de ce grand cercle, de sorte que la masse de ces étoiles pourra être considérée comme formant un anneau solide de même centre que la sphère, et d'une section transversale infiniment petite; la deuxième partie, représentée par la fraction $\frac{q}{q+1}$, sera répartie à son tour sur la surface de la sphère, et sa masse sera censée y former une couche sphérique infiniment mince. La sphère sera tronquée par le parallèle austral dont la déclinaison, abstraction faite du signe, sera désignée par A. L'anneau pourra être tronqué lui-même, si son inclinaison sur le plan de l'équateur surpasse l'angle A. Il s'agit d'obtenir les moments d'inertie et les sommes de rectangles d'un système ainsi constitué, de les comparer avec les nombres des équations (A), et d'établir, s'il est possible, l'identité entre les nombres calculés et les nombres observés, dont les équations (A) offrent les valeurs, en disposant convenablement des trois paramètres arbitraires, l'inclinaison, le nœud de l'anneau, et le nombre q.

Je ferai remarquer d'abord que, dans un pareil système, la ligne des nœuds de l'anneau doit être l'un des axes principaux, l'axe du plus petit moment d'inertie, puisqu'elle jouit de cette propriété et pour la couche sphérique tronquée et pour l'anneau, que ce dernier soit ou non tronqué lui-même. Ainsi, parmi les trois axes principaux du système fourni par les équations (A), celui du moment minimum doit être couché sur le plan de l'équateur.

Ceci posé, menons par le centre de la sphère un axe qui vienne la couper en un point arbitraire, et soient D′, Æ′, les coordonnées astronomiques de ce point. Les cosinus des angles formés par cet axe avec les trois axes qui correspondent au point équatorial 0^h, au point équatorial de 6^h, et au pôle nord, seront

$$\cos D' \cos Æ', \quad \cos D' \sin Æ', \quad \text{et} \quad \sin D';$$

et, en nommant P le moment d'inertie relatif à cet axe, on aura, par une formule connue,

$$\begin{aligned}P = {} & A\cos^2 D' \cos^2 Æ' + B\cos^2 D' \sin^2 Æ' + C\sin^2 D' \\ & - 2a\cos D' \sin D' \sin Æ' - 2b\cos D' \sin D' \cos Æ' - 2c\cos^2 D' \sin Æ' \cos Æ'.\end{aligned}$$

Cette expression peut être simplifiée par l'introduction des quantités auxiliaires f, g, φ, ψ. Posons, en effet,

$$(\mathrm{C}) \qquad \left\{\begin{aligned} a &= f\cos\varphi, \\ b &= f\sin\varphi, \\ \frac{B-A}{2} &= g\cos\psi, \\ c &= g\sin\psi; \end{aligned}\right.$$

les quantités f, g sont essentiellement positives : φ et ψ peuvent varier de 0 à 360 degrés. Nous trouvons maintenant

$$(\mathrm{D}) \qquad \left\{\begin{aligned} P = C + \cos^2 D' \left[\frac{A+B-2C}{2} - g\cos(2Æ' - \psi)\right] \\ - 2f\sin D' \cos D' \sin(Æ' + \varphi). \end{aligned}\right.$$

Pour obtenir les axes principaux, différentions successivement cette équation par rapport à D' et par rapport à $\text{Æ}'$, et faisons

$$\frac{dP}{dD'} = 0, \qquad \frac{dP}{d\,\text{Æ}'} = 0;$$

nous aurons

$$\text{(E)} \qquad \cot D' - \operatorname{tang} D' = \frac{-\dfrac{A+B-2C}{2} + g\cos(2\text{Æ}' - \psi)}{f\sin(\text{Æ}' + \varphi)},$$

$$\text{(F)} \qquad \operatorname{tang} D' = \frac{g\sin(2\text{Æ}' - \psi)}{f\cos(\text{Æ}' + \varphi)}.$$

En ajoutant ces équations, et posant, pour abréger,

$$\text{(G)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{-A+B-2C}{2} + g\cos(2\varphi + \psi) = h\cos\chi, \\ &g\sin(2\varphi + \psi) = h\sin\chi, \end{aligned} \right.$$

h et χ étant deux nouvelles auxiliaires, on trouvera, toute réduction faite,

$$\cot D' = \frac{h\cos(\text{Æ}' + \varphi - \chi)}{f\sin(\text{Æ}' + \varphi)\cos(\text{Æ}' + \varphi)}.$$

Cette équation étant multipliée par l'équation (F), nous aurons enfin

$$\text{(H)} \qquad \frac{\sin(2\text{Æ}' - \psi)\cos(\text{Æ}' + \varphi - \chi)}{\sin(\text{Æ}' + \varphi)\cos^2(\text{Æ}' + \varphi)} = \frac{f^2}{gh}.$$

Si dans cette équation développée en $\text{Æ}'$, on change $\sin \text{Æ}'$ en $\cos \text{Æ}' \operatorname{tang} \text{Æ}'$, on obtient une équation qui ne renferme plus que $\operatorname{tang} \text{Æ}'$, et qui est du troisième degré. Ce résultat est connu depuis longtemps des géomètres; mais l'équation (H) me paraît préférable dans la pratique à l'équation algébrique du troisième degré, à cause de la facilité avec laquelle elle se prête au calcul logarithmique.

Une fois $\text{Æ}'$ connu, on déterminera D' et P par les équations (F) et (D). Au moyen des équations (H), (F) et (D), j'ai trouvé pour l'axe du moment minimum, les éléments suivants :

$$\begin{aligned} D' &= +\ 12^\circ 56', \\ \text{Æ}' &= 216^\circ 56', \\ P &= 39{,}069. \end{aligned}$$

Cet axe n'étant pas situé dans le plan de l'équateur, notre hypothèse ne saurait représenter parfaitement le cas de la nature. J'ai alors altéré les valeurs de A, B, C, a, b, c, de manière à ramener cet axe dans ce plan. Pour cela, j'observe que la supposition $D' = 0$ dans les équations (E) et (F) exige que l'on ait

$$Æ' = -\varphi + t\,180^\circ,$$
$$Æ' = \frac{\psi}{2} + t'\,180^\circ,$$

t et t' étant des nombres entiers. Or, le calcul des angles φ et ψ prouve que l'on a

$$\frac{\psi}{2} + \varphi = 227^\circ 55' = 180^\circ + 47^\circ 55'.$$

En conséquence, j'ai diminué l'angle φ de $31^\circ 56',7$, et j'ai effectué la même diminution sur ψ; les quantités f, g, $\frac{B+A}{2}$ et C n'éprouvent aucun changement. Je trouve ainsi le nouveau système de valeurs

$$\begin{aligned} A &= 40{,}405, & a &= -4{,}28, \\ B &= 46{,}69, & b &= +1{,}26, \\ C &= 54{,}90, & c &= +3{,}05. \end{aligned}$$

