JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

H. SÉNARMONT

Note sur la théorie mathématique de la double réfraction

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 361-378.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__361_0>

NOTE

SUR LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DE LA DOUBLE RÉFRACTION;

PAR M. H. SÉNARMONT,

Ingénieur des Mines.

Depuis que le génie de Fresnel a créé l'admirable théorie de la double réfraction, M. Hamilton a déduit des conséquences nouvelles et singulières de la forme de l'onde lumineuse dans les milieux biréfringents; et l'expérience, d'accord avec ces épreuves délicates et décisives, est venue confirmer les idées de Fresnel d'une manière aussi complète qu'inattendue.

Fresnel avait laissé imparfaites les démonstrations de plusieurs résultats auxquels il avait été conduit par une sorte de divination. M. Hamilton les a complétées par une analyse savante [*], et M. Plücker les a rattachées très-simplement aux propriétés des surfaces réciproques [**]. On peut aussi retrouver tous les résultats connus, sans recourir à aucune théorie géométrique particulière, et en s'écartant à peine de la marche que Fresnel avait adoptée.

On se contentera, dans ce qui va suivre, d'établir les principes et les conséquences de la théorie de Fresnel, à peu près dans l'ordre qu'il a suivi lui-même : on ne s'arrêtera pas d'ailleurs à l'interprétation physique de chaque résultat géométrique; et, tout en empruntant le langage de l'optique, on supprimera les développements qui ne seraient pas ici à leur place.

[*] *Transactions of the royal irish Academy*, LXX^{e} vol.

[**] Journal de M. Crelle, tome XIX.

§ Ier.

Lorsqu'une onde plane se propage dans un milieu élastique quelconque, on peut toujours déterminer dans le plan de cette onde deux droites telles, que si la direction du mouvement vibratoire coïncide avec l'une ou avec l'autre, les forces élastiques mises en jeu ont une résultante comprise dans le plan qui contient déjà le mouvement vibratoire lui-même et la normale au plan de l'onde.

On désignera par a^2, b^2, c^2 les élasticités suivant trois axes d'élasticité principaux, par α, β, γ les angles que fait avec ces axes la direction d'un mouvement vibratoire quelconque. On démontre d'ailleurs que la résultante des forces élastiques développées a pour composantes, suivant les trois axes, des quantités proportionnelles à

$$a^2 \cos\alpha, \qquad b^2 \cos\beta, \qquad c^2 \cos\gamma;$$

de sorte que la projection de cette résultante sur la direction du mouvement vibratoire lui-même est proportionnelle à

$$r^2 = a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma. \tag{1}$$

Si le mouvement vibratoire se trouve compris dans le plan d'une onde perpendiculaire à la droite qui fait avec les axes des angles l, m, n, on a la condition

$$\cos\alpha \cos l + \cos\beta \cos m + \cos\gamma \cos n = 0; \tag{2}$$

enfin, pour que la direction du mouvement vibratoire, la résultante des réactions élastiques mises en jeu, et la normale au plan de l'onde, soient comprises dans le même plan, il faut qu'elles puissent être toutes trois perpendiculaires à une même droite qui fera des angles convenables u, v, w avec les trois axes, de sorte que l'on a les trois conditions

$$\left\{\begin{aligned} \cos\alpha \cos u &+ \cos\beta \cos v + \cos\gamma \cos w = 0, \\ a^2 \cos\alpha \cos u &+ b^2 \cos\beta \cos v + c^2 \cos\gamma \cos w = 0, \\ \cos l \cos u &+ \cos m \cos v + \cos n \cos w = 0, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

desquelles on tire successivement

$$\frac{\cos u}{\left(\frac{b^2 - c^2}{\cos\alpha}\right)} = \frac{\cos v}{\left(\frac{c^2 - a^2}{\cos\beta}\right)} = \frac{\mathrm{sco}\ w}{\left(\frac{a^2 - b^2}{\cos\gamma}\right)},$$

$$\frac{\cos l}{\cos\alpha}(b^2 - c^2) + \frac{\cos m}{\cos\beta}(c^2 - a^2) + \frac{\cos n}{\cos\gamma}(a^2 - b^2) = 0.$$

L'équation (2) peut être mise sous la forme

$$\frac{\cos l}{\cos\alpha}\cos^2\alpha + \frac{\cos m}{\cos\beta}\cos^2\beta + \frac{\cos n}{\cos\gamma}\cos^2\gamma = 0,$$

et l'on arrive enfin à

$$\frac{\left(\frac{\cos l}{\cos\alpha}\right)}{(b^2 - a^2)\cos^2\beta + (c^2 - a^2)\cos^2\gamma} = \frac{\left(\frac{\cos m}{\cos\beta}\right)}{(a^2 - b^2)\cos^2\alpha + (c^2 - b^2)\cos^2\gamma}$$
$$= \frac{\left(\frac{\cos n}{\cos\gamma}\right)}{(a^2 - c^2)\cos^2\alpha + (b^2 - c^2)\cos^2\beta}.$$

