JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

B. AMIOT

Mémoire sur une nouvelle méthode de génération et de discussion des surfaces du deuxième ordre

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 161-208.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__161_0>

MÉMOIRE

SUR

UNE NOUVELLE MÉTHODE DE GÉNÉRATION ET DE DISCUSSION

DES SURFACES DU DEUXIÈME ORDRE [*];

PAR M. B. AMIOT,

Professeur de Mathématiques au Collége Saint-Louis.

THÉORIE DES FOCALES ET DES PLANS DIRECTEURS.

---

§ Ier.

Définitions et propriétés générales.

1. Quand on cherche dans un plan le lieu de tous les points, dont les distances à une droite donnée et à un point fixe, situés dans le même plan, conservent un rapport constant, on obtient l'équation la plus générale du deuxième degré entre deux variables. Si l'on identifie cette équation avec celle d'une courbe quelconque du deuxième ordre, on obtient immédiatement, non-seulement les foyers et les directrices de cette courbe, mais encore ses éléments (axes ou paramètres) en grandeur et en position.

Nous nous sommes proposé une question analogue par rapport aux surfaces du deuxième ordre, et nous avons trouvé, non pas un foyer unique, mais des courbes dont les différents points jouissent de pro-

---

[*] Ce Mémoire, présenté à l'Académie des Sciences dans la séance du 26 décembre 1842, a été l'objet d'un rapport de M. Cauchy, au nom d'une Commission composée de MM. Cauchy et Liouville. (Voyez *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XVI, p. 783.)

priétés assez semblables à celles des foyers des courbes du deuxième degré. D'abord, pour obtenir une équation générale du deuxième degré entre deux variables, que l'on puisse identifier avec celle d'une surface quelconque du deuxième ordre, nous avons cherché :

2. *Quel est le lieu géométrique décrit dans l'espace par un point mobile dont la distance à un centre fixe offre un carré constamment proportionnel au rectangle construit sur les distances du même point à deux plans donnés.*

Soient x', y', z' les coordonnées du centre fixe par rapport à trois axes de coordonnées rectangulaires, et soient aussi

$$(\mathrm{P}) \qquad \mathrm{X} + m\mathrm{Y} + n\mathrm{Z} + p = 0,$$

$$(\mathrm{P}') \qquad \mathrm{X} + m'\mathrm{Y} + n'\mathrm{Z} + p' = 0,$$

les équations des deux plans donnés, rapportés aux mêmes axes. Si nous désignons par r la distance d'un certain point du lieu cherché au point fixe, et par d et d' les distances du même point aux deux plans P et P', nous aurons pour chaque point du lieu cherché

$$(1) \qquad r^2 = kdd' \text{[*]},$$

ou bien

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = \frac{k(x + my + nz + p)(x + m'y + n'z + p')}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}\sqrt{1 + m'^2 + n'^2}},$$

en remplaçant r, d et d' par leurs valeurs connues en fonction des coordonnées courantes x, y, z d'un point du lieu cherché, et des coordonnées fixes x', y', z' du point donné.

3. Pour abréger, je pose

$$h = \frac{k}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}\sqrt{1 + m'^2 + n'^2}},$$

[*] M. Cauchy appelle *module* le rapport constant k, et il fait observer que les distances d, d', pouvant être prises avec le signe + ou avec le signe —, l'équation (1) représente, en général, deux surfaces du second ordre distinctes l'une de l'autre. (*Voir* le Rapport de M. Cauchy.)

et j'ai l'équation

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} &(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\\ &= h(x+my+nz+p)(x+m'y+n'z+p'), \end{aligned}\right.$$

qui représente généralement une surface du deuxième ordre.

Nous appellerons *foyer* le point fixe $x'y'z'$, et *plans directeurs* les deux plans donnés (P) et (P′). Ainsi tout foyer jouit de cette propriété que : *Le carré de sa distance à un point quelconque de la surface est décomposable en deux facteurs entiers, rationnels et du premier degré en fonction des coordonnées de ce dernier point.*

Réciproquement, *tout point jouissant de cette propriété est un foyer*, car de l'équation (2) résulte immédiatement l'équation (1), et l'on obtient les équations des plans directeurs en égalant à zéro chacun des deux facteurs du premier degré dans lesquels on a décomposé la valeur de r^2.

4. Au lieu de discuter immédiatement les différentes surfaces représentées par l'équation (2) et correspondantes à un certain foyer et à un système de plans directeurs donnés, proposons-nous la question inverse, c'est-à-dire : *Étant donnée une surface du deuxième ordre par son équation, cherchons si cette surface admet un ou plusieurs foyers, ainsi que un ou plusieurs systèmes de plans directeurs.*

Pour cela, développons et ordonnons l'équation (2), ce qui nous donne

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &x^2(1-h)+y^2(1-hmm')+z^2(1-hnn')\\ &-yzh(mn'+m'n)-xzh(n+n')-xyh(m+m')\\ &-x[2x'+h(p+p')]-y[2y'+h(mp'+m'p)]\\ &-z[2z'+h(np'+n'p)]+z'^2+y'^2+x'^2-hpp' \end{aligned}\right\}=0.$$

Or, cette équation représentant toutes les surfaces qui admettent des foyers et des plans directeurs, nous n'aurons qu'à chercher, dans chaque cas, si l'on pourra déterminer un ou plusieurs systèmes de valeurs des quantités h, m, m', n, n', p et p', x', y' et z' qui rendent l'équation (3) identique avec l'équation donnée.

Observons d'abord que l'on peut toujours concevoir pris pour plan des xy, par exemple, un des plans diamétraux principaux, et pour axe des x, un des axes de la surface donnée. Alors l'équation de cette surface sera de la forme

$$(\mathrm{R}) \qquad \mathrm{L}x^2 + \mathrm{M}y^2 + \mathrm{N}z^2 + 2\mathrm{P}x + \mathrm{R} = 0,$$

et en identifiant l'équation (3) avec celle-ci, on a d'abord les trois relations

$$mn' + m'n = 0, \quad m + m' = 0, \quad n + n' = 0,$$

d'où résulte l'un ou l'autre des deux systèmes

$$(\mathrm{M}) \qquad n = 0, \quad n' = 0, \quad m' = -m;$$

$$(\mathrm{M}_{,}) \qquad m = 0, \quad m' = 0, \quad n' = -n.$$

Admettons le premier, par exemple; comme le terme en z doit disparaître de l'équation (3), on aura

$$z' = 0,$$

et par conséquent déjà *tout foyer est situé dans l'un des plans diamétraux principaux de la surface.*

On voit, en même temps, que les plans directeurs dont les équations deviennent

$$(p) \qquad \mathrm{X} + m\mathrm{Y} + p = 0,$$

$$(p') \qquad \mathrm{X} - m\mathrm{Y} + p' = 0,$$

sont perpendiculaires au même plan diamétral principal et que leurs traces sur ce plan font des angles égaux avec l'axe des x.

5. Identifiant maintenant l'équation (3) avec l'équation (R), nous avons les équations de condition

$$(a) \qquad 1 - h = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{N}}, \qquad 1 + hm^2 = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}};$$

$$(b) \qquad 2x' + h(p + p') = -\frac{2\mathrm{P}}{\mathrm{N}}, \quad 2y' + hm(p' - p) = 0;$$

$$(c) \qquad y'^2 + x'^2 - hpp' = \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{N}}.$$

Les deux premières nous feront connaître h et m; puis, l'élimination de p et p' entre les trois dernières nous donnera généralement une seule équation en $x'y'$: ce sera celle d'un lieu géométrique dont chaque point sera *un foyer* de la surface.

Nous obtenons ainsi

$$h = \frac{N-L}{N},\quad m = \sqrt{\frac{M-N}{N-L}};$$

$$p = -\left[\frac{Nx'+P}{N-L} - \frac{Ny'}{\sqrt{(N-L)(M-N)}}\right],$$

$$p' = -\left[\frac{Nx'+P}{N-L} + \frac{Ny'}{\sqrt{(N-L)(M-N)}}\right];$$

d'où

$$hpp' = \frac{(Nx'+P)^2}{N(N-L)} - \frac{N^2y'^2}{N(M-N)},$$

et partant, l'équation (c) devient

$$(\varphi)\qquad \frac{Lx'^2}{L-N} + \frac{My'^2}{M-N} + \frac{P(2Nx'+P)}{N(N-L)} = \frac{R}{N}.$$

Chaque point de la courbe représentée par l'équation (φ) étant un foyer de la surface (R), cette courbe est le lieu de tous les foyers situés dans le plan des xy, et nous la nommerons *une focale*. Toute focale est donc une des trois courbes du deuxième ordre ou une de leurs variétés. Observons que, si la surface (R) admet un centre, ce point étant pris pour origine des coordonnées, on aura

$$P = 0,$$

et par conséquent la focale (φ) sera aussi rapportée à son centre.

6. Si l'on substitue les valeurs de m, p et p' dans les équations des plans directeurs p et p', on a

$$(\psi)\qquad X + Y\sqrt{\frac{M-L}{N-L}} - \frac{Nx'+P}{N-L} + \frac{Ny'}{\sqrt{(N-L)(M-N)}} = 0,$$

$$(\psi')\qquad X - Y\sqrt{\frac{M-N}{N-L}} - \frac{Nx'+P}{N-L} - \frac{Ny'}{\sqrt{(N-L)(M-N)}} = 0.$$

Ainsi, pour chaque point de la focale $(x'y')$, on aura un système de deux plans directeurs formant deux séries de plans respectivement parallèles. La ligne d'intersection de deux plans d'un même système quelconque sera déterminée par les deux équations

$$(\varkappa) \qquad X = \frac{Nx' + P}{N - L}, \quad Y = \frac{Ny'}{N - M},$$

que l'on obtient en ajoutant et retranchant successivement les deux équations (ψ) et (ψ'). Cette droite, toujours réelle lors même que les équations des plans directeurs renfermeraient certains termes imaginaires, sera désignée sous le nom d'*axe directeur*, et nous voyons que, pour chaque point de la focale $x'y'$, il y a un axe directeur dont *le pied* a pour coordonnées X, Y.

Les deux points $x'y'$ et XY, dont les coordonnées sont liées par les relations $(\varkappa)$, ou bien

$$(\varkappa') \qquad x' = \frac{X(N-L) - P}{N}, \quad \text{et} \quad y' = \frac{Y(N-M)}{N},$$

sont appelés *points conjugués* [*].