Avec ces éléments, je trouve pour la position de l'axe du moment minimum,

$$D' = 0, \qquad Æ' = 106^\circ 21' \pm 90^\circ.$$

Sans changer l'axe des z, faisons coïncider l'axe des x avec l'axe du moment minimum que nous venons d'obtenir. Les quantités A, B, C, a, b, c deviennent

$$(\mathrm{I}) \qquad \left\{ \begin{aligned} A &= 39{,}81, & a &= +4{,}46, \\ B &= 47{,}285, & b &= 0, \\ C &= 54{,}90, & c &= 0. \end{aligned} \right.$$

Le demi-axe des x positives vient alors aboutir au point $Æ' = 196^\circ 21'$, et le demi-axe des x négatives au point pour lequel $Æ' = 16^\circ 21'$.

Ces deux derniers points donnent donc la position de la ligne des nœuds de l'anneau étoilé sur le plan de l'équateur.

Cherchons maintenant les moments d'inertie

$$\Sigma(y^2 + z^2), \quad \Sigma(x^2 + z^2), \quad \Sigma(x^2 + y^2),$$

et la somme des rectangles Σyz du système mixte formé par l'anneau et la couche sphérique supposés tous les deux tronqués à la hauteur du parallèle austral dont la déclinaison est Λ, et comparons-les aux valeurs A, B, C, a, déduites des équations (I). Dans ce but, je nommerai I l'inclinaison de l'anneau sur l'équateur, $2p$ l'arc tronqué de l'anneau, son rayon étant supposé égal à 1; cet angle $2p$ sera déterminé par la formule

$$\text{(K)} \qquad \cos p = \frac{\sin \Lambda}{\sin \mathrm{I}}.$$

Si I est plus petit que Λ, on devra supposer $p = 0$, et l'anneau n'éprouvera aucune troncature. Faisons maintenant, pour simplifier,

$$\text{(L)} \qquad \begin{cases} \pi - p - \sin p \cos p = \varpi, \\ \pi - p + \sin p \cos p = \Pi. \end{cases}$$

Posons ensuite $\Lambda = 30$ degrés, ce qui diffère peu de la vérité; nous trouverons que le résultat de la comparaison entre les moments calculés et les moments observés peut se résumer par les formules

$$\text{(M)} \qquad \frac{\varpi + \frac{15}{16}\pi q}{\mathrm{A}} = \frac{\Pi + \varpi \sin^2 \mathrm{I} + \frac{15}{16}\pi q}{\mathrm{B}} = \frac{\Pi + \varpi \cos^2 \mathrm{I} + \frac{9}{8}\pi q}{\mathrm{C}} = \frac{\varpi \sin \mathrm{I} \cos \mathrm{I}}{a}.$$

Dans ces équations, les termes contenant le facteur q proviennent de la couche sphérique tronquée; les termes qui ne contiennent pas ce facteur proviennent, au contraire, de l'intégration des moments de l'anneau. Si l'on voulait conserver à la quantité Λ une valeur indéterminée, il faudrait dans ces formules remplacer

$$\tfrac{15}{16}\pi q \quad \text{par} \quad \tfrac{1}{6}(4 + 3\sin\Lambda + \sin^3\Lambda)q,$$

et

$$\tfrac{9}{8}\pi q \quad \text{par} \quad \tfrac{1}{6}(4 + 6\sin\Lambda - 2\sin^3\Lambda)q.$$

Le dernier membre des équations (M) prouve que I est plus petit que 90 degrés, a étant une quantité positive. Ainsi, l'anneau étant censé parcouru par un astre à mouvement *direct*, on aurait pour ses nœuds

$$☊ = 196^\circ 21', \quad ☋ = 16^\circ 21'.$$

L'élimination de q entre les équations (M) les change en

$$\frac{2\Pi - \varpi - \varpi \cos 2I}{B - A} = \frac{2\Pi + \varpi - 11\varpi \cos 2I}{6B - 5C} = \frac{\varpi \sin 2I}{a} > \frac{2\varpi}{A},$$

l'inégalité qui termine ces équations étant destinée à exprimer que la quantité éliminée est nécessairement positive.

La valeur $I = 39$ degrés satisfait à fort peu près à ces équations, et les représente sans erreur, si l'on applique à A, B, C, a les corrections $-0,12$, $+0,12$, $-0,09$ et $-0,10$: on trouve ensuite facilement $q = 2,35$.

Ainsi on parviendra à représenter la distribution des étoiles à mouvement propre supérieur à $0'',5$, et à reproduire approximativement la position des axes principaux et la valeur des moments principaux du système, en prenant un nombre arbitraire d'étoiles, mille par exemple, en en répartissant sept cent une uniformément sur l'intégralité de la surface de la sphère, et les deux cent quatre-vingt-dix-neuf autres sur la circonférence d'un grand cercle, dont le pôle boréal sera situé par 51 degrés de déclinaison et 106 degrés d'ascension droite, enfin en tronquant la sphère étoilée, ainsi que l'anneau à la hauteur du 30ème degré de déclinaison australe.

Le grand cercle auprès duquel paraissent prédominer les forts mouvements propres offre cela de remarquable, qu'il n'est incliné que de 20 degrés sur cet autre grand cercle que M. Mædler a nommé l'*équateur stellaire* (1), et qui représente la position dominante des plans des orbites elliptiques des étoiles doubles; en outre, il passe fort près du point de la sphère vers lequel s'avance le système solaire; des rapprochements de ce genre pourront un jour ne pas être sans importance dans l'étude cosmogonique de notre univers.

(*) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome VI, page 920.

S'il reste encore des doutes sur l'existence d'une cause spéciale qui ait présidé à l'arrangement dans l'espace des étoiles à mouvements rapides, la connaissance complète des mouvements propres du ciel austral pourra seule les dissiper. La détermination du grand cercle près duquel les mouvements rapides prédominent, et celle de ses pôles que l'on pourrait, par contraste, désigner sous le nom de *points de repos*, se feront sans difficulté, la ligne qui joint ces deux points devant coïncider avec l'axe d'inertie auquel correspond le moment maximum de la sphère des étoiles à mouvements propres. Si l'on mesure alors la distance moyenne angulaire des étoiles aux pôles de ce grand cercle, en la comparant avec la distance moyenne $57^\circ 18'$ qui correspond au cas de la distribution uniforme, on aura, par des méthodes connues, la probabilité de l'existence d'une cause spéciale qui ait produit l'arrangement observé, et il sera convenable alors de rechercher quelle a pu être la nature de cette cause.