L'expression (1) peut prendre les trois formes,

$$\begin{aligned} r^2 - a^2 &= (b^2 - a^2)\cos^2\beta + (c^2 - a^2)\cos^2\gamma, \\ r^2 - b^2 &= (a^2 - b^2)\cos^2\alpha + (c^2 - b^2)\cos^2\gamma, \\ r^2 - c^2 &= (a^2 - c^2)\cos^2\alpha + (b^2 - c^2)\cos^2\beta; \end{aligned}$$

donc

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\left(\frac{\cos l}{r^2 - a^2}\right)}{\cos\alpha} = \frac{\left(\frac{\cos m}{r^2 - b^2}\right)}{\cos\beta} = \frac{\left(\frac{\cos n}{r^2 - c^2}\right)}{\cos\beta} \\ &= \sqrt{\frac{\cos^2 l}{(r^2 - a^2)^2} + \frac{\cos^2 m}{(r^2 - b^2)^2} + \frac{\cos^2 n}{(r^2 - c^2)^2}} \\ &= \frac{\frac{\cos^2 l}{r^2 - a^2} + \frac{\cos^2 m}{r^2 - b^2} + \frac{\cos^2 n}{r^2 - c^2}}{\cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n}. \end{aligned} \right.$$

A cause de l'équation (2), le dénominateur de la dernière fraction est nul; il faut donc que le numérateur soit égal à zéro :

$$(5)\qquad \frac{\cos^2 l}{r^2 - a^2} + \frac{\cos^2 m}{r^2 - b^2} + \frac{\cos^2 n}{r^2 - c^2} = 0.$$

Cette dernière équation fournit généralement deux valeurs de r^2, auxquelles correspondent deux systèmes de valeurs pour α, β, γ.

L'équation (5) représente la surface d'élasticité, dont les rayons vecteurs sont proportionnels aux vitesses avec lesquelles se propageraient, suivant leur direction, des ondes planes qui leur seraient perpendiculaires, et dont les vibrations auraient la direction déterminée par l'un ou l'autre système de valeurs de α, β, γ.

§ II.

Les directions déterminées par les deux systèmes de valeurs de α, β, γ, sont rectangulaires entre elles.

Soient r'^2, r''^2 les deux racines conjuguées de l'équation (5), α', β', γ', α'', β'', γ'' les valeurs correspondantes de α, β, γ :

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\left(\dfrac{\cos l}{r'^2 - a^2}\right)}{\cos\alpha'} = \frac{\left(\dfrac{\cos m}{r'^2 - b^2}\right)}{\cos\beta'} = \frac{\left(\dfrac{\cos n}{r'^2 - c^2}\right)}{\cos\gamma'} \\ &\frac{\left(\dfrac{\cos l}{r''^2 - a^2}\right)}{\cos\alpha''} = \frac{\left(\dfrac{\cos m}{r''^2 - b^2}\right)}{\cos\beta''} = \frac{\left(\dfrac{\cos n}{r''^2 - c^2}\right)}{\cos\gamma''}. \end{aligned}\right.$$

En multipliant ces équations membre à membre, on a

$$\frac{\left[\dfrac{\cos^2 l}{(r'^2 - a^2)(r''^2 - a^2)}\right]}{\cos\alpha'\cos\alpha''} = \frac{\left[\dfrac{\cos^2 m}{(r'^2 - b^2)(r''^2 - b^2)}\right]}{\cos\beta'\cos\beta''} = \frac{\left[\dfrac{\cos^2 n}{(r'^2 - c^2)(r''^2 - c^2)}\right]}{\cos\gamma'\cos\gamma''}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos^2 l}{(r'^2 - a^2)(r''^2 - a^2)} + \dfrac{\cos^2 m}{(r'^2 - b^2)(r''^2 - b^2)} + \dfrac{\cos^2 n}{(r'^2 - c^2)(r''^2 - c^2)}}{\cos\alpha'\cos\alpha'' + \cos\beta'\cos\beta'' + \cos\gamma'\cos\gamma''}.$$

Mais de l'équation (5) on tire facilement

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} (r'^2 - a^2)(r''^2 - a^2) &= (a^2 - b^2)(a^2 - c^2)\cos^2 l, \\ (r'^2 - b^2)(r''^2 - b^2) &= (b^2 - a^2)(b^2 - c^2)\cos^2 m, \\ (r'^2 - c^2)(r''^2 - c^2) &= (c^2 - a^2)(c^2 - b^2)\cos^2 n; \end{aligned}\right.$$

et comme, après substitution, le numérateur de la dernière fraction se réduit identiquement à zéro, son dénominateur est nécessairement nul.

§ III.

Dans tout milieu élastique il existe deux directions suivant lesquelles les deux vitesses de propagation des ondes planes deviennent égales. Ces vitesses correspondent d'ailleurs à des directions quelconques du mouvement vibratoire dans le plan de l'onde.