7. Puisqu'à chaque point de la focale correspond un point conjugué situé dans le même plan, cherchons le lieu de tous les points conjugués aux divers points de la focale. Pour cela, éliminons x' et y' entre les équations de la focale (φ) et les équations $(\varkappa')$, ce qui donne

$$(\theta) \quad L(L-N)X^2 + M(M-N)Y^2 + 2PX(L-N) + P^2 = RN.$$

La courbe représentée par cette équation est toujours de la même espèce que la focale et généralement réelle ou imaginaire avec elle.

---

[*] Si l'on conçoit que le point (XY) devienne le sommet d'un cône circonscrit à la surface du deuxième degré, le plan de la courbe suivant laquelle le cône touchera la surface, renfermera toujours le foyer $x'y'$. Pour cette raison, M. Cauchy nomme le point (XY) un *pôle* de la surface correspondant au foyer $x'y'$, et il démontre que le foyer $(x'y')$ coïncidera toujours avec le pied de la perpendiculaire abaissée du pôle (X, Y) sur le plan polaire correspondant à ce même pôle. (*Voir* la Note IV^e faisant suite au Rapport de M. Cauchy.)

Nous lui donnerons, pour cette raison, le nom de *synfocale*, et nous voyons que, si la focale admet un centre, ce même point est aussi le centre de la synfocale.

8. La valeur générale de r^2 devient, par suite des équations de condition du n° **4**,

$$r^2 = h(x + my + p)(x - my + p'),$$

et si l'on y remplace h, m, p et p' par leurs valeurs (**5**), on obtient

$$(\rho) \qquad r^2 = \frac{N-L}{N}\left(x - \frac{Nx' + P}{N-L}\right)^2 + \frac{N-M}{N}\left(y - \frac{Ny'}{N-M}\right)^2;$$

ou bien encore, en remplaçant x' et y' par leurs valeurs ($\varkappa$),

$$(\rho') \qquad r^2 = \frac{N-L}{N}(x - X)^2 + \frac{N-M}{N}(y - Y)^2.$$

Or, si nous supposons une valeur fixe attribuée à r, puis, que d'un certain point (F) de la focale, pris pour centre, nous décrivions une sphère avec un rayon r, cette sphère coupera généralement la surface (R) suivant une ligne à double courbure, dont les différents points auront pour coordonnées, parallèles aux deux axes des x et des y, précisément les valeurs de x et y qui vérifient l'équation (φ). Par conséquent si l'on considère, dans cette équation, r, x' et y' comme constantes, et x, y comme des coordonnées courantes, nous aurons une courbe qui sera la projection sur le plan des xy de la ligne suivant laquelle la surface est pénétrée par une sphère de rayon r ayant pour centre le point $x'y'$ de la focale. Nous appellerons cette courbe *la projection* et nous voyons qu'*elle est toujours une ligne du deuxième ordre ayant pour centre le point de la synfocale* XY *conjugué au point* F *de la focale pris pour centre de la sphère.*

Si nous supposons qu'on attribue à r une autre valeur, x' et y' ou X et Y ne changeant pas, on aura une nouvelle sphère concentrique avec la première, et la projection correspondante sera une courbe semblable à la première et aussi concentrique avec elle. Donc généralement: *Si d'un certain point pris arbitrairement sur une focale, comme centre commun, on décrit une série de sphères, les projections sur le* *plan de la focale, des lignes suivant lesquelles la surface est pénétrée par ces différentes sphères, sont toutes des ellipses ou bien des hyperboles semblables ayant pour centre commun le point de la synfocale conjugué au point de la focale pris pour centre des sphères.*

9. Supposons ensuite que, dans l'équation (ρ), on fasse varier x' et y' ou X et Y, r restant constant, ce qui revient à admettre que le centre d'une même sphère parcourt la focale, les différentes projections correspondantes sont toutes des courbes égales entre elles, ayant pour centre, chacune le point de la focale occupé par le centre de la sphère correspondante. On pourrait donc définir la synfocale : *Le lieu des centres de toutes les projections sur le plan de la focale des différentes lignes d'intersection de la surface par une sphère de rayon quelconque qui est supposée se mouvoir de manière que son centre parcoure la focale.*

10. Soit pris un certain point M sur la surface; je mène par ce point un plan perpendiculaire à l'axe des x, lequel aura pour équation $x = x_{\prime}$ et coupera généralement la surface suivant une ligne du deuxième degré, que nous appellerons *une section perpendiculaire.* Le plan de cette courbe coupe généralement la synfocale en un point qui a pour abscisse $\mathrm{X} = x_{\prime}$, et si nous considérons le *foyer conjugué*, nous aurons pour l'abscisse de ce point

$$x' = \frac{x_{\prime}(\mathrm{N}-\mathrm{L})-\mathrm{P}}{\mathrm{N}}, \quad \text{d'où} \quad x_{\prime} = \mathrm{X} = \frac{\mathrm{N}x'+\mathrm{P}}{\mathrm{N}-\mathrm{L}},$$

et par conséquent, pour tous les points de la section perpendiculaire $x = x_{\prime}$, on a

$$r^2 = \frac{\mathrm{N}-\mathrm{M}}{\mathrm{N}}\left(y - \frac{\mathrm{N}y'}{\mathrm{M}-\mathrm{N}}\right)^2,$$

d'où

$$r_1 = \sqrt{\frac{\mathrm{N}-\mathrm{M}}{\mathrm{N}}}\left(y - \frac{\mathrm{N}y'}{\mathrm{M}-\mathrm{N}}\right) = \sqrt{\frac{\mathrm{N}-\mathrm{M}}{\mathrm{N}}}(y - \mathrm{Y}).$$

Mais si nous nommons δ_1 la distance d'un même point M de la section perpendiculaire à l'axe directeur correspondant, c'est-à-dire ayant pour pied le point $X = x_{,}$, nous avons évidemment

$$\delta_1 = y - Y,$$

d'où résulte

$$r_1 = \sqrt{\frac{N-M}{N}} \times \delta_1, \quad \text{ou} \quad \frac{r_1}{\delta_1} = \sqrt{\frac{N-M}{N}}.$$

Si par le même point M de la surface on mène un nouveau plan perpendiculaire à l'axe des y, on aura une nouvelle section perpendiculaire, et si l'on désigne par r_2 et δ_2 les distances d'un point quelconque de cette section au foyer conjugué et à l'axe directeur correspondant, on verra de la même manière que

$$\frac{r_2}{\delta_2} = \sqrt{\frac{N-L}{N}}.$$

Ces valeurs de r_1 ou r_2 ne seront imaginaires que si le plan mené par le point M, perpendiculairement soit à l'axe des x, soit à l'axe des y, ne rencontre pas la synfocale. Donc généralement :

Étant pris arbitrairement un point sur la synfocale comme pied d'un axe directeur, si par cet axe on mène un plan perpendiculaire soit à l'axe des x, soit à l'axe des y, et que ce plan détermine sur la surface une certaine section, tous les points de cette ligne jouissent de cette propriété, que les distances d'un quelconque de ces points au foyer conjugué et à l'axe directeur correspondant sont constamment dans le même rapport.

On voit de plus que la valeur de ce rapport est la même pour toutes les sections perpendiculaires au même axe principal de la surface.

11. Tous les résultats que nous venons d'obtenir sont relatifs au plan des xy, parce que nous avons supposé, n° 4, qu'on a pris pour ce plan un des plans diamétraux principaux de la surface. Il y aura donc lieu généralement de chercher la focale, synfocale... sur chacun des plans diamétraux principaux, ce que nous aurons soin de faire dans chaque cas particulier.

§ II.

Propriétés des focales, synfocales et plans directeurs dans les surfaces douées d'un centre et particulièrement dans l'ellipsoïde.

12. Soit l'équation

$$\text{(E)} \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

d'un ellipsoïde rapporté à son centre et à ses axes (*Planche I, fig.* 1).

Si nous la comparons à l'équation (R) du n° **4**, nous avons

$$(l) \qquad L = \frac{1}{a^2}, \quad M = \frac{1}{b^2}, \quad N = \frac{1}{c^2}, \quad P = 0, \quad R = -1,$$

valeurs qui, substituées dans l'équation (φ) du n° **5**, donnent

$$\text{(F)} \qquad \frac{y'^2}{c^2 - b^2} - \frac{x'^2}{a^2 - c^2} = -1$$

pour l'équation de la focale située dans le plan des xy.

Or, nous pouvons toujours supposer que l'on a

$$a > c, \quad c > b,$$

ce qui revient à dire que l'on a pris pour axe des x, le plus grand axe de l'ellipsoïde, et pour axe des y le plus petit.

Cette hypothèse admise, on voit que l'équation (F) représente une hyperbole située dans le plan du *plus grand* et du *plus petit axes*, ne rencontrant point le plus petit et coupant le plus grand à des distances

$$x' = \pm \sqrt{a^2 - c^2}$$

du centre. Cette courbe a donc *pour sommets les foyers* de l'ellipse principale située dans le plan des xz; elle a pour foyers ceux de l'ellipse principale située dans le plan des xy; car, en appelant A, B les deux demi-axes et C sa demi-excentricité, on a

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

On voit aussi qu'elle a pour asymptotes les deux droites

$$y = \pm x \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{a^2 - c^2}},$$

qui sont aisées à construire.