Le tableau suivant contient, pour chacune de nos soixante et onze étoiles rangées par ordre d'ascension droite, la valeur des trois composantes du mouvement propre parallèles aux trois axes coordonnés, ou, ce qui revient au même, perpendiculaires aux trois plans du colure des solstices, du colure des équinoxes, et de l'équateur. Ces mouvements sont relatifs à l'année 1755, époque du catalogue de Bradley, donné par Bessel dans ses *Fundamenta Astronomiæ.* La première colonne contient les termes $\sin\alpha\,\delta\alpha = -\cos u\,\delta s$; la deuxième colonne renferme les termes $\sin\beta\,\delta\beta = -\cos v\,\delta s$, et dans la troisième sont inscrits les termes $\sin\gamma\,\delta\gamma = -\cos w\,\delta s$.

NOMS DES ÉTOILES.	MOUVEMENT PROPRE ANNUEL, PERPENDICULAIRE AU PLAN du colure des solstices.	du colure des équinoxes.	de l'équateur.	NOMS DES ÉTOILES.	MOUVEMENT PROPRE ANNUEL, PERPENDICULAIRE AU PLAN du colure des solstices.	du colure des équinoxes.	de l'équateur.
54 Poissons...	−0″,150	+0″,449	+0″,267	42 Bérénice...	+0″,073	−0″,463	−0″,132
η Cassiopée..	−0,237	−1,056	+0,260	43 Bérénice...	−0,208	−1,013	−0,835
μ Cassiopée...	−0,421	−3,568	+0,891	61 Vierge.....	+0,020	−1,117	+0,971
29 Baleine....	+0,027	−0,135	+0,469	70 Vierge.....	+0,197	−0,157	+0,500
107 Poissons..	−0,299	+0,225	+0,554	τ Bouvier.....	+0,189	−0,494	−0,082
τ Baleine.....	−0,930	+1,483	−0,876	θ Centaure....	−0,164	−0,500	+0,540
66 Baleine...	+0,370	−0,545	+0,040	Arcturus......	+1,167	−0,623	+1,813
δ Triangle....	+0,428	−0,981	+0,201	θ Bouvier.....	+0,476	−0,076	+0,265
12 Éridan.....	+0,051	−0,541	−0,606	44 Bouvier....	+0,371	−0,404	−0,012
ε Éridan......	−0,738	+0,624	+0,055	5 Serpent.....	+0,032	+0,005	+0,533
10 Taureau...	−0,129	+0,109	+0,473	χ Hercule	−0,496	−0,190	−0,464
δ Éridan	−0,117	−0,104	−0,773	γ Serpent.....	−0,106	+0,486	+1,166
27 Éridan.....	+0,040	+0,242	+0,493	ζ Hercule.....	+0,325	−0,432	−0,444
d Éridan	−1,692	+1,481	+3,360	ε Scorpion....	+0,471	−0,371	+0,258
1 Orion	+0,583	−0,225	+0,022	A Ophiuchus..	+0,250	−0,558	+0,965
m Taureau....	+0,828	−0,217	−0,065	*u* Hercule.....	+0,030	+0,523	+0,803
λ Cocher......	+0,331	−0,514	+0,496	μ Hercule	+0,481	+0,289	+0,634
γ Lièvre......	−0,331	+0,184	+0,351	*p* Ophiuchus..	−0,233	+0,058	+1,121
δ Lièvre......	+0,235	+0,216	+0,614	η Serpent.....	+0,604	−0,008	+0,601
Sirius........	−0,531	+0,262	+1,149	χ Dragon.....	−0,516	+0,271	+0,102
Procyon	−0,576	−0,335	+0,977	*b* Aigle.......	−0,620	−0,360	−0,730
β Gémeaux...	−0,596	−0,278	+0,051	3 Cygne......	+0,125	+0,310	+0,554
ι grande Ourse.	−0,208	−0,470	+0,192	σ Dragon	−1,062	+1,401	+0,646
π Cancer......	−0,423	−0,277	−0,352	α Aigle.......	−0,482	−0,294	−0,451
θ grande Ourse.	−0,272	−1,067	+0,368	δ Flèche......	+0,476	+0,225	+0,217
11 petit Lion..	−0,378	−0,673	+0,187	1 *b* Cygne.....	+0,260	+0,355	+0,258
20 petit Lion..	−0,138	−0,631	+0,354	ε Cygne......	−0,110	−0,393	−0,361
20 Sextant....	−0,292	−0,538	−0,112	η Céphée.....	+0,463	−0,541	−0,397
α Coupe......	−0,118	−0,509	−0,147	61 Cygne.....	−1,528	−4,180	−2,531
ξ grande Ourse.	+0,208	−0,569	+0,520	τ Cygne......	+0,182	−0,327	−0,474
83 Lion	−0,184	−0,817	−0,250	σ Pégase......	−0,160	−0,496	−0,128
β Vierge......	+0,086	+0,727	+0,277	γ Poissons....	−0,176	−0,714	−0,027
8 Lévriers	−0,159	−0,734	−0,248	ι Poissons	−0,093	−0,430	+0,414
γ Vierge......	+0,066	−0,511	+0,018	85 Pégase.....	−0,506	−0,748	+0,974
10 Lévriers...	−0,040	−0,573	−0,143	β Cassiopée...	−0,188	−0,452	+0,011
33 Vierge.....	+0,038	+0,345	+0,458				

Le signe + indique une direction du point équatorial 0 heure au point équatorial 12 heures..... Premières colonnes.
du point équatorial 6 heures au point équatorial 18 heures.... Deuxièmes colonnes.
du nord au sud.. Troisièmes colonnes.