Soit

$$a > b > c.$$

L'équation (5) peut se mettre sous la forme

$$(r^2-b^2)^2+(r^2-b^2)[\cos^2 m(2b^2-a^2-c^2)+\cos^2 l(b^2-c^2)+\cos^2 n(b^2-a^2)]$$
$$+(b^2-a^2)(b^2-c^2)\cos^2 m.$$

Si l'on exprime la condition des racines égales,

$$\begin{aligned} o = [\cos^2 m(2b^2 - a^2 - c^2) + \cos^2 l(b^2 - c^2) + \cos^2 n(b^2 - a^2)]^2 \\ + 4(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)\cos^2 m, \end{aligned}$$

les deux termes sont essentiellement positifs; il faut donc qu'on ait

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\cos^2 m = o, \quad \cos^2 l = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad \cos^2 n = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}. \\ &r^2 = b^2. \end{aligned} \right.$$

Si l'on porte ces valeurs dans les équations (4), les valeurs de $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, se présentent sous la forme $\frac{o}{o}$ et demeurent indéterminées.

Les deux directions déterminées par les équations (8) sont les axes optiques.

§ IV.

Si l'on définit la normale à une onde plane quelconque par ses distances angulaires aux deux axes optiques, les deux vitesses de propagation correspondantes pourront s'exprimer simplement en fonction des nouvelles coordonnées.

Soient t_0, t_1, les angles que fait la normale avec les deux axes optiques; on a

$$\sqrt{(a^2 - c^2)} \cos t_0 = \sqrt{(a^2 - b^2)} \cos l + \sqrt{(b^2 - c^2)} \cos n.$$
$$\sqrt{(a^2 - c^2)} \cos t_1 = \sqrt{(a^2 - b^2)} \cos l - \sqrt{(b^2 - c^2)} \cos n;$$

donc

$$\cos l = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{\sqrt{(a^2 - b^2)}} \left(\frac{\cos t_0 + \cos t_1}{2} \right),$$
$$\cos n = \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{\sqrt{(b^2 - c^2)}} \left(\frac{\cos t_0 - \cos t_1}{2} \right).$$

Par ce changement de coordonnées l'équation (5) prend la forme

$$r^4 - r^2 [a^2 + c^2 - (a^2 - c^2) \cos t_0 \cos t_1] = - \frac{4 a^2 c^2 + (a^2 - c^2) [a^2 (\cos t_0 + \cos t_1)^2 - c^2 (\cos t_0 - \cos t_1)^2]}{4};$$

d'où

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{a^2 - c^2}{2} (\cos t_0 \cos t_1 \pm \sin t_0 \sin t_1) \\ &= \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{a^2 - c^2}{2} \cos (t_0 \mp t_1) \\ &= a^2 \sin \left(\frac{t_0 \mp t_1}{2} \right) + c^2 \cos \left(\frac{t_0 \mp t_1}{2} \right). \end{aligned}$$

§ V.

Les plans qui contiennent une droite quelconque, et les deux directions des mouvements vibratoires des ondes planes normales à cette droite, partagent en deux parties égales les angles dièdres compris entre les plans qui passent par la même droite et par les axes optiques.

Les directions des mouvements vibratoires et la normale aux ondes planes correspondantes sont trois droites perpendiculaires entre elles. On peut donc les prendre pour axes coordonnés.

Pour changer de coordonnées angulaires, soient f'_0, f'_1, f''_0, f''_1 les angles que les directions des deux vibrations font avec les axes optiques;

$$\frac{\cos f'_0}{\cos f'_1} = \frac{\cos \alpha' \sqrt{(a^2 - b^2)} + \cos \gamma' \sqrt{(b^2 - c^2)}}{\cos \alpha' \sqrt{(a^2 - b^2)} - \cos \gamma' \sqrt{(b^2 - c^2)}},$$
$$\frac{\cos f''_0}{\cos f''_1} = \frac{\cos \alpha'' \sqrt{(a^2 - b^2)} + \cos \gamma'' \sqrt{(b^2 - c^2)}}{\cos \alpha'' \sqrt{(a^2 - b^2)} + \cos \gamma'' \sqrt{(b^2 - c^2)}}.$$

Si l'on élimine α', γ', α'', γ'', au moyen des équations (6), on a

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\cos f'_0}{\cos f'_1} &= \frac{\cos l\,(r'^2 - c^2)\sqrt{(a^2 - b^2)} + \cos n\,(r'^2 - a^2)\sqrt{(b^2 - c^2)}}{\cos l\,(r'^2 - c^2)\sqrt{(a^2 - b^2)} - \cos n\,(r'^2 - c^2)\sqrt{(b^2 - c^2)}},\\ \frac{\cos f''_0}{\cos f''_1} &= \frac{\cos l\,(r''^2 - c^2)\sqrt{(a^2 - b^2)} + \cos n\,(r''^2 - a^2)\sqrt{(b^2 - c^2)}}{\cos l\,(r''^2 - c^2)\sqrt{(a^2 - b^2)} - \cos n\,(r''^2 - c^2)\sqrt{(b^2 - c^2)}}. \end{aligned}\right.$$

