JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. LIOUVILLE

Sur l'équation $\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 265-267.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__265_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

SUR L'ÉQUATION

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0\,;$$

PAR J. LIOUVILLE.

Soit u une intégrale particulière de l'équation

$$(1) \qquad \frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0;$$

en sorte que l'on ait

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0,$$

et par conséquent

$$\frac{d\frac{du}{dx}}{dx} = -\frac{d\frac{du}{dy}}{dy}.$$

La quantité

$$\frac{du}{dx}dy - \frac{du}{dy}dx$$

sera dès lors une différentielle exacte. Posons donc

$$\int\left(\frac{du}{dx}dy - \frac{du}{dy}dx\right) = v,$$

et par suite

$$(2) \qquad \frac{dv}{dy} = \frac{du}{dx}, \qquad \frac{dv}{dx} = -\frac{du}{dy}.$$

De là résultera sans difficulté

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} = 0,$$

d'où l'on conclut que v est aussi une intégrale de l'équation (1). De plus on aura évidemment

$$\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\frac{dv}{dy} = 0.$$

Les courbes représentées par l'une ou l'autre des deux équations

$$u = constante, \quad v = constante,$$

sont donc du genre de celles que M. Lamé nomme *isothermes;* et chacune des courbes du premier système $u =$ *constante* coupe à angle droit toutes les courbes du second système.

Maintenant désignons par α, β deux variables nouvelles, et posons

(3) $$u = \alpha, \quad v = \beta,$$

ce qui nous permettra d'exprimer x et y, et par suite φ, en fonction de α et β. Il nous viendra, en ayant égard aux relations (3) et (2),

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - 2\frac{d^2\varphi}{d\alpha d\beta}\frac{du}{dx}\frac{du}{dy} + \frac{d^2\varphi}{d\beta^2}\left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d\varphi}{d\beta}\frac{d^2v}{dx^2},$$
$$\frac{d^2\varphi}{dy^2} = \frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}\left(\frac{du}{dy}\right)^2 + 2\frac{d^2\varphi}{d\alpha d\beta}\frac{du}{dx}\frac{du}{dy} + \frac{d^2\varphi}{d\beta^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d\varphi}{d\beta}\frac{d^2v}{dy^2};$$

ajoutant donc pour égaler la somme à zéro, puis supprimant les termes en $\frac{d\varphi}{d\alpha}$, $\frac{d\varphi}{d\beta}$, dont les coefficients sont nuls, et divisant par $\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2$, on a

(4) $$\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2} + \frac{d^2\varphi}{d\beta^2} = 0.$$

Cette transformation de l'équation (1) dans l'équation (4) a été utilement employée par M. Lamé dans la théorie de la chaleur. Pour l'opérer, il faut connaître les deux fonctions u et v. Notre but était ici de montrer comment l'une d'elles (u par exemple) étant connue, l'autre s'en déduit immédiatement.

L'équation (1) étant satisfaite soit par $\varphi = x$, soit par $\varphi = y$, l'équation (4) doit l'être également, en sorte que

(5) $$\frac{d^2x}{d\alpha^2} + \frac{d^2x}{d\beta^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{d\alpha^2} + \frac{d^2y}{d\beta^2} = 0.$$

Donc si l'on regarde α et β comme les coordonnées rectangulaires d'un point, et x, y comme des fonctions de α, β, chacune des équations

$$x = constante, \quad y = constante,$$

représentera un système de courbes *isothermes*. J'ajoute que les courbes du premier système coupent à angles droits celles du second.

Différentions, en effet, l'équation $u = \alpha$ par rapport à α et β successivement : nous obtiendrons

$$\frac{du}{dx}\frac{dx}{d\alpha} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{d\alpha} = 1, \quad \frac{du}{dx}\frac{dx}{d\beta} + \frac{du}{dy}\frac{dy}{d\beta} = 0.$$

L'équation $v = \beta$, eu égard aux relations (2), fournira de même

$$\frac{du}{dy}\frac{dx}{d\alpha} - \frac{du}{dx}\frac{dy}{d\alpha} = 0, \quad \frac{du}{dy}\frac{dx}{d\beta} - \frac{du}{dx}\frac{dy}{d\beta} = -1.$$

De ces quatre équations, en posant pour abréger,

$$\Delta = \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2,$$

on tire

$$\frac{dy}{d\beta} = \frac{1}{\Delta}\frac{du}{dx} = \frac{dx}{d\alpha}, \quad \frac{dy}{d\alpha} = -\frac{1}{\Delta}\frac{du}{dy} = -\frac{dx}{d\beta},$$

et par conséquent

$$\frac{dy}{d\alpha}\frac{dx}{d\alpha} + \frac{dy}{d\beta}\frac{dx}{d\beta} = 0,$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

La réciprocité établie par nos calculs entre les fonctions u, v ou α, β de x, y, et les fonctions x, y de α, β, réciprocité qui se retrouve même dans les formules

$$\frac{dy}{d\beta} = \frac{dx}{d\alpha}, \quad \frac{dy}{d\alpha} = -\frac{dx}{d\beta},$$

analogues aux formules (2) et dont les équations (5) sont, du reste, une conséquence immédiate, méritait, je crois, d'être indiquée. Au surplus, les résultats auxquels nous venons d'arriver peuvent aussi se déduire de l'intégrale sous forme finie qui vérifie l'équation (1), ou plutôt de cette remarque que $u + v\sqrt{-1}$ se réduit à une simple fonction de $x + y\sqrt{-1}$. Mais il paraît plus convenable d'éviter l'emploi des imaginaires.