Tableau général des notations employées dans le Mémoire précédent.

a, b, c, sommes de rectangles de cosinus [*voir* équations (9)].
e, nombre plus petit que 1 [*voir* équation (25)].
f, g, h, quantités auxiliaires de l'ordre des moments d'inertie [*voir* équations (C) et (G)].
i, rapport numérique [*voir* équation (25)].
l, intensité de la lumière d'une étoile.
m, m', masses des étoiles.
p, moitié de l'angle de troncature d'un anneau.
q, rapport numérique dépendant de la distribution des étoiles doubles.
r, distance moyenne à la Terre des étoiles dont le mouvement propre est égal à 1''.
s, δs, Δs, arcs de mouvements propres.
δs, mouvement propre angulaire *apparent*.
Δs, mouvement propre angulaire *absolu*.
t, t', nombres entiers arbitraires, positifs ou négatifs.
u, v, w, angles formés par l'arc de mouvement propre apparent avec les trois demi-axes des coordonnées positives.
x, y, z, coordonnées d'une étoile.
A, B, C, sommes de carrés de sinus, moments d'inertie [*voir* équations (9)].
Æ, ascension droite d'une étoile.
D, déclinaison d'une étoile.
$Æ_0$, D_0, ascension droite et déclinaison du pôle parallactique.
E, longitude, ou ascension droite, comptée sur l'équateur parallactique.
G, moment d'inertie autour de l'axe suivant lequel se meut le Soleil.
H, J, L, petits nombres servant à mesurer les composantes de la vitesse solaire [*voir* équations (40)].
I, inclinaison du plan d'un anneau sur l'équateur.
K, coefficient constant de l'ordre des masses.
M, masse du Soleil.
N, N', nombres indiquant le nombre d'étoiles d'un groupe stellaire.
P, moment d'inertie autour d'un axe quelconque.
R, distance d'une étoile à la Terre.
S, S', sommes de mouvements propres.
U, V, W, angles formés par l'arc de mouvement propre absolu avec les trois demi-axes des coordonnées positives.
α, β, γ, angles formés par le rayon vecteur d'une étoile avec les trois demi-axes des coordonnées positives.
ε, latitude ou déclinaison comptée par rapport au pôle parallactique et à l'équateur parallactique.
θ, temps de la révolution de deux étoiles d'un système binaire, l'une autour de l'autre.
λ, angle d'un rayon visuel stellaire avec la route du Soleil.
ϖ, Π, auxiliaires [*voir* les équations (L)].

ρ, vitesse du Soleil.

σ, composante du mouvement propre, perpendiculairement au plan passant par l'axe des x et par l'étoile.

σ', composante perpendiculaire au plan passant par l'axe des y et par l'étoile.

ξ, η, ζ, composantes de la vitesse solaire.

φ, χ, ψ, angles auxiliaires [*voir* les équations (C) et (G)].

ω, demi-grand axe en secondes de l'orbite relative de deux étoiles d'un système binaire.

Λ, déclinaison du parallèle austral qui limite les étoiles à mouvements propres connus.

δ indique les variations par rapport à la sphère héliocentrique mobile.

Δ indique les variations par rapport à la sphère héliocentrique fixe.

Σ, Σ' indiquent les sommes des termes fournis par chaque étoile du groupe.

SUPPLÉMENT.

Après avoir donné, dans le précédent Mémoire, les formules fondamentales qui doivent servir à déterminer le mouvement de translation du Soleil, j'ai ajouté que le problème restait encore indéterminé, au moins dans de certaines limites, à cause de l'ignorance où nous sommes au sujet des masses et des distances des étoiles qui nous environnent. Le seul moyen que nous possédions, en cet état, pour arriver à une solution au moins approchée de la question, est de faire différentes hypothèses sur ces éléments, et de combiner de diverses manières les étoiles auxquelles nous devrons comparer le mouvement du Soleil.

Une première méthode consiste à grouper ensemble les étoiles à grand mouvement propre sans tenir compte de l'éclat de leur lumière; c'est celle qui en général a été suivie jusqu'ici, et notamment par M. Argelander, qui a traité avec beaucoup de soin cette question. On peut alors, ou bien supposer que toutes les distances des étoiles à la Terre sont égales, ou bien faire varier cet élément en raison même de la grandeur du mouvement propre observé, et suivant une certaine loi conventionnelle fondée sur des considérations à priori. On obtient ainsi pour les éléments de la translation solaire, selon que l'on adopte l'une ou l'autre de ces deux hypothèses, deux systèmes divers de valeurs qui, comme je l'ai montré dans le Mémoire précédent, diffèrent assez peu l'un de l'autre.

Dans la seconde méthode, au contraire, la considération de la grandeur du mouvement propre de l'étoile est sacrifiée à celle de son éclat:

on associe les étoiles d'après l'ordre de leur grandeur optique, et l'on conçoit que celles de la première grandeur soient les plus proches de nous, que celles de seconde viennent après dans l'ordre des distances, et ainsi de suite. En comparant le Soleil au groupe artificiel ainsi formé, on en déduit pareillement les circonstances de son mouvement propre, et il importe beaucoup de savoir si les résultats ainsi obtenus coïncident, au moins approximativement, avec ceux que fournit la méthode précédente. Si cette coïncidence existe, la chance de vérité de la solution en est singulièrement augmentée. On pourrait concevoir en effet que l'apparence de mouvement du Soleil vers la constellation d'Hercule, qui ressort de l'examen des étoiles à grand mouvement propre, est due principalement à quelques étoiles de faible éclat, peut-être peu importantes dans le système du monde, et qui ne se distinguent que par cette singularité curieuse d'un déplacement rapide sur le ciel. On sait en effet que ce ne sont pas les étoiles les plus brillantes qui occupent le premier rang sous ce dernier point de vue : 61 du Cygne, μ Cassiopée, d Éridan, etc., dont le mouvement est si rapide, sont seulement de quatrième à cinquième grandeur, et l'on peut s'attendre d'avance à ce que leur introduction dans le groupe circumsolaire, ou leur élimination de ce groupe, altérera puissamment le résultat du calcul.

Or, l'expérience faite prouve le contraire, et la considération du système des étoiles brillantes mène aux mêmes conséquences que celle du système des étoiles à mouvements rapides, quoique les deux groupes artificiels ainsi formés soient composés d'étoiles fort différentes, à tel point que, si l'on compare la liste des soixante et onze étoiles du précédent Mémoire avec celle des soixante-deux étoiles les plus brillantes, que l'on trouvera à la fin de ce Supplément, on trouve que sept seulement figurent à la fois sur l'une et sur l'autre de ces deux listes.