13. Si nous substituons pareillement les valeurs (l) dans l'équation (θ) du n° **7**, nous aurons

$$\text{(D)} \qquad \frac{c^2 - b^2}{b^4} \mathrm{Y}^2 - \frac{a^2 - c^2}{a^4} \mathrm{X}^2 = -1,$$

pour l'équation de la synfocale. Cette courbe est une nouvelle hyperbole qui ne rencontre pas non plus l'axe des y et qui coupe celui des x à des distances

$$\mathrm{X} = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - c^2}}$$

de l'origine. Elle a donc pour sommets les pieds des directrices de l'ellipse principale située dans le plan des xz. Les asymptotes de la synfocale ont pour équations

$$\mathrm{Y} = \pm \frac{b^2}{a^2} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{c^2 - b^2}}.$$

Or, soient α et β les angles que les asymptotes de la focale et de la synfocale forment avec l'axe des x, l'un au-dessus et l'autre au-dessous, on a

$$\operatorname{tang} \alpha = \pm \sqrt{\frac{c^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} \beta = \mp \frac{b^2}{a^2} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{c^2 - b^2}},$$

d'où résulte

$$\operatorname{tang} \alpha \operatorname{tang} \beta = - \frac{b^2}{a^2},$$

et par conséquent : *Chacune des asymptotes de la synfocale forme, avec une des asymptotes de la focale, un système de diamètres conjugués de l'ellipse principale* AOA′ *située dans le plan des xy.*

Connaissant ainsi les asymptotes et les sommets de la synfocale, on construira aisément cette courbe; puis, si l'on veut obtenir un point conjugué à un point donné quelconque de la focale, on en construira l'abscisse par la proportion

$$\mathrm{X} : x' :: \frac{a^2}{\sqrt{a^2-c^2}} : \sqrt{a^2-c^2} \quad \text{ou} \quad :: \mathrm{OD} : \mathrm{OF}.$$

14. Cherchons maintenant les plans directeurs, et pour cela, substituons les valeurs (l) du n° **12** dans les équations (ψ) et (ψ') du n° **6**, ce qui nous donne

$$(p) \qquad \mathrm{X} + \mathrm{Y}\frac{a}{b}\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-c^2}} - \frac{a^2x'}{a^2-c^2} + \frac{aby'}{\sqrt{(a^2-c^2)(c^2-b^2)}} = 0,$$

$$(p') \qquad \mathrm{X} - \mathrm{Y}\frac{a}{b}\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-c^2}} - \frac{a^2x'}{a^2-c^2} - \frac{aby'}{\sqrt{(a^2-c^2)(c^2-b^2)}} = 0.$$

Ces équations sont réelles, et par conséquent, pour chaque point de la focale $(x'y')$, il existe un système de deux plans directeurs; pour obtenir leur direction, il n'y a qu'à construire les traces de ceux qui correspondent au point de la focale situé sur l'axe des x. Or, pour ce point, on a

$$y' = 0 \quad \text{et} \quad x' = \sqrt{a^2-c^2},$$

et par conséquent les plans directeurs correspondants ont pour équations

$$\mathrm{X} + \mathrm{Y}\frac{a}{b}\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-c^2}} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2-c^2}} = 0,$$

et

$$\mathrm{X} - \mathrm{Y}\frac{a}{b}\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-c^2}} - \frac{a^2}{\sqrt{a^2-c^2}} = 0;$$

d'où l'on déduit pour $\mathrm{Y} = 0$,

$$\mathrm{X} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-c^2}},$$

et pour $\mathrm{X} = 0$,

$$\mathrm{Y} = \mp \frac{ab}{\sqrt{c^2-c^2}}.$$

Ainsi, ces deux droites coupent l'axe des x au point D, sommet de la synfocale, ce qui était aisé à prévoir. Pour obtenir les points où elles coupent l'axe des y, j'établis la proportion

$$\sqrt{c^2 - b^2} \quad \text{ou} \quad \mathrm{OF} : \mathrm{AO} :: \mathrm{BO} : \mathrm{LO};$$

puis, prenant $\mathrm{OL}' = \mathrm{OL}$ et menant les deux droites DL, DL', nous avons les traces des deux plans directeurs correspondants au foyer F.

Pour obtenir les traces des plans directeurs qui correspondent à un autre foyer quelconque F_2, je construis le point conjugué D_2, puis je mène par ce point $\mathrm{D}_2\mathrm{L}_2$ et $\mathrm{D}_2\mathrm{L}'_2$ respectivement parallèles à DL, DL', et j'ai les traces demandées.

15. Si nous substituons pareillement les valeurs (l) du n° **12** dans l'équation (ρ) du n° **8**, nous avons pour la valeur générale du rayon vecteur r, mené d'un certain foyer $x'y'$ à un point quelconque de la surface,

$$r^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}\left(x - \frac{a^2 x'}{a^2 - c^2}\right)^2 - \frac{c^2 - b^2}{b^2}\left(y + \frac{b^2 y'}{c^2 - b^2}\right)^2.$$

Or, soit une section $\alpha\alpha'$ faite par un plan perpendiculaire à l'axe OY et passant par le point de la synfocale (XY) conjugué au foyer $x'y'$, on aura, pour tous les points de cette section,

$$y = \mathrm{Y} = -\frac{b^2 y'}{c^2 - b^2},$$

et par conséquent, la valeur correspondante de r ne dépendra plus que de la seule variable x. On a, en effet,

$$r^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2}\left(x - \frac{a^2 x'}{a^2 - c^2}\right)^2, \quad \text{d'où} \quad r = \pm\frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}\left(x - \frac{a^2 x'}{a^2 - c^2}\right),$$

avec la relation

$$x < \mathrm{X} \quad \text{ou} \quad x < \frac{a^2 x'}{a^2 - c^2},$$

puisque la synfocale est entièrement extérieure à la surface.

Soient donc r_1 et d_1 les distances d'un même point M de la section $\alpha\alpha'$ au foyer conjugué F_2 et à l'axe directeur D_2 correspondant, nous aurons en valeur absolue

$$r_1 = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}\left(\frac{a^2x'}{a^2-c^2} - x\right), \quad \text{et} \quad d_1 = \mathrm{X} - x = \frac{a^2x'}{a^2-c^2} - x,$$

et par conséquent, nous avons, dans ce cas, pour la valeur constante de r_1 à d_1,

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a},$$

quantité toujours < 1.

16. Considérons maintenant un second point de la focale F'_2 ne différant du premier F_2 que par le signe de l'abscisse x', nous appellerons ces deux points *foyers conjugués* de la section $\alpha\alpha'$; et si nous prenons les distances r et r' d'un même point M quelconque de la section aux deux foyers conjugués, nous aurons en valeur absolue

$$r = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}\left(\frac{a^2x'}{a^2-c^2} - x\right), \quad r' = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}\left(\frac{a^2x'}{a^2-c^2} + x\right).$$

En additionnant ces deux valeurs, nous obtenons

$$r + r' = \frac{2ax'}{\sqrt{a^2-c^2}}, \quad \text{ou encore} \quad r + r' = 2x' \times \frac{d_1}{r_1},$$

quantité constante pour tous les points d'une même section perpendiculaire et variant d'une section à l'autre proportionnellement à la distance $2x'$ des deux foyers conjugués.

17. Supposons maintenant qu'en un certain point $\mathrm{M}(x_{,}, y_{,}, z_{,})$ de la section perpendiculaire $\alpha\alpha'$, nous menions une normale à l'ellipsoïde, et cherchons l'angle que fait cette normale avec le rayon vecteur MF_2.

D'abord, l'équation du plan tangent à l'ellipsoïde au point $x_{,}, y_{,}, z_{,}$, étant

$$\frac{xx_{,}}{a^2} + \frac{yy_{,}}{b^2} + \frac{zz_{,}}{c^2} = 1,$$

la normale au même point aura pour équations

$$(\mathrm{MN})\left\{\begin{aligned} x - x_{,} &= \frac{c^2 x_{,}}{a^2 z_{,}}(z - z_{,}),\\ y - y_{,} &= \frac{c^2 y_{,}}{b^2 z_{,}}(z - z_{,}),\end{aligned}\right\} \text{ avec la relation } \frac{x_{,}^2}{a^2} + \frac{y_{,}^2}{b^2} + \frac{z_{,}^2}{c^2} = 1.$$

Un rayon vecteur, mené par le point M et par un point quelconque de l'espace x', y', z', a pour équations

$$x - x_{,} = \frac{x_{,} - x'}{z_{,} - z'}(z - z_{,}), \quad \text{et} \quad y - y_{,} = \frac{y_{,} - y'}{z_{,} - z'}(z - z_{,}).$$

Mais pour exprimer que le point (x', y', z') est situé sur la focale et conjugué à la section $\alpha\alpha'$, nous avons les relations

$$z' = 0, \quad y_{,} = -\frac{b^2 y'}{c^2 - b^2}, \quad \text{et} \quad \frac{y'^2}{c^2 - b^2} - \frac{x'^2}{a^2 - c^2} = -1.$$

Nous en déduisons

$$y_{,} - y' = \frac{c^2 y'}{b^2},$$

et partant, nous avons pour les équations du rayon vecteur MF_2,

$$(\mathrm{MF}_2)\quad\left\{\begin{aligned} x - x_{,} &= \frac{x_{,} - x'}{z_{,}}(z - z_{,}),\\ y - y_{,} &= \frac{c^2 y_{,}}{b^2 z_{,}}(z - z_{,}),\end{aligned}\right.$$

et l'on voit tout d'abord que *la normale* MN *et le rayon vecteur* MF_2 *sont situés dans un même plan perpendiculaire au plan des* xy.

Pour obtenir actuellement l'angle de ces deux droites, faisons dans la formule générale

$$\operatorname{tang} V = \frac{\sqrt{(\alpha - \alpha')^2 + (6 - 6')^2 + (\alpha 6' - 6\alpha')^2}}{\alpha\alpha' + 66' + 1},$$

$$\alpha = \frac{c^2 x_{,}}{a^2 z_{,}}, \quad \alpha' = \frac{x_{,} - x'}{z_{,}}, \quad 6 = 6' = \frac{c^2 y_{,}}{b^2 z_{,}},$$

et nous avons

$$\text{tang MF}_2 = \frac{(c^2 x_, - a^2 x_, + a^2 x')\sqrt{b^4 z_,^2 + c^4 y_,^2}}{a^2 b^2 c^2 \left(\frac{x_,^2}{a^2} + \frac{c^2 y_,^2}{b^4} + \frac{z_,^2}{c^2} - \frac{x_, x'}{a^2}\right)},$$

puis, remplaçant $\frac{z_,^2}{c^2}$ par la valeur $1 - \frac{x_,^2}{a^2} - \frac{y_,^2}{b^2}$, observant que

$$\frac{y_,^2(c^2 - b^2)}{b^4} = \frac{y'^2}{c^2 - b^2} = \frac{x'^2}{a^2 - c^2} - 1,$$

et supprimant les facteurs communs, on a enfin

$$\text{tang}\,(\text{MF}_2) = \frac{(a^2 - c^2)\sqrt{b^4 z_,^2 + c^4 y_,^2}}{b^2 c^2 x'}.$$

Or, si l'on cherchait l'angle de la même normale MN avec le rayon vecteur MF'_2, allant du même point M au foyer F'_2, lequel ne diffère de F_2 que par le signe de l'abscisse x', on aurait visiblement des résultats ne différant des précédents que par le signe de l'abscisse x'. Donc, d'abord le plan de la normale MN et du rayon vecteur MF_2 contient aussi le second rayon MF'_2. D'ailleurs on aura

$$\text{tang}\,(\text{MF}'_2) = -\,\text{tang}\,(\text{MF}_2),$$

et par conséquent *la normale* MN *divise en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs, menés d'un même point* M *quelconque d'une section perpendiculaire aux deux foyers conjugués.*

Ainsi, en général, si l'on coupe un ellipsoïde par un plan perpendiculaire à son petit axe, ce plan coupera la synfocale en deux points, et les points conjugués de la focale peuvent être considérés comme de *véritables foyers de la section correspondante*, car ils jouissent des propriétés suivantes :

1°. *Les distances d'un point quelconque de la section $\alpha\alpha'$ à l'axe directeur et au foyer conjugué correspondant sont dans un rapport constant ;*

2°. *La somme des distances d'un même point* M *quelconque de la section perpendiculaire $\alpha\alpha'$ aux deux foyers conjugués est constante, et égale à la distance des deux foyers conjugués multipliée par le rap-*

port des distances d'un point de la même section à l'axe directeur et au foyer conjugué correspondants ;

3°. *La normale à la surface au point* M *quelconque de la section* zx' *est située dans le plan des rayons vecteurs* MF_2, MF'_2, *et divise l'angle de ces droites en deux parties égales.*

18. Si, dans la valeur de r^2 du n° **15**, on posait

$$x = X = \frac{a^2x'}{a^2 - c^2},$$

on aurait pour r un résultat imaginaire; et, en effet, aucun plan mené par un point quelconque de la syfocale, perpendiculairement au grand axe, ne peut couper l'ellipsoïde.