Mais des équations (7) l'on tire

$$\frac{(r'^2 - a^2)\sqrt{(b^2 - c^2)}\cos n}{(r''^2 - a^2)\sqrt{(a^2 - b^2)}\cos l} = \frac{(r'^2 - c^2)\sqrt{(a^2 - b^2)}\cos l}{(r''^2 - a^2)\sqrt{(b^2 - c^2)}\cos n};$$

donc

$$\frac{\cos f'_0}{\cos f'_1} = -\frac{\cos f''_0}{\cos f''_1}.$$

Les projections des axes optiques sur un plan parallèle au plan de l'onde font donc des angles égaux avec les nouveaux axes, ou, en d'autres termes, avec les directions des deux vibrations rectangulaires.

§ VI.

La surface représentée par l'équation (7) est susceptible d'une construction géométrique très-simple.

Si l'on coupe l'ellipsoïde

$$\frac{1}{R^2} = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma$$

par un plan quelconque passant par son centre, et si l'on porte sur la perpendiculaire à ce plan des longueurs inversement proportionnelles aux diamètres maximum et minimum de l'ellipse ainsi déterminée, les deux points que l'on obtient de cette manière appartiennent à la surface.

La longueur d'un rayon vecteur quelconque est donnée par les équations

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

$$\frac{1}{R^2} = a^2\cos^2\alpha + b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma;$$

si le rayon est compris dans un plan perpendiculaire à la droite qui fait des angles l, m, n avec les axes,

$$\cos\alpha\cos l + \cos\beta\cos m + \cos\gamma\cos n = 0;$$

si ce rayon doit être maximum ou minimum,

$$\cos\alpha\, d\cos\alpha + \cos\beta\, d\cos\beta + \cos\gamma\, d\cos\gamma = 0.$$
$$a^2\cos\alpha\, d\cos\alpha + b^2\cos\beta\, d\cos\beta + c^2\cos\gamma\, d\cos\gamma = 0,$$
$$\cos l\, d\cos\alpha + \cos m\, d\cos\beta + \cos n\, d\cos\gamma = 0.$$

Si l'on compare maintenant ces équations à celles qui ont fourni l'équation (5), on voit qu'elle ne diffère que par la notation des quantités à éliminer et par la substitution de $\frac{1}{R^2}$ à r^2. Il est d'ailleurs évident que les axes de l'ellipse coïncident en direction avec les deux vibrations rectangulaires.

On verra facilement que la proposition du § V résulte immédiatement de cette construction géométrique.

§ VII.

Détermination de la surface d'une onde élémentaire.

Si l'on désigne par ρ, $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ des coordonnées polaires variables, l'équation d'une onde plane qui a passé par l'origine sera, au bout de l'unité de temps,

$$(10)\qquad \cos\lambda\cos l + \cos\mu\cos m + \cos\nu\cos n = \frac{r}{\rho} = \cos\varepsilon;$$

et les constantes l, m, n, r doivent satisfaire aux deux conditions

$$(5)\qquad \frac{\cos^2 l}{r^2 - a^2} + \frac{\cos^2 m}{a - b} + \frac{\cos^2 n}{r^2 - c^2} = 0.$$
$$\cos^2 l + \cos^2 m + \cos^2 n = 1.$$

La surface d'une onde élémentaire est tangente à toutes les ondes planes qui ont passé en même temps par l'origine; elle enveloppe donc toutes les positions du plan (10), quand l, m, n, r varient. Cette surface enveloppe se déterminera de la manière suivante :

On a d'abord

$$\cos\lambda + \cos\nu \frac{d\cos n}{d\cos l} = \frac{dr}{\rho d\cos l},$$

$$\cos l + \cos n \frac{d\cos n}{d\cos l} = 0,$$

$$\frac{\cos l}{r^2 - a^2} + \frac{\cos n}{r^2 - c^2}\frac{d\cos n}{d\cos l} = \left[\frac{\cos^2 l}{(r^2 - a^2)^2} + \frac{\cos^2 m}{(r^2 - b^2)^2} + \frac{\cos^2 n}{(r^2 - c^2)^2}\right]\frac{rdr}{d\cos l};$$

$$\cos\mu + \cos\nu \frac{d\cos n}{d\cos m} = \frac{dr}{\rho d\cos m},$$

$$\cos m + \cos n \frac{d\cos n}{d\cos m} = 0,$$

$$\frac{\cos m}{r^2 - b^2} + \frac{\cos n}{r^2 - c^2}\frac{d\cos n}{d\cos m} = \left[\frac{\cos^2 l}{(r^2 - a^2)^2} + \frac{\cos^2 m}{(r^2 - b^2)^2} + \frac{\cos^2 n}{(r^2 - c^2)^2}\right]\frac{rdr}{d\cos m}.$$