Dans le travail actuel, j'ai pris seulement en considération les étoiles de première et de seconde grandeur situées au nord du vingt-sixième parallèle de déclinaison australe : elles sont au nombre de soixante-deux. Je me suis servi, pour la détermination des mouvements propres, du catalogue Bradley-Bessel (*Fundamenta Astronomiæ*) pour l'année 1755, et du catalogue récent de cinq cent soixante étoiles pour l'année 1830, publié par M. le professeur Argelander. Lorsque ce catalogue m'a fait défaut, j'y ai suppléé par le second catalogue de Piazzi : j'ai alors introduit dans les catalogues de Bradley et de Piazzi les corrections constantes des ascensions droites qui ont été ultérieurement reconnues nécessaires, c'est-à-dire que j'ai ajouté $1''$ à celles de Piazzi, retranché $0'',5$ de celles de Bradley, et adopté les nouveaux coefficients de précession que M. Bessel a fait connaître dans le n° 92 des *Nouvelles astronomiques*. J'ai pu ainsi calculer les mouvements propres qui ne m'étaient pas fournis directement par le catalogue de M. Argelander.

Ceci posé, je pars des équations démontrées dans mon précédent Mémoire,

$$\begin{aligned} A\xi - c\eta - b\zeta &= M,\\ B\eta - c\xi - a\zeta &= N,\\ C\zeta - b\xi - a\eta &= P, \end{aligned}$$

dans lesquelles ξ, η, ζ représentent les trois composantes de la vitesse annuelle du Soleil, parallèlement aux trois demi-axes coordonnés menés du centre de la sphère au premier point du Bélier, au premier point de l'heure III sur l'équateur, et au pôle boréal de ce dernier. Les coefficients A, B, C, a, b, c sont donnés par les formules

$$\begin{aligned} A &= \Sigma m(1 - \cos^2 D \cos^2 Æ), & a &= \Sigma m \cos D \sin D \sin Æ,\\ B &= \Sigma m(1 - \cos^2 D \sin^2 Æ), & b &= \Sigma m \cos D \sin D \cos Æ,\\ C &= \Sigma m \cos^2 D, & c &= \Sigma m \cos^2 D \sin Æ \cos Æ. \end{aligned}$$

où m, D et Æ représentent pour chaque étoile sa masse, sa déclinaison et son ascension droite, la somme Σ s'étendant à toutes les étoiles du groupe considéré. Les seconds membres M, N, P se déterminent par les équations

$$\begin{aligned} M &= \Sigma m R(\cos D \sin Æ\,\delta Æ + \sin D \cos Æ\,\delta D),\\ N &= \Sigma m R(-\cos D \cos Æ\,\delta Æ + \sin D \sin Æ\,\delta D),\\ P &= \Sigma m R(-\cos D\,\delta D); \end{aligned}$$

R est la distance de l'étoile au Soleil, $\delta Æ$ son changement propre annuel en ascension droite, δD son changement propre annuel en déclinaison.

J'ai considéré la masse m et la distance R comme constantes pour toutes les étoiles du groupe que j'ai embrassé, et supposant de plus m égal à 1, j'ai été conduit aux trois équations

$$\begin{aligned} 41,299\,\xi - 3,858\,\eta + 0,155\,\zeta &= -1'',506\,R,\\ 36,393\,\eta - 3,858\,\xi - 0,539\,\zeta &= -4'',630\,R,\\ 46,307\,\zeta + 0,155\,\xi - 0,539\,\eta &= +5'',042\,R. \end{aligned}$$

La résolution de ces équations donne

$$\xi = -\ 0'',0491\,R,$$
$$\eta = -\ 0'',1308\,R,$$
$$\zeta = +\ 0'',1102\,R.$$

Nommons maintenant D_0 et $Æ_0$ la déclinaison et l'ascension droite du pôle parallactique, c'est-à-dire du point de la sphère vers lequel tend la marche du Soleil; nommons ρ la vitesse linéaire de cet astre; on trouve facilement, pour l'année 1792,5,

$$D_0 = +38^\circ\,16',5,$$
$$Æ_0 = 249^\circ\,25',5,$$
$$\rho = 0'',1780\,R.$$

La position de ce point diffère peu des anciennes positions obtenues; c'est toujours dans la constellation d'Hercule qu'il se trouve renfermé : cette fois il tombe à petite distance de η Hercule. Le coefficient 0",178 prouve qu'à la moyenne distance des étoiles de première et de seconde grandeurs, le Soleil, vu normalement à la trajectoire qu'il décrit, doit paraître se mouvoir annuellement d'une quantité angulaire égale à 0",178.

Ce résultat s'accorde avec celui que M. Othon Struve, le fils du célèbre astronome de ce nom, vient d'obtenir dans un travail récent et fort étendu sur cette même question. Au lieu de se borner comme moi aux étoiles des deux premières grandeurs, M. Struve en a pris, il est vrai, un nombre beaucoup plus considérable (quatre cents), de sorte que ses résultats et les miens ne sont pas rigoureusement comparables; mais nous savons déjà, par les recherches de M. Argelander, que, passé une certaine limite numérique, par exemple trente à quarante, le nombre plus ou moins grand des étoiles qui composent le système circumsolaire auquel on s'arrête influe peu sur la direction obtenue pour le mouvement cherché. M. Struve et moi avons donc dû arriver, à peu de chose près, à des résultats identiques.

Nommons R_1 la distance moyenne des étoiles de première grandeur, R_2 celle des étoiles de seconde grandeur, et admettons, avec M. Struve, que l'on ait

$$R_2 = 1,71\,R_1;$$

soit toujours R la distance moyenne pour le groupe des soixante-deux étoiles que j'ai considérées, et qui se compose de treize étoiles de première et de quarante-neuf étoiles de seconde grandeur, on aura

$$R = \frac{49 R_2 + 13 R_1}{62};$$

cette valeur et celle de R_2, substituées dans l'équation en ρ, donneront

$$\rho = 0'',278\, R_1.$$

M. Struve trouve

$$\rho = 0'',339\, R_1.$$

La différence est de l'ordre de celles auxquelles on pouvait s'attendre, et si l'on adopte pour ρ la valeur

$$\rho = 0'',31\, R_1,$$

intermédiaire entre les deux précédentes, l'erreur $0'',029$ surpassera à peine l'erreur probable $0'',025$, que M. Struve assigne lui-même à sa détermination.