19. Cherchons maintenant les résultats analogues relatifs au plan des xz, c'est-à-dire au plan du plus grand et du moyen axes de l'ellipsoïde.

Pour cela, nous n'avons qu'à changer, dans l'équation de la surface (E) du n° **12**, y en z, et réciproquement, ce qui revient à changer dans toutes les autres formules, d'abord y en z, puis c en b et b en c. On obtient ainsi, pour l'équation de cette nouvelle focale sur le plan des xz,

$$(\mathrm{F}_{\prime}) \qquad \frac{z'^2}{c^2 - b^2} + \frac{x'^2}{a^2 - b^2} = 1,$$

ellipse réelle, puisque l'on suppose toujours $\begin{matrix} a > b \\ c > b \end{matrix}$. Elle a pour demi-axes

$$x' = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad \text{et} \quad z' = \sqrt{c^2 - b^2},$$

et par conséquent, pour demi-excentricité,

$$\sqrt{x'^2 - z'^2} = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

Les quatre sommets sont donc *les foyers* des deux ellipses principales situées, l'une dans le plan des xy, et l'autre dans celui des yz; et de plus, ses foyers coïncident avec ceux de la section principale, située dans le plan des xz. On construira donc aisément cette courbe, qui sera telle que $\mathrm{F\,F'\,F_1\,F'_1}$ (*fig.* 2).

20. L'équation de la synfocale devient ici

$$(\mathrm{D}_1)\qquad \frac{c^2-b^2}{c^4}\mathrm{Z}^2+\frac{a^2-b^2}{a^4}\mathrm{X}^2=1,$$

nouvelle ellipse ayant pour demi-axes

$$\mathrm{X}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}},\quad \text{et}\quad \mathrm{Z}=\frac{c^2}{\sqrt{c^2-b^2}},$$

quantités aisées à construire; et par suite, on a la courbe $\mathrm{DD_1D'D'_1}$.

On trouve, dans ce cas, pour les équations des plans directeurs,

$$\mathrm{X}\pm\mathrm{Z}\,\frac{a}{c}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}}-\frac{a^2x'}{a^2-b^2}\pm\frac{acz'}{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}=0,$$

lesquels sont imaginaires, puisque l'on suppose $a>b$ et $c>b$, et par conséquent *il n'y a point de plans directeurs perpendiculaires au plan du plus grand et du moyen axes de l'ellipsoïde* [*].

Quant à l'axe directeur perpendiculaire au même plan, il a pour équations

$$\mathrm{X}=\frac{a^2x'}{a^2-b^2},\quad \text{et}\quad \mathrm{Z}=\frac{c^2z'}{c^2-b^2}.$$

D'après cela, étant pris un point quelconque sur la focale $x'y'$, on aura les coordonnées du point conjugué de la synfocale X Z par les deux proportions

$$\mathrm{X}:x'::\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}:\sqrt{a^2-b^2},\quad \text{ou}\quad ::\mathrm{OD}:\mathrm{OF};$$

$$\mathrm{Z}:z'::\frac{c^2}{\sqrt{c^2-b^2}}:\sqrt{c^2-b^2},\quad \text{ou}\quad ::\mathrm{OD_1}:\mathrm{OF_1}.$$

---

[*] Les plans directeurs deviennent réels si l'on admet que, pour les cas où nous les avons obtenus imaginaires, la surface soit définie par l'équation

$$r^2=\frac{k}{2}(d^2+d'^2),$$

au lieu de

$$r^2=kdd'.$$

(*Voir* le Rapport de M. Cauchy et la Note IV.)

21. On a, dans ce cas, pour la valeur générale du rayon vecteur,

$$r^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}\left(x - \frac{a^2x'}{a^2-b^2}\right)^2 + \frac{c^2-b^2}{c^2}\left(z - \frac{c^2z'}{c^2-b^2}\right)^2.$$

Or si, par un certain point de la synfocale XZ, on mène un plan perpendiculaire à l'axe des z et que l'on considère le foyer F_2 conjugué à la section correspondante $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$, on aura, pour tous les points de cette section,

$$z = Z = \frac{c^2z'}{c^2-b^2},$$

et par conséquent, pour tous ces points, la valeur de r devient

$$r = \pm \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\left(x - \frac{a^2x'}{a^2-b^2}\right),$$

avec toujours $x < X$, ou $x < \frac{a^2x'}{a^2-b^2}$.

On aura donc en valeur absolue

$$r_1 = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\left(\frac{a^2x'}{a^2-b^2} - x\right),$$

pour la distance d'un certain point M quelconque de la section $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$ au foyer conjugué F_2; et si l'on désigne par d_1 la distance du même point M à l'axe directeur correspondant D_2, on aura

$$d_1 = X - x = \frac{a^2x'}{a^2-b^2} - x,$$

et partant,

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

Soient r et r' les distances d'un même point M quelconque de la section $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$ aux deux foyers conjugués F_2, F'_2; on aura, en valeur absolue,

$$r = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\left(\frac{a^2x'}{a^2-b^2} - x\right), \quad \text{et} \quad r' = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\left(\frac{a^2x'}{a^2-b^2} + x\right),$$

d'où

$$r + r' = \frac{2ax'}{\sqrt{a^2-b^2}},$$

valeur constante pour tous les points de la même section $\mathfrak{G}\mathfrak{G}'$ et variant d'une section à l'autre proportionnellement à la distance $2x'$ des deux foyers conjugués.

22. Si l'on fait les mêmes changements dans les formules du n° **17**, on verra exactement de la même manière que la normale à la surface au point M et chacun des deux rayons vecteurs MF_2 et MF'_2 sont situés dans un même plan perpendiculaire au plan des yz, et que la première de ces droites divise en deux parties égales l'angle des deux autres.

23. Revenons à la valeur générale de r^2 du n° **21**, et observons que, si l'on fait

$$x = \frac{a^2x'}{a^2 - b^2},$$

on obtient une valeur réelle, fonction de la seule variable z.

Je mène donc, par un certain point D_3 de la synfocale, un plan perpendiculaire à l'axe des x, lequel coupe la surface suivant la section $\gamma\gamma'$ et j'ai, pour tous les points de cette section,

$$x = X = \frac{a^2x'}{a^2 - b^2},$$

et par conséquent la valeur correspondante de r devient

$$r = \pm \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{c}\left(z - \frac{c^2z'}{c^2 - b^2}\right),$$

avec toujours visiblement $z < Z$, ou $z < \dfrac{c^2z'}{c^2 - b^2}$.

On aura donc, en valeur absolue,

$$r_1 = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{c}\left(\frac{c^2z'}{c^2 - b^2} - z\right),$$

pour la distance d'un certain point M quelconque de la section $\gamma\gamma'$ au foyer conjugué F_3. En opérant, du reste, comme on vient de faire, on trouvera pour la valeur constante du rapport de r_2 à d_2

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{c},$$

et pour la somme des rayons vecteurs menés d'un même point M quelconque de la section $\gamma\gamma'$ aux deux foyers conjugués F_3, F'_3,

$$r + r' = \frac{2cz'}{\sqrt{c^2 - b^2}},$$

valeur constante pour tous les points d'une même section et variant d'une section à l'autre proportionnellement à la distance $2z'$ des foyers conjugués.

24. Pour obtenir l'angle de la normale MN à la surface au point M, avec le rayon vecteur MF_3, prenons les projections de ces deux droites sur le plan des xy et sur celui des yz, lesquelles sont :

Pour la normale MN. . . . . $\left\{\begin{aligned} x - x_, &= \frac{b^2x_,}{a^2y_,}(y - y_,), \\ z - z_, &= \frac{b^2z_,}{c^2y_,}(y - y_,), \end{aligned}\right.$

et pour le rayon vecteur MF_3. . . . . . $\left\{\begin{aligned} x - x_, &= \frac{b^2x_,}{a^2y_,}(y - y_,), \\ z - z_, &= \frac{z_, - z'}{y_,}(y - y_,); \end{aligned}\right.$

en observant que l'on a

$$x_, = \frac{a^2x'}{a^2 - b^2}, \quad y' = 0, \quad \text{et} \quad \frac{z'^2}{c^2 - b^2} + \frac{x'^2}{a^2 - b^2} = 1,$$

pour le point F_3, d'où résulte

$$x_, - x' = \frac{b^2x_,}{a^2}.$$

On voit d'abord que la normale MN et le rayon vecteur MF_3 sont situés dans un même plan perpendiculaire au plan des xy.

Les équations du deuxième rayon vecteur MF'_3 ne diffèrent de celles de MF_3 que par le signe de z', et par conséquent le plan mené par la normale et par MF_3 contient aussi MF'_3.