Si l'on élimine les coefficients différentiels au moyen des coefficients arbitraires V, W, V′, W′, on trouve facilement

$$V = V', \qquad W = W',$$

et l'on arrive aux équations

$$\cos\lambda = V\cos l + W\frac{\cos l}{r^2 - a^2},$$

$$\cos\mu = V\cos m + W\frac{\cos m}{r^2 - b^2},$$

$$\cos\nu = V\cos n + W\frac{\cos n}{r^2 - c^2},$$

$$\frac{1}{\rho} = Vr\left[\frac{\cos^2 l}{(r^2 - a^2)^2} + \frac{\cos^2 m}{(r^2 - b^2)^2} + \frac{\cos^2 n}{(r^2 - c^2)^2}\right].$$

Si l'on ajoute membre à membre les trois premières équations multipliées respectivement par $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$, on a, à cause des équations (10) et (5),

$$V = \frac{r}{\rho}.$$

Si on les ajoute après les avoir élevées au carré, on a, à cause de l'équation (5) et de la relation précédente,

$$W = \frac{r}{\rho}(\rho^2 - r^2);$$

et, si l'on reporte ces valeurs dans les équations ci-dessus,

$$
(11)\quad \left\{\begin{array}{l}
\rho\cos\lambda = r\cos l + r\dfrac{\rho^2-r^2}{r^2-a^2}\cos l = r\dfrac{\rho^2-a^2}{r^2-a^2}\cos l = r\cos l + \dfrac{\rho^2-r^2}{\rho^2-a^2}\rho\cos\lambda,\\[2mm]
\rho\cos\mu = r\cos m + r\dfrac{\rho^2-r^2}{r^2-b^2}\cos m = r\dfrac{\rho^2-b^2}{r^2-a^2}\cos m = r\cos m + \dfrac{\rho^2-r^2}{\rho^2-b^2}\rho\cos\mu.\\[2mm]
\rho\cos\nu = r\cos n + r\dfrac{\rho^2-r^2}{r^2-c^2}\cos n = r\dfrac{\rho^2-c^2}{r^2-a^2}\cos n = r\cos n + \dfrac{\rho^2-r^2}{\rho^2-c^2}\rho\cos\nu,\\[2mm]
\dfrac{\cos^2 l}{(r^2-a^2)^2} + \dfrac{\cos^2 m}{(r^2-b^2)^2} + \dfrac{\cos^2 n}{(r^2-c^2)^2} = \dfrac{1}{r^2(\rho^2-r^2)}.
\end{array}\right.
$$

Si l'on ajoute les trois premières équations sous leur dernière forme, après les avoir multipliées respectivement par $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, on a, à cause de l'équation (10),

$$
(12)\qquad \frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\lambda}{\rho^2-a^2} + \frac{\cos^2\mu}{\rho^2-b^2} + \frac{\cos^2\nu}{\rho^2-c^2};
$$

cette équation appartient à la surface de l'onde. Si on la retranche de l'identité

$$
\frac{1}{\rho^2} = \frac{\cos^2\lambda}{\rho^2} + \frac{\cos^2\mu}{\rho^2} + \frac{\cos^2\nu}{\rho^2},
$$

elle prend la nouvelle forme

$$
(13)\qquad \frac{a^2\cos^2\lambda}{\rho^2-a^2} + \frac{b^2\cos^2\mu}{\rho^2-b^2} + \frac{c^2\cos^2\nu}{\rho^2-c^2} = 0.
$$

§ VIII.

Si dans l'équation (5) on remplaçait r^2, a^2, b^2, c^2, $\cos l$, $\cos m$, $\cos n$, par $\frac{1}{\rho^2}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$, $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, on retomberait sur l'équation (13). Il suffit donc de faire le même changement dans toutes les équations qui dérivent de l'équation (5), pour avoir des relations analogues entre

$$\rho,\ \lambda,\ \mu,\ \nu.$$

Ainsi les directions déterminées par

$$
\cos^2\mu = 0,\quad \cos^2\lambda = \frac{c^2(a^2-b^2)}{b^2(a^2-c^2)},\quad \cos^2\nu = \frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)},
$$
$$
\rho^2 = b^2,
$$

correspondent à des racines égales de l'équation (13), et si l'on rapporte à ces deux droites la position d'un rayon quelconque, en appelant θ_0, θ_1 les nouvelles coordonnées angulaires, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho^2} &= \frac{a^2+c^2}{2a^2c^2} + \frac{a^2-c^2}{2a^2c^2}(\cos\theta_0\cos\theta_1 \pm \sin\theta_0 \sin\theta_1)\\ &= \frac{a^2+c^2}{2a^2c^2} + \frac{a^2-c^2}{2a^2c^2}\cos(\theta_0 \mp \theta_1)\\ &= \frac{1}{a^2}\sin\left(\frac{\theta_0\mp\theta_1}{2}\right) + \frac{1}{b^2}\cos\left(\frac{\theta_0\mp\theta_1}{2}\right).\end{aligned}$$

Enfin, si l'on coupe l'ellipsoïde

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\alpha + \frac{1}{b^2}\cos^2\beta + \frac{1}{c^2}\cos^2\gamma$$

par un plan perpendiculaire à la droite qui fait des angles λ, μ, ν, avec les axes, et si l'on porte sur cette droite des longueurs directement proportionnelles aux diamètres maximum et minimum de l'ellipse ainsi déterminée, les deux points que l'on obtient de cette manière appartiennent à la surface de l'onde.