Je passe à l'examen du rapport de grandeur entre le mouvement propre du Soleil et le mouvement propre moyen des principales étoiles qui l'entourent. Pour cela, je nomme δs le mouvement propre observé, et Δs le mouvement propre réel, c'est-à-dire tel qu'il serait vu du Soleil fixe : j'ai démontré, dans mon précédent Mémoire, que l'on avait

$$\Sigma m R^2 \Delta s^2 = \Sigma m R^2 \delta s^2 - G\rho^2,$$

G représentant le moment d'inertie des étoiles supposées placées à la distance 1, et pris autour de l'axe qui se confond avec la trajectoire solaire. Ce nombre G est lié aux quantités A, B, C, a, b, c, D_0, $Æ_0$, par la relation suivante,

$$G = C + \cos^2 D_0 \left[\frac{A + B - 2C}{2} - g\cos(2Æ_0 - \psi)\right]$$
$$- 2f \sin D_0 \cos D_0 \sin(Æ_0 + \varphi).$$

Dans cette équation, f, g, φ, ψ sont des auxiliaires qui se déduisent préalablement des équations

$$f\cos\varphi = a, \quad g\cos\psi = \frac{B-A}{2},$$
$$f\sin\varphi = b, \quad g\sin\psi = c.$$

On trouve, tout calcul fait, dans le cas présent,

$$G = 39{,}444.$$

Le calcul de $\Sigma m R^2 \delta s^2$ n'offre aucune difficulté, et donne

$$\Sigma m R^2 \delta s^2 = 11{,}2238\, R^2 \sin^2 1'',$$

et l'on trouve enfin

$$\Sigma m R^2 \Delta s^2 = 9{,}9746\, R^2 \sin^2 1'';$$

de telle sorte que le mouvement propre du Soleil augmente, mais en apparence seulement, la somme des forces vives stellaires dans le rapport de 8 à 9.

Ceci nous permettra de déterminer avec un degré suffisant d'exactitude le rapport $\frac{\Sigma \Delta s}{\Sigma \delta s}$. Lorsque l'on a deux séries parallèles de termes positifs,

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots, \qquad \alpha',\ \beta',\ \gamma',\ldots,$$

termes que l'on peut concevoir rangés entre eux par ordre de valeur décroissante, on a aussi, à fort peu près,

$$\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\ldots}{\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2\ldots} = \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma\ldots}{\alpha'+\beta'+\gamma'\ldots}\right)^2,$$

si le nombre de ces termes est considérable, et si les rapports binaires $\frac{\alpha}{\alpha'}, \frac{\beta}{\beta'}, \frac{\gamma}{\gamma'},\ldots$ ne s'éloignent pas beaucoup d'être égaux entre eux; cette proposition n'est d'ailleurs vraie d'une manière générale que dans le cas où l'on aurait rigoureusement

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\beta}{\beta'} = \frac{\gamma}{\gamma'},\ldots.$$

Nous aurons donc, dans le cas présent,

$$\frac{\Sigma \Delta s}{\Sigma \delta s} = \sqrt{\frac{9,9746}{11,2238}} = 0,9427.$$

Or, le calcul direct de $\Sigma \delta s$ donne

$$\Sigma \delta s = 14'',515;$$

donc aussi,

$$\Sigma \Delta s = 13'',683;$$

d'où l'on déduit enfin

$$\Delta ☆ = \frac{13'',683}{62} = 0'',2207,$$

en représentant par $\Delta ☆$ le mouvement propre *moyen* des étoiles, vu du Soleil en repos. Il s'agit ici du seul mouvement parallèle à la surface héliocentrique; l'autre composante du mouvement absolu d'une étoile, celle dirigée suivant le rayon vecteur héliocentrique, échappe totalement à nos observations. Il faut donc, pour obtenir le mouvement total, multiplier $\Delta ☆$ par un facteur k plus grand que l'unité. Mais quelle est la valeur de ce facteur? Pour la déterminer, on peut employer les considérations suivantes. Décomposons l'un quelconque des mouvements propres Δs en deux composantes perpendiculaires au rayon visuel et égales entre elles; chacune d'elles aura pour valeur $\frac{\Delta s}{\sqrt{2}}$; la troisième, normale aux deux autres, peut être indifféremment plus grande ou plus petite; nous la supposerons égale à $\frac{\Delta s}{\sqrt{2}}$, et la résultante générale devient alors

$$\frac{\Delta s}{\sqrt{2}} \sqrt{3} = \Delta s \sqrt{1,5}.$$

Le facteur cherché sera donc $k = 1,225$. Par d'autres considérations, on trouverait $k = 1,27$. On voit qu'il reste de l'arbitraire dans cette détermination; mais en adoptant $k = 1,25$, on s'écartera peu de la vérité. Donc, pour la moyenne vitesse angulaire des étoiles observées suivant les normales à leurs trajectoires, et à une distance moyenne R, on aura, en nommant $\overline{\Delta ☆}$ cette vitesse moyenne,

$$\overline{\Delta ☆} = 0'',276.$$

Nommons de même $\overline{\Delta\odot}$ la vitesse angulaire du Soleil observé à une distance R et suivant un rayon visuel normal à sa route ; nous aurons

$$\overline{\Delta\odot} = \frac{\rho}{R} = 0'',178;$$

donc enfin,

$$\overline{\Delta\star} : \overline{\Delta\odot} :: 0'',276 : 0'',178 :: 1,55 : 1.$$

Il est digne de remarque que ce rapport diffère à peine du nombre que j'avais obtenu dans le Mémoire précédent, en introduisant les seules étoiles à grands mouvements propres dans le calcul de la marche du Soleil.

M. O. Struve a trouvé pour le rapport $\Delta\star : \Delta\odot$ un nombre plus grand encore, puisque, selon lui, ce rapport égalerait 2,4. Ne connaissant de son Mémoire que la courte analyse donnée dans le n° 485 des *Nouvelles astronomiques,* il m'est difficile de pouvoir dire d'où peut provenir une telle différence, si elle résulte de la diversité de nos modes de groupement des étoiles, ou si elle ne dériverait pas plutôt, soit de quelque erreur de calcul commise par l'un de nous, soit des méthodes ou hypothèses différentes que nous avons adoptées. On doit aussi se rappeler que M. Argelander avait conclu de ses recherches que ce rapport était au contraire plus faible que l'unité. Ces divergences dans la détermination de cet élément prouvent combien cette partie de la question est délicate ; elles doivent, ce me semble, attirer sur ce point l'attention des calculateurs.

Quant aux résultats relatifs à *la direction* du mouvement solaire, ils peuvent être considérés comme concordants. Je réunis ici les cinq systèmes de valeurs que l'on a déduits, pour l'an 1800, de la considération d'un nombre un peu grand d'étoiles circumsolaires.