De plus, si l'on calcule exactement, comme au n° **17**, la tangente de l'angle que fait la normale avec le rayon vecteur MF_3, on trouve une valeur qui, changée simplement de signe, devient la tangente de l'angle de la normale avec le rayon vecteur MF'_3, et par conséquent encore, la normale MN divise en deux parties égales l'angle des rayons vecteurs MF_3, MF'_3. Donc généralement :

Si l'on coupe un ellipsoïde par un plan perpendiculaire soit au grand axe, soit à l'axe moyen, il y a, pour chacune de ces sections, deux foyers conjugués appartenant à la focale située dans le plan du plus grand et du moyen axes; et 1° *la somme des rayons vecteurs menés d'un même point quelconque de chacune de ces sections aux deux foyers conjugués, est constante;* 2° *la normale à la surface en ce point de la section est dans le plan des mêmes rayons vecteurs et divise en deux parties égales l'angle de ces deux droites.*

De là résulte un moyen fort simple de mener un plan tangent à un ellipsoïde par un point M donné sur la surface. Comme on connaît les deux coordonnées OP et OQ de ce point, on déterminera facilement celles OP′ et OQ′ des foyers conjugués aux deux sections perpendiculaires $\beta\beta'$ et $\gamma\gamma'$ passant par M; puis, menant par le point P′ une parallèle à OZ et par Q′ une parallèle à OX, le point N où se coupent ces deux droites appartient à la normale menée par M. On construira donc la droite MN, et un plan perpendiculaire à cette droite au point N sera le plan tangent cherché.

25. Enfin, si l'on voulait obtenir la focale sur le plan des yz, c'est-à-dire sur le plan des deux plus petits axes de l'ellipsoïde, il n'y aurait qu'à changer x' en z' avec a en c et c en a dans l'équation (F) du n° **12**. On obtient ainsi l'équation

$$(F_2) \qquad \frac{y'^2}{a^2-b^2} + \frac{z'^2}{a^2-c^2} = -1,$$

laquelle représente toujours une courbe imaginaire. Ainsi, *dans le plan des deux plus petits axes de l'ellipsoïde, il n'y a pas de focale, ni par conséquent de synfocale.*

26. On trouvera des résultats parfaitement analogues pour *l'hyperboloïde à une nappe* en appliquant de la même manière les formules générales du premier paragraphe à l'équation de cette surface

$$(H) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ou plus simplement encore en changeant le signe de c^2 dans toutes les formules relatives à l'ellipsoïde.

On voit ainsi que, dans le plan des xy, c'est-à-dire dans le plan des deux axes réels de la surface, LA FOCALE *est une ellipse qui a pour sommets les foyers des deux hyperboles principales et pour foyers ceux de l'ellipse de gorge;* LA SYNFOCALE *est une autre ellipse qui a pour sommets les pieds des directrices des deux hyperboles principales*, etc., etc.

Dans le plan des xz, c'est-à-dire du plus grand axe réel et de l'axe imaginaire, on reconnaît que LA FOCALE *est une hyperbole qui a pour sommets les foyers de l'ellipse de gorge, et pour foyers ceux de l'hyperbole principale situés dans le même plan des* xz; LA SYNFOCALE *est une autre hyperbole, qui a pour sommets les pieds des directrices de l'ellipse de gorge, et pour asymptotes deux droites formant, avec chacune des asymptotes de la focale, un système de diamètres conjugués de l'hyperbole principale situés dans le plan des* xz.

Les plans directeurs sont toujours imaginaires pour cette surface.

Enfin il n'y a ni focale ni synfocale dans le plan des yz, c'est-à-dire dans le plan du plus petit axe réel et de l'axe imaginaire.

On démontre aussi, exactement comme pour l'ellipsoïde, qu'*il existe, pour chaque section de la surface par un plan perpendiculaire à l'un des axes*, pourvu *que ce plan rencontre une des deux synfocales, deux points d'une focale, ou* FOYERS CONJUGUÉS, *tels que les deux rayons vecteurs, menés d'un point quelconque de la section à ces deux foyers, donnent une somme ou une différence constante, suivant que la section est une ellipse ou une hyperbole, et que la normale à la surface au même point de la section est toujours située dans le plan de ces deux rayons vecteurs, et divise en parties égales l'angle de ces droites.*

27. Pour l'hyperboloïde à deux nappes

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

il n'y a qu'à changer de signe b^2 et c^2 dans la différence, résultats obtenus pour l'ellipsoïde.

On trouve ainsi que *la focale et la synfocale sont des ellipses sur le plan des* xy, *c'est-à-dire de l'axe réel et du plus petit des axes imaginaires, et des hyperboles dans le plan des* xz, *c'est-à-dire de l'axe réel et du plus grand axe imaginaire.*

Ces deux courbes sont imaginaires dans le plan des deux axes imaginaires.

Quant aux plans directeurs, *ils sont réels pour chaque point de la focale située dans le plan des xy, et imaginaires pour celle qui est située dans le plan des xz.*

Enfin, pour chaque section faite par un plan perpendiculaire à l'un des axes, il existe généralement deux foyers conjugués dont les propriétés peuvent s'énoncer comme dans le cas de l'hyperboloïde à une nappe.

28. Si nous appliquons nos formules générales du premier paragraphe au cône, qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

on trouve un point unique pour la focale et la synfocale situées dans le plan des xy.

Mais dans le plan des xz, c'est-à-dire dans le plan qui renferme l'axe du cône et le plus grand axe de la base elliptique, on trouve deux droites pour la focale et deux autres droites pour la synfocale, lesquelles se coupent toutes au sommet du cône et jouissent, en outre, de cette propriété, que chaque droite synfocale forme, avec une des droites focales, un système de diamètres conjugués d'une hyperbole réduite aux deux droites

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Tout plan mené perpendiculairement à l'axe du cône, ou bien au plus grand des axes de la base elliptique, coupe la surface suivant une courbe qui a pour foyers conjugués deux points de la focale, et les rayons vecteurs, menés de ces deux foyers à un point quelconque de la section, jouissent de toutes les propriétés précédemment énoncées pour les autres surfaces.

29. Au lieu de se servir des formules générales du premier paragraphe pour obtenir la focale, la synfocale, etc., d'une surface donnée, on pourrait chercher directement la focale par une marche qui offre quelque analogie avec celle qu'on suit ordinairement pour obtenir les foyers d'une courbe. En effet, nous avons reconnu que chaque point d'une focale jouit de cette propriété, que l'expression du carré de la distance de ce point à un point quelconque de la surface est décomposable en deux facteurs entiers, rationnels et du premier degré en fonction des coordonnées de ce dernier point. D'après cela, étant donnée l'équation d'une certaine surface, celle d'un ellipsoïde par exemple,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

cherchons le point ou plutôt le lieu de tous les points qui satisfont à cette condition.

Soient x', y', z' les coordonnées de l'un des points cherchés; on aura

$$r^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2 \tag{2}$$

pour la distance de ce point à un point quelconque x, y, z, et pour exprimer que c'est un point de la surface, je substitue dans l'équation (2), à z par exemple, sa valeur tirée de l'équation (1), ce qui donne

$$r^2=(x-x')^2+(y-y')^2+\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}-z'\right)^2. \tag{3}$$

Or, pour que r soit rationnel, il faut que r^2 le soit, ce qui exige que $z'=0$, et par conséquent déjà tous les points cherchés seront situés dans le plan des xy.

On aura, d'ailleurs, pour la valeur de r^2,

$$r^2=x^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)+y^2\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)-2xx'-2yy'+x'^2+y'^2-c^2. \tag{4}$$

Or, pour exprimer qu'une quantité de la forme

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E \tag{I}$$

est décomposable en deux facteurs entiers et rationnels du premier degré, on a la condition

$$AD^2+BC^2-4ABE=0, \tag{K}$$

laquelle devient ici

$$y'^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)+x'^2\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)-\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)(x'^2+y'^2-c^2)=0;$$

d'où, en réduisant et ordonnant,

$$\frac{y'^2}{c^2-b^2}-\frac{x'^2}{a^2-c^2}=-1,$$

équation de la focale de l'ellipsoïde située dans le plan des xy.

La relation (K) étant satisfaite, le polynôme (I) devient

$$A\left(x+y\sqrt{\frac{-B}{A}}+\frac{C}{2A}-\frac{D}{2\sqrt{-AB}}\right)\left(x-y\sqrt{\frac{-B}{A}}+\frac{C}{2A}+\frac{D}{2\sqrt{-AB}}\right),$$

et partant, on a

$$r^2=\frac{a^2-c^2}{a^2}\left[x+y\frac{a}{b}\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-c^2}}-\frac{a^2x'}{a^2-c^2}+\frac{y'ab}{\sqrt{(c^2-b^2)(a^2-c^2)}}\right]$$
$$\times\left[x-y\frac{a}{b}\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-c^2}}-\frac{2a^2x'}{a^2-c^2}-\frac{y'ab}{\sqrt{(c^2-b^2)(a^2-c^2)}}\right];$$

et chacun de ces facteurs égalé à zéro donne l'équation d'un système de deux plans directeurs correspondants à chaque point $x'y'$ que l'on considère sur la focale.

En ajoutant et retranchant les équations des deux plans directeurs, on a

$$x=\frac{a^2x'}{a^2-c^2},\quad \text{et}\quad y=-\frac{b^2y'}{c^2-b^2}$$

pour déterminer le pied de l'intersection de ces deux plans.

L'élimination de x' et y' entre ces deux équations et celle de la focale donne la synfocale.

La valeur précédente de r^2 peut aussi s'écrire

$$r^2=\frac{a^2-c^2}{a^2}\left(x-\frac{a^2x'}{a^2-c^2}\right)^2-\frac{c^2-b^2}{b^2}\left(y+\frac{b^2y'}{c^2-b^2}\right)^2,$$

et toutes les propriétés des foyers conjugués et des rayons vecteurs se démontreront exactement, comme on l'a déjà fait aux n^{os} **15** et suivants.

Si, au lieu de substituer dans la valeur de r celle de z tirée de l'équation (1), on avait substitué la valeur de y ou bien celle de x, on aurait obtenu, pour l'équation de la focale sur le plan des zx et sur celui des zy, exactement les équations (F_1) et (F_2), que nous avons trouvées aux n^{os} **19** et **25**.

§ III.

Propriétés des focales, synfocales et plans directeurs dans les surfaces dénuées de centre et particulièrement dans le paraboloïde elliptique.

30. L'équation du paraboloïde elliptique étant supposée (*fig.* 3)

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{p'} = 2x,$$

on obtiendra, soit en substituant dans l'équation générale (φ) les valeurs

$$L = 0, \quad M = \frac{1}{p}, \quad N = \frac{1}{p'}, \quad P = -1, \quad R = 0,$$

soit en la calculant directement d'après ce qui vient d'être dit, l'équation de la focale située dans le plan des xy,

$$(G) \qquad y'^2 = (p - p')(2x' - p').$$

Nous supposerons $p > p'$, et alors on voit que la focale du paraboloïde elliptique, située dans le plan de la parabole principale qui a le plus grand paramètre, est une parabole ayant son axe dirigé dans le même sens que celui de la surface et suivant la même droite. Elle a son sommet situé à une distance $\frac{p'}{2}$ de l'origine, et par conséquent au foyer de la parabole principale $z^2 = 2p'x$; quant à son foyer, il coïncide avec celui de la parabole principale $y^2 = 2px$, car il est éloigné de l'origine des axes de $\frac{p-p'}{2} + \frac{p'}{2} = \frac{p}{2}$.