§ IX.

A chaque direction d'un rayon de la surface (13) correspondent deux directions de vibrations.

Si l'on élimine l, m, n entre les équations (4) et (11),

$$(14)\qquad \frac{\left(\frac{\cos\lambda}{\rho^2-a^2}\right)}{\cos\alpha} = \frac{\left(\frac{\cos\mu}{\rho^2-b^2}\right)}{\cos\beta} = \frac{\left(\frac{\cos\nu}{\rho^2-c^2}\right)}{\cos\gamma} = \frac{1}{\rho\sqrt{(\rho^2-r^2)}};$$

à chaque valeur de ρ tirée de l'équation (13) correspond un système particulier de valeurs pour α, β, γ.

Les plans qui contiennent à la fois le rayon et la direction d'une des deux vibrations sont rectangulaires entre eux; ils partagent en deux parties égales les angles dièdres compris entre les plans qui passent tous deux par le rayon, et chacun par l'une des droites correspondantes à

$$\cos^2\mu = 0,\quad \cos^2\lambda = \frac{c^2}{b^2}\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2},\quad \cos^2\nu = \frac{a^2}{b^2}\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}.$$

Il suffit pour s'en assurer de chercher les angles que font avec les axes deux droites perpendiculaires, toutes deux au rayon, et chacune à l'une des vibrations. En reprenant ensuite la marche suivie au § II et au § V, on prouverait, absolument de la même manière, que ces deux droites sont perpendiculaires entre elles, et qu'elles partagent en deux parties égales les angles compris entre les deux traces déterminées sur leur plan, par des plans qui passent tous deux par le rayon et chacun par l'une des droites correspondantes aux racines égales de l'équation (13).

Il est d'ailleurs facile de voir que cette dernière propriété résulte de la construction de la surface de l'onde au moyen d'un ellipsoïde.

§ X.

La droite qui joint, dans le plan d'une onde, le pied de la normale à cette onde et l'extrémité du rayon correspondant détermine la direction de la vibration.

Des équations (14) on tire, en ayant égard à l'équation (12),

$$\cos\lambda\cos\alpha + \cos\mu\cos\beta + \cos\nu\cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{r^2}{\rho^2}} = \sin\varepsilon.$$

L'angle compris entre le rayon et la normale est complément de l'angle compris entre le rayon et la vibration. Mais la vibration et la normale sont perpendiculaires entre elles : les trois droites sont donc dans un même plan.

§ XI.

Étant donnée la position de l'onde plane, en déduire celle du rayon correspondant.

Si l'on élimine ρ entre (11) et (13), et entre (10) et (13),

$$(15)\qquad \frac{a^2\cos\lambda\cos l}{r^2 - a^2} + \frac{b^2\cos\mu\cos m}{r^2 - b^2} + \frac{c^2\cos\nu\cos n}{r^2 - c^2} = 0;$$

$$(16)\qquad \frac{a^2\cos^2\lambda}{r^2 - a^2\cos^2\varepsilon} + \frac{b^2\cos^2\mu}{r^2 - b^2\cos^2\varepsilon} + \frac{c^2\cos^2\nu}{r^2 - c^2\cos^2\varepsilon} = 0.$$

Ces équations, qui représentent un plan passant par l'origine et un cône dont le sommet est à la même origine, répondent à la question. L'intersection du cône et de la surface de l'onde est déterminée par l'ensemble des équations (12) et (15).

§ XII.

Étant donnée la position du rayon, en déduire celle de l'onde plane correspondante.

Si l'on élimine r entre (11) et (5), et entre (10) et (5),

$$(17)\qquad \frac{\cos\lambda\cos l}{\rho^2-a^2}+\frac{\cos\mu\cos m}{\rho^2-b^2}+\frac{\cos\nu\cos n}{\rho^2-c^2}=0,$$

$$(18)\qquad \frac{\cos^2 l}{\rho^2\cos^2\varepsilon-a^2}+\frac{\cos^2 m}{\rho^2\cos^2\varepsilon-b^2}+\frac{\cos^2 n}{\rho^2\cos^2\varepsilon-c^2}=0.$$

Ces équations, qui représentent un plan passant par l'origne et un cône dont le sommet est à la même origine, répondent à la question. L'intersection du cône et de la surface (5) est déterminée par l'ensemble des équations (5) et (10).

§ XIII.

Les problèmes des § XI et XII présentent chacun un cas particulier qui mérite d'être considéré.