	ARGELANDER, par 71 ★ à mouvement propre > 0'',5.	ARGELANDER, par 390 ★ à mouvement propre > 0'',1.	BRAVAIS, par 71 ★ à mouvement propre > 0'',5.	O. STRUVE, par 400 ★ principales.	BRAVAIS, par 62 ★ de 1re et de 2e gr.
D_0	+ 38° 49′	+ 28° 49′	+ 31° 11′	+ 37° 35′	+ 38° 16′
$Æ_0$	257° 38′	257° 54′	249° 18′	261° 27′	249° 29′

M. O. Struve a supposé dans ses calculs que les distances des étoiles étaient précisément celles nécessaires pour qu'à *égalité d'éclat absolu*, elles brillent dans le ciel avec l'éclat relatif que nous leur connaissons. Dans les miens, au contraire, m'étant borné aux étoiles de première et de seconde grandeurs, j'ai supposé toutes les distances égales entre elles; comme les différences en éclat absolu diminuent un peu la constance de la loi qui lie la distance à l'éclat relatif, la vérité doit se trouver entre les résultats de ces deux méthodes. Pour le prouver, en prenant un cas très-simple, concevons que les étoiles se partagent en deux séries de même force numérique : l'une à éclat absolu égal à 1, l'autre à éclat absolu égal à $\frac{1}{4}$, et qu'elles soient réparties autour du Soleil sur des surfaces de sphères concentriquement emboîtées, et dont les rayons soient successivement égaux à 1, 2, 3, 4,..., de telle sorte que le nombre des étoiles réparties sur la première surface soit $2n$, celui des étoiles de la seconde $4.2n = 8n$; celui de la troisième $9.2n = 18n$, et ainsi de suite. Nous obtiendrons le mode suivant de groupement des étoiles disposées suivant l'ordre de leur éclat relatif, savoir :

Éclat relatif $= 1$ .... n étoiles à la distance 1.
$= \frac{1}{4}$ .... n étoiles à la distance 1 et $4n$ à la distance 2.
$= \frac{1}{9}$ .... $9n$ étoiles à la distance 3.
$= \frac{1}{16}$ .... $4n$ étoiles à la distance 2 et $16n$ à la distance 4.
$= \frac{1}{25}$ .... $25n$ étoiles à la distance 5.
$= \frac{1}{36}$ .... $9n$ étoiles à la distance 3 et $36n$ à la distance 6,
etc.

Les distances moyennes des étoiles appartenant à ces six classes seront respectivement 1, (1,8), 3, (3,6), 5, (5,4), au lieu d'être égales à 1, 2, 3, 4, 5, 6, comme le veut la loi du carré des distances rigoureusement interprétée. On peut faire une multitude d'hypothèses différentes sur l'amplitude des variations de l'éclat absolu, et sur le mode de distribution des étoiles suivant les diverses valeurs de cet éclat; quel que soit le mode qui représente la nature, les carrés des distances moyennes réelles des étoiles classées par ordre de grandeur optique décroissante devront toujours suivre une progression ascendante moins rapide que la raison inverse de cette grandeur optique; de la sorte, si l'on nomme R la distance moyenne des étoiles à éclat apparent égal à l, la formule qui lie R à l dans le système du monde, doit se trouver comprise entre les deux formules $R = \frac{\text{const.}}{\sqrt{l}}$ et $R = \text{const.}$ Mais probablement le véritable mode de la nature se rapproche beaucoup plus de celui qu'indique la première de ces deux formules. M. O. Struve a basé ses calculs sur la première de ces deux hypothèses; j'ai au contraire adopté la seconde, et l'on remarquera que les résultats déduits de ces hypothèses extrêmes s'accordent assez exactement entre eux : les vrais éléments de la translation solaire devront donc être compris entre les limites ainsi obtenues, mais plus rapprochés cependant des nombres auxquels M. O. Struve est arrivé.

La faible incertitude qui règne encore à l'heure actuelle sur le coefficient de la précession des équinoxes peut aussi influer sur l'exacte détermination du mouvement solaire. Je nommerai ϖ la valeur admise pour ce coefficient, savoir, $50'',2235$ pour l'an 1800, et $d\varpi$, l'erreur dont il reste affecté. En introduisant dans le calcul des mouvements propres le nouveau coefficient $\varpi + d\varpi$, les ascensions droites des étoiles, calculées pour l'époque du second catalogue d'après les nombres du premier que je supposerai précéder celui-ci de n années, augmenteront de

$$n d\varpi (\cos \omega + \sin \omega \sin Æ \tang D),$$

et les déclinaisons augmenteront de

$$n d\varpi \sin \omega \cos Æ,$$

ω étant l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur.

Les mouvements propres annuels $\delta Æ$ et δD de l'étoile que l'on considère se changeront donc, par suite de l'introduction du petit terme $d\varpi$, en

$$\delta Æ + d\delta Æ = \delta Æ - d\varpi (\cos \omega + \sin \omega \sin Æ \tang D),$$

et

$$\delta D + d\delta D = \delta D - d\varpi \sin \omega \cos Æ.$$

Ces changements altéreront les termes connus M, N, P de nos équations fondamentales, et les corrections dM, dN, dP seront données par les formules

$$dM = -\cos\omega\, d\varpi\, \Sigma m \mathrm{R} \sin Æ \cos D - \sin\omega\, d\varpi\, \Sigma m \mathrm{R} \sin D,$$
$$dN = +\cos\omega\, d\varpi\, \Sigma m \mathrm{R} \cos Æ \cos D,$$
$$dP = +\sin\omega\, d\varpi\, \Sigma m \mathrm{R} \cos Æ \cos D.$$

Sans effectuer les calculs indiqués par ces équations, il est facile de voir que les facteurs $\Sigma m\mathrm{R}\sin Æ \cos D$, $\Sigma m\mathrm{R}\sin Æ \sin D$ ne sauraient être des nombres considérables, à cause du passage successif de Æ par toutes les valeurs possibles de 0 à 360 degrés, et des alternances de signe qui en résultent; mais il n'en est pas de même de la somme $\Sigma m\mathrm{R}\sin D$, parce que l'angle D, à cause de l'omission d'une partie des étoiles australes, varie seulement entre -30 degrés et $+90$ degrés. Pour un nombre K d'étoiles également réparties sur la zone céleste que nous observons, ce terme doit converger à peu de chose près vers la valeur $\frac{1}{4}\mathrm{K}m\mathrm{R}$, m et R étant supposés constants. Les coefficients a, b, c de nos équations fondamentales étant petits comparativement à A, B, C, lesquels convergent (A du moins) vers la valeur $0{,}61\,\mathrm{K}m$, les corrections $d\eta$, $d\zeta$ seront presque nulles, et l'on aura assez exactement

$$d\xi = \frac{dM}{A} = \frac{-\sin\omega . d\varpi . \frac{1}{4}\mathrm{K}m\mathrm{R}}{0{,}61\,\mathrm{K}m} = -0{,}164\,\mathrm{R}\,d\varpi.$$

Ainsi, pour $d\varpi = 0'',02$, on aurait

$$d\xi = -0'',0033\,\mathrm{R},$$

et, par suite,

$$\xi = -0'',0491\,\mathrm{R} - 0'',0033\,\mathrm{R} = -0'',0524\,\mathrm{R}.$$

L'augmentation du coefficient de la précession tend donc surtout à augmenter la composante solaire dirigée vers le point équinoxial d'automne, et l'on peut calculer qu'à chaque centième de seconde d'augmentation, l'ascension droite du pôle parallactique diminuera d'environ 38′, et sa déclinaison de 7′; ainsi, nous pouvons affirmer que cette cause produit au plus un degré et demi d'erreur dans la position de ce point.