31. On obtient de la même manière, pour la synfocale,

$$(H) \qquad Y^2 = \frac{p^2}{p-p'}(2X + p'),$$

nouvelle parabole ayant son axe dirigé dans le même sens et suivant la même droite que la focale. Son sommet, distant de l'origine de $-\frac{p'}{2}$, est situé au pied de la directrice de la parabole principale $z^2 = 2p'x$. Si l'on désigne son paramètre par P, on l'obtiendra, et par conséquent son foyer, par la proportion $p - p' : p :: p : \mathrm{P}$.

En considérant un point $x'y'$ de la focale, on a, pour les équations des plans directeurs correspondants,

$$\mathrm{X} \pm \mathrm{Y}\sqrt{\frac{p'-p}{p}} - x' + p' \pm y'\sqrt{\frac{p}{p'-p}} = 0,$$

lesquelles sont imaginaires. Quant à l'axe directeur, il sera déterminé par les deux équations

$$\mathrm{X} = x' - p', \quad \text{et} \quad \mathrm{Y} = \frac{py'}{p-p'},$$

lesquelles expriment aussi les relations entre deux points conjugués de la focale et de la synfocale.

32. La valeur générale de r^2, fournie par l'équation (ρ) du n° **8**, devient ici

$$r^2 = (x - x' + p')^2 + \frac{p-p'}{p}\left(y - \frac{py'}{p-p'}\right)^2.$$

Or, soit pris un point F_2 arbitrairement sur la focale, et soit D_2 le point conjugué de la synfocale; si par ce dernier point on mène un plan perpendiculaire à l'axe OY, on aura, pour tous les points de la section $\alpha\alpha'$ ainsi déterminés,

$$y = \mathrm{Y} = \frac{py'}{p-p'},$$

et partant, la distance du point F_2 à un point quelconque de cette section parabolique sera

$$r = \pm(x - x' + p').$$

D'ailleurs on a évidemment, pour tous les points de cette section,

$$x > \mathrm{X} \quad \text{ou} \quad x > x' + p',$$

et partant, en valeur absolue,

$$r = x + p - x'.$$

Soit d la distance d'un certain point M de la section α à l'axe directeur correspondant, on aura

$$d = x - X = x + p - x', \quad \text{et partant} \quad r = d.$$

Donc généralement *tout point* M *de la parabole α est également distant du foyer conjugué* F_2 *et de l'axe directeur correspondant.*

33. Cherchons ensuite l'angle du rayon vecteur MF_2 avec la normale à la surface au point M.

Les équations de cette normale sont

$$(\text{MN}) \qquad \left\{ \begin{aligned} x - x_i &= -\frac{p'}{z_i}(z - z_i), \\ y - y_i &= \frac{p'y_i}{pz_i}(z - z_i), \end{aligned} \right.$$

avec la relation

$$\frac{y_i^2}{p} + \frac{z_i^2}{p'} = 2x_i;$$

les équations de MF_2 seront

$$(\text{MF}_2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x - x_i &= \frac{x_i - x'}{z_i}(z - z_i), \\ y - y_i &= \frac{p'y_i}{pz_i}(z - z_i); \end{aligned} \right.$$

car les coordonnées du point F_2 satisfont aux conditions

$$z' = 0, \quad y'^2 = (p - p')(2x' - p'), \quad \text{et} \quad y_i = \frac{py'}{p - p'},$$

d'où résulte

$$y_i - y' = \frac{p'y'}{p - p'} = \frac{p'y_i}{p}.$$

On voit d'abord que *la normale* MN *et le rayon vecteur* MF_2 *sont dans un même plan perpendiculaire au plan des* yz.

D'ailleurs V désignant l'angle de ces deux droites, nous avons

$$\operatorname{tang} V = \frac{(\alpha - \alpha')\sqrt{1+\beta^2}}{\alpha\alpha' + \beta^2 + 1},$$

avec

$$\alpha = -\frac{p'}{z_{,}}, \quad \alpha' = \frac{x_{,} - x'}{z_{,}}, \quad \text{et} \quad \beta = \frac{p'y_{,}}{pz_{,}},$$

ce qui donne

$$\operatorname{tang} V = \frac{(p' + x_{,} - x')\sqrt{p^2 z_{,}^2 + p'^2 y_{,}^2}}{pp'(x_{,} - x') - \frac{p'^2}{p} y_{,}^2 - p z_{,}^2};$$

puis, remplaçant $z_{,}$ par sa valeur en x', y', et observant que

$$y_{,}^2 = \frac{2p^2\left(x' - \frac{p}{2}\right)}{p - p'},$$

on a enfin

$$\operatorname{tang} V = \frac{\sqrt{p^2 z_{,}^2 + p'^2 y_{,}^2}}{pp'},$$

en supprimant $p' + x_{,} - x'$, facteur commun.

Or cherchons l'angle de la normale MN avec l'axe des x, et pour cela substituons, dans la formule

$$\operatorname{tang}(\mathrm{N}x) = \frac{\sqrt{\beta^2 + 1}}{\alpha},$$

à α et β leurs valeurs, et nous avons

$$\operatorname{tang}(\mathrm{N}x) = -\frac{\sqrt{p^2 z_{,}^2 + p'^2 y_{,}^2}}{pp'} = -\operatorname{tang} V.$$

Donc généralement : *Si par un point* M *quelconque de la section perpendiculaire* α *on mène un rayon vecteur allant au foyer* F_2 *et une parallèle à l'axe, la normale à la surface au point* M *sera dans le plan de ces deux droites et fera des angles égaux avec chacune d'elles.*

34. Soit mené par le même point D_2 de la synfocale, conjugué au foyer F_2, un plan perpendiculaire à l'axe des x, et admettons que ce plan coupe la surface; la ligne d'intersection sera une ellipse $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$, et l'on aura pour tous les points de cette courbe,

$$x = \mathrm{X} = x' - p',$$

et par conséquent il viendra pour les valeurs correspondantes de r,

$$r = \pm\sqrt{\frac{p-p'}{p}}\left(y - \frac{py'}{p-p'}\right).$$

On a d'ailleurs, pour tous les points de cette section,

$$y < \mathrm{Y}, \quad \text{ou} \quad y < \frac{py'}{p-p'},$$

et par conséquent, en valeur absolue,

$$r = \sqrt{\frac{p-p'}{p}}\left(\frac{py'}{p-p'} - y\right).$$

Or, soit $d_{\prime}$ la distance du même point M′ de la section $\mathfrak{C}\mathfrak{C}'$ à l'axe directeur correspondant; on a visiblement

$$d_{\prime} = \mathrm{Y} - y = \frac{py'}{p-p'} - y,$$

et par conséquent,

$$\frac{d_{\prime}}{r_{\prime}} = \sqrt{\frac{p}{p-p'}}.$$

Si l'on désigne par r' la distance du même point M′ au deuxième foyer conjugué F''_2, on aura

$$r' = \sqrt{\frac{p-p'}{p}}\left(\frac{py'}{p-p'} + y\right),$$

et par conséquent il vient

$$r + r' = 2y'\sqrt{\frac{p}{p-p'}},$$

ou encore

$$r + r' = 2y' \times \frac{d_{\prime}}{r_{\prime}},$$

valeur constante pour tous les points d'une même section et variant d'une section à l'autre, proportionnellement à la distance $2y'$ des foyers conjugués.

35. Cherchons, comme précédemment, l'angle de la normale au point M' avec le rayon vecteur $M'F_2$. Comme on a, pour le point F_2,

$$z' = 0, \quad \text{et} \quad x_{,} = x' - p',$$

les équations de $M'F_2$ sont

$$(M'F_2) \quad \begin{cases} x - x_{,} = -\dfrac{p'}{z'}(z - z_{,}), \\ y - y_{,} = \dfrac{y_{,} - y'}{z_{,}}(z - z_{,}). \end{cases}$$

Les équations de la normale étant toujours celles du n° **33**, on voit d'abord que la normale au point M' et le rayon vecteur $M'F_2$ sont dans un même plan perpendiculaire au plan des xz. Comme il en serait de même du rayon vecteur $M'F_2$, la normale est toujours contenue dans le plan de ces deux rayons vecteurs.

Si l'on calcule, comme précédemment, l'angle V de la normale M'N' et du rayon vecteur $M'F_2$, on trouvera

$$\tang V = \frac{(p-p')\sqrt{z_{,}^2 + p'^2}}{p'y'};$$

et si l'on désigne par V' l'angle de la normale M'N' avec le deuxième rayon vecteur $M'F'_2$, on aura visiblement

$$\tang V' = -\tang V,$$

et par conséquent, *la normale* M'N' *divise en deux parties égales l'angle des deux rayons vecteurs* $M'F_2$ *et* $M'F'_2$.

36. Cherchons maintenant (*fig.* 4) les résultats analogues sur le plan des xz, c'est-à-dire sur le plan de la parabole principale qui a le plus petit paramètre, et pour cela, changeons dans les formules précédentes y en z avec p en p' et p' en p. Nous obtenons ainsi pour l'équation de la focale,

$$(G_1) \qquad z'^2 = -(p-p')(2x'-p),$$

laquelle est une parabole ayant son axe dirigé suivant celui de la parabole principale $z^2 = 2p'x$, mais en sens contraire; elle a d'ailleurs pour sommet le foyer de la parabole principale $y^2 = 2px$ et pour foyer celui de la première, car ce point est distant de l'origine de

$$\frac{p}{2} - \frac{p-p'}{2} = \frac{p'}{2}.$$

La synfocale a pour équation

$$(k_1) \qquad \mathrm{Z}^2 = -\frac{p'^2}{p-p'}(2\mathrm{X} + p),$$

et par conséquent, cette courbe est aussi une parabole ayant son axe dirigé suivant la même ligne et dans le même sens que celui de la focale; elle a d'ailleurs pour sommet le pied de la directrice de la parabole principale $y^2 = 2px$, et pour demi-paramètre $\mathrm{P} = \frac{p'^2}{p-p'}$, quantité qui se construit par la proportion

$$p - p' : p' :: p' : \mathrm{P}.$$

37. Les plans directeurs ont pour équations

$$\mathrm{X} + \mathrm{Z}\sqrt{\frac{p-p'}{p}} - x' + p + z'\sqrt{\frac{p}{p-p'}} = 0,$$
$$\mathrm{X} - \mathrm{Z}\sqrt{\frac{p-p'}{p}} - x' + p - z'\sqrt{\frac{p}{p-p'}} = 0,$$

lesquelles sont toujours réelles, et par conséquent, pour chaque point de la focale $x'z'$ il existe un système de deux plans directeurs.