Lorsque les constantes qui entrent dans les équations des plans sont telles que ces équations se réduisent identiquement à zéro, on n'a plus, pour répondre à chaque question, que l'équation des cônes; il faut donc nécessairement qu'une infinité de rayons, réfractés suivant les génératrices d'une surface conique, correspondent, dans certaines circonstances, à une onde plane unique, et qu'une infinité d'ondes planes, normales aux génératrices d'une surface conique, correspondent, dans certaines circonstances, à un rayon réfracté unique.

Ces deux cas particuliers vont être discutés successivement.

§ XIV.

Discussion du cas particulier du § XII.

L'équation (15) du plan se réduit identiquement à zéro quand

$$\cos m = 0, \quad r = b, \quad \cos^2 l = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad \cos^2 n = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2},$$

$$\rho \cos \varepsilon = b = \rho\left(\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} \cos \lambda \pm \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} \cos \nu\right).$$

(Le double signe répond à une double surface conique. On ne conservera, pour la discussion, que le signe supérieur.)

Si l'on porte ces valeurs dans l'équation (16) du cône, elle devient, après toutes réductions faites,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{a^2(b^2 - c^2)}{b^2(a^2 - c^2)} \cos^2 \lambda + \frac{c^2(a^2 - b^2)}{b^2(a^2 - c^2)} \cos^2 \nu + \cos^2 \mu \\ &\qquad - \frac{a^2 + c^2}{a^2 - c^2} \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)}\sqrt{(b^2 - c^2)}}{b^2} \cos \lambda \cos \nu \end{aligned}\right\} = 0,$$

ou, en coordonnées rectangulaires,

$$\left(x\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} - z\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}\right)\left(x\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}} - z\frac{c^2}{b^2}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}\right) + y^2 = 0.$$

L'équation du plan de la base est, en coordonnées rectangulaires,

$$b = x\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}} + z\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}},$$

et il est nécessairement tangent à la surface de l'onde, dans toute l'étendue du contour de cette base, puisque chaque génératrice est un rayon, et que chaque rayon est déterminé par un point de contact de l'onde plane correspondante. Si, dans l'équation du cône, on fait $y = 0$,

$$\frac{z}{x} = \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}, \qquad \frac{z}{x} = \frac{a^2}{c^2}\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

La première génératrice, qui se confond avec la normale à l'onde plane unique, est donc perpendiculaire à la base du cône. Si on la prend pour nouvel axe des X, l'équation du cône devient

$$\eta^2 + \zeta^2 - \zeta\xi \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}}{b^2};$$

et si l'on fait $\xi = b$, on a pour l'équation de la courbe de contact

$$\eta^2 + \zeta^2 - \zeta \frac{\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}}{b}.$$

A chaque rayon correspond une direction particulière de la vibration dans le plan de l'onde. On déterminera (§ X) cette direction en joignant dans le plan de la base du cône le pied d'une génératrice, ou, en d'autres termes, d'un rayon quelconque au pied de la normale à l'onde plane qui se confond avec la génératrice perpendiculaire à la base.

Après l'émergence, chaque rayon devient parallèle à la normale à l'onde plane unique extérieure correspondante à l'onde plane unique intérieure. La direction de cette onde extérieure se déduira facilement de la direction de l'onde intérieure par la loi des sinus.

L'indice de réfraction est évidemment égal à $\frac{b}{v}$, si l'on représente par v la vitesse de propagation dans le milieu extérieur.

Les rayons émergents forment, par conséquent, un cylindre du second degré.

§ XV.

Discussion du cas particulier du § XIII.

L'équation (17) du plan se réduit identiquement à zéro si l'on a

$$\cos\mu = 0, \quad \rho^2 = b^2, \quad \cos\lambda = \frac{c}{b^2}\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}, \quad \cos^2\nu = \frac{a^2}{b^2}\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2},$$

$$\cos\varepsilon = \frac{r}{b} = \frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}\cos l \pm \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}\cos n.$$

(On ne conservera, comme précédemment, que le signe supérieur.)

Il est facile de voir que, pour obtenir l'équation du cône, il suffit de changer a^2, b^2, c^2, λ, μ, ν, en $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $\frac{1}{c^2}$, l, m, n, dans les équations du § XIV.

L'équation du cône est donc

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{b^2-c^2}{a^2-c^2}\cos^2 l + \dfrac{a^2-b^2}{a^2-c^2}\cos^2 n + \cos^2 m \\ \qquad - \dfrac{a^2+c^2}{a^2-c^2}\dfrac{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}{ac}\cos l \cos n \end{array}\right\} = 0,$$

ou, en coordonnées rectangulaires,

$$\left(x\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}} - z\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\right)\left(x\frac{b}{a}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}} - z\frac{b}{c}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\right) + y^2 = 0;$$

et l'on prouverait, comme précédemment, que le plan perpendiculaire à la génératrice, qui se confond avec le rayon unique, coupe le cône suivant un cercle.

L'intersection du cône et de la surface (5) est donnée par l'ensemble des équations (5) et (10). La seconde représente une sphère qui passe par l'origine et dont le diamètre est b.