Je terminerai en rappelant que, pour déterminer exactement le coefficient de la précession, il faut, comme l'a prouvé M. O. Struve, tenir compte de la translation du Soleil. En effet, cette translation occasionne dans les étoiles un mouvement relatif inverse dont les composantes sont $-\xi$, $-\eta$, $-\zeta$. De ce mouvement relatif peut naître une précession apparente, qui se manifesterait lors même que l'équateur et l'écliptique seraient parfaitement fixes. Il faut, pour la détruire, ramener les étoiles en arrière précisément de cette même quantité; de ce déplacement dans l'espace il résultera un changement $d'Æ$ dans l'ascension droite, et un changement $d'\mathrm{D}$ dans la déclinaison; on les obtiendra par les formules

$$d'Æ = -\sin Æ\,\frac{\xi}{\mathrm{R}} + \cos Æ\,\frac{\eta}{\mathrm{R}},$$

$$d'\mathrm{D} = -\sin \mathrm{D}\cos Æ\,\frac{\xi}{\mathrm{R}} - \sin \mathrm{D}\sin Æ\,\frac{\eta}{\mathrm{R}} + \cos \mathrm{D}\,\frac{\zeta}{\mathrm{R}}.$$

On devra ajouter ces quantités aux variations annuelles observées de l'ascension droite et de la déclinaison. Ce sont ces variations *ainsi corrigées* que l'on devra introduire dans les équations de condition desquelles se déduit le coefficient de la précession : il en résulte, d'après M. O. Struve, une correction positive de ce coefficient, laquelle augmente sa valeur de 0",013; cette fraction est très-appréciable dans l'état actuel de précision des déterminations astronomiques.

Le tableau suivant offre, pour chacune des soixante-deux étoiles de notre groupe circumsolaire, les trois composantes de leur mouvement propre annuel. Ce tableau est d'ailleurs entièrement semblable à celui de la page 474 de ce volume.

NOMS DES ÉTOILES.	MOUVEMENT PROPRE ANNUEL, PERPENDICULAIRE AU PLAN			NOMS DES ÉTOILES.	MOUVEMENT PROPRE ANNUEL, PERPENDICULAIRE AU PLAN		
	du colure des solstices.	du colure des équinoxes.	de l'équateur.		du colure des solstices.	du colure des équinoxes.	de l'équateur.
β Cassiopée...	−0″,166	−0″,514	+0″,102	δ Lion.......	+0″,099	+0″,075	+0″,127
γ Pégase......	−0,002	−0,043	+0,011	β Lion.......	−0,021	−0,498	+0,090
β Baleine.....	+0,019	−0,193	−0,027	γ grande Ourse.	+0,014	+0,110	+0,004
Polaire.......	+0,031	−0,037	−0,001	β Corbeau...	−0,009	−0,181	+0,068
β Andromède .	+0,009	−0,201	+0,061	ε grande Ourse.	+0,080	+0,083	+0,061
γ Andromède .	−0,020	−0,039	+0,041	12 Lévriers...	+0,012	−0,231	−0,042
α Bélier......	+0,050	−0,199	+0,127	α Vierge......	+0,008	−0,375	+0,028
α Baleine.....	−0,010	+0,001	+0,107	ζ grande Ourse.	−0,024	+0,157	+0,019
β Persée......	−0,028	+0,067	−0,031	η grande Ourse.	+0,058	−0,067	+0,020
α Persée......	+0,008	−0,057	+0,032	Arcturus......	+0,637	−0,584	+1,840
γ Éridan	+0,049	−0,009	+0,075	α Balance.....	+0,034	−0,056	+0,032
α Taureau....	+0,051	−0,074	+0,161	β petite Ourse.	+0,052	+0,007	+0,011
α Cocher	+0,020	−0,321	+0,298	β Balance.....	+0,078	−0,068	−0,031
β Orion......	+0,018	−0,003	+0,010	α Couronne...	−0,087	+0,104	+0,052
β Taureau....	+0,052	−0,106	+0,174	α Serpent	−0,146	+0,097	−0,067
γ Orion	+0,063	−0,016	+0,031	β Scorpion ...	+0,025	+0,036	−0,036
δ Orion	+0,044	−0,007	+0,046	α Scorpion ...	−0,025	+0,002	+0,007
ε Orion.......	−0,004	+0,001	0,000	β Hercule	+0,097	−0,045	−0,003
ζ Orion	+0,088	−0,011	+0,011	η Ophiuchus..	−0,022	+0,041	−0,123
β Cocher.....	−0,001	−0,022	+0,022	α Hercule	−0,003	−0,015	−0,059
α Orion......	+0,050	−0,003	−0,001	α Ophiuchus..	−0,088	+0,056	+0,186
β grand Chien.	−0,021	+0,025	+0,080	β Dragon.....	+0,014	−0,008	−0,005
Sirius	−0,556	+0,263	+1,177	γ Dragon.....	−0,024	−0,027	+0,022
Castor........	−0,152	−0,100	+0,064	Véga..........	−0,198	−0,211	−0,231
Procyon	−0,590	−0,353	+1,043	α Aigle.......	−0,476	−0,287	−0,385
Pollux........	−0,558	−0,285	+0,076	α Cygne......	+0,001	−0,003	−0,004
α Hydre......	−0,011	−0,023	−0,044	ε Pégase	−0,030	−0,062	−0,078
α Lion.......	−0,134	−0,220	−0,015	α Verseau	+0,002	+0,003	−0,007
γ Lion	+0,173	+0,224	+0,127	β Pégase	+0,010	−0,211	−0,135
β grande Ourse.	+0,004	+0,131	−0,023	α Pégase.....	−0,023	−0,074	+0,004
α grande Ourse.	+0,042	−0,134	+0,041	α Andromède.	−0,069	−0,140	+0,128