On a, pour déterminer l'axe directeur ou bien pour exprimer les relations entre les coordonnées de deux points conjugués,

$$\mathrm{X} = x' - p, \quad \mathrm{Z} = -\frac{z'p}{p-p'},$$

et par conséquent, *pour obtenir les plans directeurs correspondants à un point* F_2 *quelconque de la focale, on construira le point* D_2 *conjugué à* F_2, *puis par ce point on mènera des parallèles aux deux droites* DL, DL', *dont les équations*

$$\mathrm{X} = \pm \mathrm{Z}\sqrt{\frac{p-p'}{p}} - \frac{p}{2},$$

s'obtiennent en faisant

$$z' = 0, \quad \text{et} \quad x' = \frac{p}{2},$$

dans les précédentes.

38. Nous avons ici, pour la valeur générale du rayon vecteur,

$$r^2 = (x - x' + p)^2 - \frac{p-p'}{p}\left(z + \frac{z'p}{p-p'}\right)^2.$$

Si dans cette valeur on posait $x = x' - p$, toutes les valeurs correspondantes de r seraient imaginaires; et, en effet, aucun plan mené par un point quelconque de la synfocale, perpendiculairement à l'axe Ox, ne peut rencontrer la surface.

Mais par le point D_2 de la synfocale, conjugué au foyer F_2, menons un plan perpendiculaire à l'axe Oz, ce plan coupera le paraboloïde suivant une parabole α, pour chaque point de laquelle on aura

$$z = -\frac{pz'}{p-p'},$$

et partant il vient, pour la distance d'un point quelconque de cette courbe au foyer F_2,

$$r = x - x' + p.$$

Soit d la distance d'un point M quelconque de cette même section à l'axe directeur correspondant; on a

$$d = x - X = x - x' + p, \quad \text{et partant,} \quad r = d.$$

Donc : *Tous les points d'une même section quelconque, faite par un plan perpendiculaire à l'axe* Oz, *sont également distants du foyer conjugué et de l'axe directeur correspondant.*

On démontrera d'ailleurs, en opérant exactement comme au n° **33**, que *la normale à la surface, en un point* M *quelconque de la section* α, *divise en deux parties égales l'angle formé par le rayon vecteur* MF_2 *et une parallèle à l'axe menée par le point* M.

39. Pour obtenir les résultats correspondants dans le paraboloïde hyperbolique

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{p'} = 2x,$$

il suffira de changer le signe de p' dans toutes les formules relatives au paraboloïde elliptique, et l'on verra ainsi que, sur le plan des xy, la focale est une parabole qui a pour sommet le foyer de la parabole principale $z^2 = -2p'x$ et pour foyer celui de l'autre parabole principale $y^2 = 2px$; et la synfocale une autre parabole, ayant son axe situé sur la même droite et dirigé dans le même sens que celui de la focale, ayant d'ailleurs pour sommet le pied de la directrice de la parabole $z^2 = -2p'x$, et pour demi-paramètre $P = \frac{p^2}{p+p'}$.

Sur le plan des xz la focale est encore une parabole qui a pour sommet le foyer de la parabole principale $y^2 = 2px$, et pour foyer celui de la deuxième parabole principale $z^2 = -2p'x$; la synfocale est aussi une parabole qui a pour sommet le pied de la directrice de la parabole $y^2 = 2px$, et pour demi-paramètre $P = \frac{p'^2}{p+p'}$.

Les plans directeurs sont toujours imaginaires.

On reconnaît enfin que, si par un point quelconque d'une synfocale on mène un plan perpendiculaire à l'un des trois axes des coordonnées qui coupe la surface, il y aura pour cette section un point ou bien deux points de la focale, suivant qu'elle sera une parabole ou une hyperbole, jouissant de toutes les propriétés ordinaires des *foyers conjugués*.

40. Si l'on applique les formules générales du premier paragraphe au cylindre à base elliptique ou hyperbolique

$$\frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

ou bien au cylindre à base parabolique

$$z^2 = 2qx,$$

on trouve pour focale, dans le premier cas, deux droites, et dans le second, une seule, parallèles à l'axe du cylindre et passant par les foyers de la base; on trouve pareillement pour synfocales deux droites dans le premier cas et une dans le second, parallèles à l'axe et passant par les pieds des directrices de la base.

Dans l'un comme dans l'autre cas, les plans directeurs sont imaginaires.

Si l'on cherche les propriétés des rayons vecteurs, comme les points conjugués de la focale et de la synfocale sont situés sur une même parallèle à l'axe de la base, on retombe sur les propriétés connues des foyers et des directrices des lignes du deuxième ordre.

41. Concluons de cette discussion une remarque générale: c'est que pour toutes les surfaces du deuxième ordre qui admettent une *génératrice rectiligne*, tous les systèmes de plans directeurs sont constamment imaginaires, tandis que pour chacune des trois surfaces non susceptibles d'être engendrées par une ligne droite, *l'ellipsoïde, l'hyperboloïde à deux nappes, et le paraboloïde elliptique*, il existe pour chacun des points d'une seule focale un système de deux plans directeurs toujours réels.

§ IV.

Application de la théorie des focales à la discussion d'une surface du deuxième ordre donnée par son équation.

42. Soit l'équation générale du deuxième degré entre trois variables,

$$(\mathrm{A})\qquad \left\{\begin{array}{r} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D \end{array}\right\} = 0.$$

Cherchons si, sous cette forme, la surface représentée par cette équation admet une ou plusieurs focales. Or l'équation (3) du n° **4** représente toutes les surfaces qui admettent des foyers; cherchons donc si l'on peut déterminer un ou plusieurs systèmes de valeurs des quantités h, m, m', n, n', p, p', x', y' et z', qui rendent l'équation (3) identique avec l'équation donnée (A). Pour cela, multiplions l'équation (3) par un facteur indéterminé s, puis identifions avec (A), nous aurons les relations :

$$(a)\qquad s(1-h)=\mathrm{A},\quad s(1-hmm')=\mathrm{A}',\quad s(1-hnn')=\mathrm{A}'';$$

$$(b)\qquad \left\{\begin{array}{ll} sh(mn'+m'n)=-2\mathrm{B}, & sh(n+n')=-2\mathrm{B}',\\ & sh(m+m')=-2\mathrm{B}''; \end{array}\right.$$

$$(c)\qquad \left\{\begin{array}{ll} s[2x'+h(p+p')]=-2\mathrm{C}, & s[2y'+h(mp'+m'p)]=-2\mathrm{C}',\\ & s[2z'+h(np'+p'n)]=-2\mathrm{C}''; \end{array}\right.$$

$$(d)\qquad s(x'^2+y'^2+z'^2-hpp')=\mathrm{D}.$$

43. Nous avons ainsi *dix* équations entre onze indéterminées. Les six premières donneront généralement les valeurs des six inconnues s, h, m, m', n et n'; celles-ci étant substituées dans les quatre dernières, on pourra déduire de deux des équations (c) la valeur de p et p', lesquelles étant substituées dans la troisième équation (c), donneront une équation du premier degré en x', y', z', laquelle sera celle d'un *plan focal*.

Or on tire de la première des équations (a),

$$sh=s-\mathrm{A};$$

et en substituant cette valeur dans les deux autres équations (a), ainsi que dans les équations (b), on a

$$(e)\qquad \left\{\begin{array}{lll} mm'=\dfrac{s-\mathrm{A}'}{s-\mathrm{A}}, & nn'=\dfrac{s-\mathrm{A}''}{s-\mathrm{A}}, & \\ m+m'=-\dfrac{2\mathrm{B}''}{s-\mathrm{A}}, & n+n'=-\dfrac{2\mathrm{B}'}{s-\mathrm{A}}, & mn'+m'n=-\dfrac{2\mathrm{B}}{s-\mathrm{A}}; \end{array}\right.$$

et il s'agit d'éliminer m, m', n et n' entre ces cinq équations. On y peut arriver de plusieurs manières : d'abord j'observe que si l'on a deux équations du deuxième degré de la forme

$$(f)\qquad y^2-\mathrm{H}y+\mathrm{K}=0,\quad \text{et}\quad z^2-\mathrm{H}'z+\mathrm{K}'=0,$$

on peut former une équation en (t) dont les racines soient les sommes des produits 2 à 2 des racines de ces deux équations. Soit posé

$$t=y'z''+z'y'',$$

on aura

$$(\mathrm{T})\qquad t^2 - \mathrm{HH}'t + \mathrm{KH}'^2 + \mathrm{K}'\mathrm{H}^2 - 4\mathrm{KK}' = 0.$$

Je pose donc

$$\mathrm{H} = m + m' = -\frac{2\mathrm{B}''}{s-\mathrm{A}},\quad \mathrm{H}' = n + n' = -\frac{2\mathrm{B}'}{s-\mathrm{A}},$$

$$\mathrm{K} = mm' = \frac{s-\mathrm{A}'}{s-\mathrm{A}},\qquad \mathrm{K}' = nn' = \frac{s-\mathrm{A}''}{s-\mathrm{A}},$$

et j'ai

$$t = mn' + m'n = -\frac{2\mathrm{B}}{s-\mathrm{A}},$$

valeurs qui, étant substituées dans l'équation (T), nous donnent

$$\frac{4\mathrm{B}^2}{(s-\mathrm{A})^2} + \frac{8\mathrm{BB}'\mathrm{B}''}{(s-\mathrm{A})^3} + \frac{4\mathrm{B}'^2(s-\mathrm{A}')}{(s-\mathrm{A})^3} + \frac{4\mathrm{B}''^2(s-\mathrm{A}'')}{(s-\mathrm{A})^3} - \frac{4(s-\mathrm{A}')(s-\mathrm{A}'')}{(s-\mathrm{A})^2} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$(s)\quad \left.\begin{aligned} &s^3 - (\mathrm{A}+\mathrm{A}'+\mathrm{A}'')s^2 + (\mathrm{AA}'+\mathrm{AA}''+\mathrm{A}'\mathrm{A}''-\mathrm{B}^2-\mathrm{B}'^2-\mathrm{B}''^2)s \\ &\qquad - (\mathrm{AA}'\mathrm{A}'' + 2\mathrm{BB}'\mathrm{B}'' - \mathrm{AB}^2 - \mathrm{A}'\mathrm{B}'^2 - \mathrm{A}''\mathrm{B}''^2) \end{aligned}\right\} = 0,$$

équation connue. M. Cauchy a prouvé directement qu'elle a toujours ses trois racines réelles; or il peut y en avoir une, ou même deux égales à zéro, mais elles ne le sont jamais toutes les trois ensemble, car si l'on avait en même temps

$$\mathrm{A} + \mathrm{A}' + \mathrm{A}'' = 0,\quad \text{et}\quad \mathrm{AA}' + \mathrm{AA}'' + \mathrm{A}'\mathrm{A}'' - \mathrm{B}^2 - \mathrm{B}'^2 - \mathrm{B}''^2 = 0,$$

on en déduirait

$$\mathrm{A}^2 + \mathrm{A}'^2 + \mathrm{A}''^2 + 2\mathrm{B}^2 + 2\mathrm{B}'^2 + 2\mathrm{B}''^2 = 0,$$

d'où

$$\mathrm{A} = 0,\quad \mathrm{A}' = 0,\quad \mathrm{A}'' = 0,\quad \mathrm{B} = 0,\quad \mathrm{B}' = 0,\quad \mathrm{B}'' = 0,$$

et partant l'équation proposée cesserait d'être du deuxième degré.