On peut mettre ces deux équations sous la forme

$$\frac{a^2-b^2}{r^2-a^2}\cos^2 l + \frac{c^2-b^2}{r^2-c^2}\cos^2 n + 1 = 0,$$

$$\frac{c^2(a^2-b^2)}{a^2(r^2-c^2)}\cos^2 l + \frac{c^2-b^2}{r^2-c^2}\cos^2 n + 2\frac{rc}{a^2}\frac{\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{a^2-c^2}}{r^2-c^2} + \frac{r^2(a^2-c^2)}{a^2(r^2-c^2)} = 0.$$

Si on les retranche, on obtient l'équation d'une nouvelle sphère,

$$c(r^2-a^2) + r\cos l\sqrt{(a^2-b^2)}\sqrt{(a^2-c^2)} = 0.$$

Si l'on retranche de nouveau les équations des sphères l'une de l'autre, après les avoir mises sous la forme convenable, on obtient l'équation du plan du cercle d'intersection,

$$r\left(a\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\cos l + c\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\cos n\right) - ac = 0,$$

ou, en coordonnées rectangulaires,

$$xa\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} + zc\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}} - ac = 0.$$

Ce plan est perpendiculaire à la génératrice du cône diamétralement opposée au rayon unique; il détermine donc une section circulaire antiparallèle à la première.

Si l'on fait passer des plans par la génératrice qui se confond avec le rayon unique et par une génératrice quelconque, ces plans contiennent (§ X) la vibration correspondante à cette dernière, ou, pour mieux dire, à l'onde plane qui lui est perpendiculaire. Si l'un quelconque de ces plans est incliné sur la section méridienne du cône d'un angle δ, et si un second plan, qui passerait par la même génératrice et par l'axe du cône, est incliné sur la même section méridienne d'un angle τ, on trouve facilement

$$\operatorname{tang} \tau = \sqrt{1 + \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}{4a^2c^2}} \operatorname{tang} 2\delta;$$

mais, en général, $\frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}{4a^2c^2}$ est une quantité très-petite qu'on peut négliger, et l'on a, à très-peu près,

$$\tau = 2\delta.$$

A chaque onde plane intérieure correspond, après l'émergence, une onde plane extérieure. Les normales aux premières formant un cône du second degré, les normales aux secondes en formeront un du quatrième. La face d'émergence est supposée perpendiculaire au rayon unique.

Chaque onde plane suit, en se réfractant, la loi des sinus, mais avec un indice différent pour chacune d'elles, la vitesse de propagation intérieure propre à chaque onde étant précisément égale aux longueurs des génératrices du cône interceptées par le plan antiparallèle à celui perpendiculaire au rayon unique.

Soient l'équation de ce plan antiparallèle et celle du cône rapportées au rayon unique comme nouvel axe des X,

$$\eta^2 + \zeta^2 + \xi\zeta\sqrt{\frac{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)}{ac}} = 0,$$

$$\xi ac - \zeta\sqrt{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)} - abc = 0.$$

Soient x_0, y_0, z_0 les coordonnées courantes de la normale à une onde extérieure, correspondante à une onde intérieure, dont la normale perce le plan antiparallèle en ξ, η, ζ.

On a d'abord, entre ξ, η, ζ, les relations qui précèdent, et de plus, entre les mêmes quantités et x_0, y_0, z_0, les relations suivantes.

Les directions de propagation intérieure et extérieure, et la normale à la face d'émergence sont dans le même plan :

$$\frac{\eta}{y_0} = \frac{\zeta}{z_0}.$$

Le rapport des sinus est égal au rapport des vitesses intérieure et extérieure, ou, en désignant cette dernière par v,

$$\frac{\sqrt{\dfrac{\eta^2+\zeta^2}{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}}}{\sqrt{\dfrac{y_0^2+z_0^2}{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}} = \frac{\sqrt{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)}}{v}.$$

Si entre ces quatre équations on élimine ξ, η, ζ, on trouve, pour l'équation du cône émergent,

$$(y_0^2+z_0^2)^2 = \frac{v^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)}{a^2b^2c^2} z_0^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2) = \mathrm{K}^2 z_0^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2);$$

et l'on peut remarquer que l'intersection de ce cône et d'une sphère dont le centre serait à l'origine se projette sur le plan des xz suivant deux paraboles, sur le plan des yz, suivant deux cercles passant par l'origine.

On peut mettre l'équation du cône sous la forme suivante :

$$y_0^2+z_0^2 = \pm\, \mathrm{K} z_0 x_0 \left[1 + \mathrm{K}\frac{z_0}{x_0}\sqrt{\left(1+\frac{y_0^2+z_0^2}{x_0^2}\right)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

k est généralement une quantité assez petite pour qu'on puisse négliger ses puissances supérieures; l'équation devient alors

$$y_0^2+z_0^2 \pm \mathrm{K} z_0 x_0 = 0,$$

et représente deux cônes obliques à bases circulaires de même forme que le cône intérieur, mais dont les bases ont des diamètres différents.