Mais pour effectuer autrement l'élimination de m, m',... entre les équations (e), j'observe que ces équations donnent les sommes des quantités m et m', n et n', mn' et $m'n$ en fonction de s, et qu'il est aisé d'en déduire les valeurs des différences des mêmes quantités. Or, *étant* *données les trois fractions*

$$\frac{m}{m'},\quad \frac{n}{n'},\quad \text{et}\quad \frac{mn'}{m'n},$$

si l'on forme les trois suivantes

$$\frac{m+m'}{m-m'},\quad \frac{n+n'}{n-n'},\quad \frac{mn'+m'n}{mn'-m'n},$$

le produit de la première par la somme des deux autres, diminué du produit des deux dernières, est toujours égal à l'unité [*]. On a donc

$$\frac{m+m'}{m-m'}\left(\frac{n+n'}{n-n'}+\frac{mn'+m'n}{mn'-m'n}\right)-\frac{n+n'}{n-n'}\times\frac{mn'+m'n}{mn'-m'n}=1,$$

ou bien

$$(v)\quad \frac{(m+m')(n+n')}{(m-m')(n-n')}+\frac{(m+m')(mn'+m'n)}{(m-m')(mn'-m'n)}+\frac{(n+n')(mn'+m'n)}{(n'-n)(mn'-m'n)}=1.$$

Or on déduit des équations (e) :

$$(m+m')(n+n')=\frac{4B'B''}{(s-A)^2},$$

$$(m+m')(mn'+m'n)=\frac{4BB''}{(s-A)^2},$$

$$(n+n')(mn'+m'n)=\frac{4BB'}{(s-A)^2},$$

$$(m-m')(n-n')=(m+m')(n+n')-2(mn'+m'n)$$
$$=\frac{4[B'B''+B(s-A)]}{(s-A)^2},$$

$$(mn'-m'n)(m-m')=(mn'+m'n)(m+m')-2mm'(n+n')$$
$$=\frac{4[BB''+B'(s-A')]}{(s-A)^2},$$

$$(mn'-m'n)(n'-n)=(mn'+m'n)(n+n')-2nn'(m+m')$$
$$=\frac{4[BB'+B''(s-A'')]}{(s-A)^2};$$

---

[*] Ce théorème, donné ici sans démonstration, a été généralisé et démontré par M. Cauchy. (*Voir* le Rapport de M. Cauchy, Note VII^e^.)

et si l'on substitue toutes ces valeurs dans l'équation (φ), on a enfin

$$(s_1)\qquad \frac{B'B''}{B'B''+B(s-A)}+\frac{BB''}{BB''+B'(s-A)}+\frac{BB'}{BB'+B''(s-A)}=1,$$

équation qui n'est autre que l'équation (s); mais on l'obtient ainsi immédiatement sous la forme remarquable que lui a donnée M. Jacobi, et qui met en évidence la réalité de ses trois racines.

44. Supposons donc que l'on ait déduit de l'équation (s) une racine réelle et différente de zéro, $s = s_1$; on aura d'abord

$$h_1 = \frac{s_1 - A}{s_1},$$

puis on déduira les valeurs correspondantes de m, m', n et n' des quatre premières équations (e), et l'on aura visiblement pour chaque valeur de s un système unique de valeurs de h, m, m', n et n'.

Or, pour un quelconque de ces systèmes, les deux dernières équations (c) donneront

$$p = \frac{2(ny_1 - mz_1)}{h(mn' - nm')}, \quad \text{et} \quad p' = \frac{2(m'z_1 - n'y_1)}{h(mn' - nm')},$$

en posant, pour abréger,

$$y_1 = y' + \frac{C'}{s}, \quad \text{et} \quad z_1 = z' + \frac{C''}{s}$$

Posant pareillement

$$x_1 = x' + \frac{C}{s},$$

et substituant ces valeurs dans la première équation (c), on a

$$x_1(mn' - m'n) + y_1(n - n') + z_1(m' - m) = 0,$$

ou bien

$$\frac{x' + \frac{C}{s}}{(m - m')(n - n')} + \frac{y' + \frac{C'}{s}}{(mn' - m'n)(m - m')} + \frac{z' + \frac{C''}{s}}{(mn' - m'n)(n' - n)} = 0,$$

ou enfin, d'après les relations du numéro précédent,

$$(g)\qquad \frac{x'+\frac{C}{s}}{B'B''+B(s-A)}+\frac{y'+\frac{C'}{s}}{BB''+B'(s-A')}+\frac{z'+\frac{C''}{s}}{BB'+B''(s-A'')}=0.$$

Cette équation, pour chaque valeur de s réelle et différente de zéro, représente un *plan focal*, et l'on voit immédiatement que *tout plan représenté par l'équation générale* (g) *est un plan diamétral principal de la surface*. Car, soit pris ce plan pour l'un des plans coordonnés, par exemple pour plan des xy, il faudra que l'on ait $z'=0$, quels que soient x' et y', ce qui exige que

$$C''=0,\quad B=0,\quad \text{et}\quad B'=0.$$

45. Supposons que l'on ait déterminé une des trois valeurs de s, en fonction des coefficients A, A',..., B''; l'équation (3) du n° **4**, multipliée par cette valeur, sera identique avec l'équation (A) du n° **42**, et ces deux équations resteront identiques, quel que soit le système d'axes de coordonnées auquel on les rapporte simultanément. Or les axes de coordonnées, pour lesquels l'équation (A) prend la forme

$$(L)\qquad Lx^2+My^2+Nz^2+2Px+2P'y+2P''z+D=0,$$

donnent nécessairement

$$n=0,\quad n'=0,\quad m'=-m,$$

et par conséquent, l'équation (3) étant supposée rapportée au même système d'axes, on aura, pour les équations de condition (a),

$$s(1-h)=L,\quad s(1+hm^2)=M,\quad s=N.$$

Donc le coefficient N est précisément l'une des trois racines de l'équation (s). A cause de la symétrie de l'équation (L), on a visiblement

$$L=s_1,\quad M=s_2,\quad N=s_3.$$

Donc généralement : *Étant donnée une équation quelconque du deuxième degré entre trois variables, si l'on forme l'équation* (s), *les trois racines de cette équation* s_1, s_2, s_3 *expriment les valeurs des* *coefficients des carrés des variables que l'on obtiendrait, en changeant la direction des axes, par les formules de la transformation des coordonnées, de manière que l'équation de la surface proposée fût débarrassée des rectangles des variables.*

Il résulte de là que si l'équation (s) a une ou bien deux racines égales à zéro, l'équation de la surface ramenée à la forme L ne contiendra que deux ou bien un seul des carrés des variables.

46. D'après cela, étant donnée une équation quelconque du deuxième degré entre trois variables, pour reconnaître quelle surface elle représente et déterminer complétement cette surface, nous commencerons par former l'équation (s) et nous distinguerons trois cas, suivant que l'on aura

1°. *Les trois valeurs de s différentes de zéro;*

2°. *Une seule des valeurs de s égale à zéro;*

3°. *Deux des valeurs de s égales à zéro.*

Dans le premier cas, si l'on suppose l'équation ramenée à la forme (L), elle renfermera les trois carrés, et par conséquent la surface sera *un ellipsoïde* qui pourra se réduire à *un point* ou devenir *imaginaire*, *un hyperboloïde à une* ou *à deux nappes*, enfin *un cône.*

Dans le deuxième, soit

$$s_1 = 0,$$

on aura

$$L = 0,$$

et l'équation de la surface pourra être ramenée à la forme

$$My^2 + Nz^2 + 2Px + R = 0,$$

et par conséquent la surface sera *l'un des deux paraboloïdes, un cylindre à base d'ellipse* ou *d'hyperbole*, ou enfin *deux plans qui se coupent.*

Dans le troisième cas, soient

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0,$$

on aura

$$L = 0, \quad M = 0,$$

et l'équation pourra être ramenée à la forme

$$Nz^2 + 2Px + R = 0,$$

et par conséquent la surface ne pourra être qu'*un cylindre parabolique, un système de deux plans parallèles, ou un plan unique.*

47. Pour distinguer maintenant ces différentes variétés, nous transporterons les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes en un certain point de l'espace $(x_{,}, y_{,}, z_{,})$, et l'équation (A) deviendra

$$(\mathrm{A}') \qquad \left\{ \begin{array}{r} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2C_{,}x + 2C'_{,}y + 2C''_{,}z + D_{,} \end{array} \right\} = 0,$$

en posant, pour abréger,

$$\begin{aligned} C_{,} &= Ax_{,} + B''y_{,} + B'z_{,} + C, \\ C'_{,} &= B''x_{,} + A'y_{,} + Bz_{,} + C', \\ C''_{,} &= B'x_{,} + By_{,} + A''z_{,} + C'', \\ D_{,} &= Ax_{,}^2 + A'y_{,}^2 + A''z_{,}^2 + 2By_{,}z_{,} + 2B'x_{,}z_{,} \\ &\quad + 2B''x_{,}y_{,} + 2Cx_{,} + 2C'y_{,} + 2C''z' + D. \end{aligned}$$

Si nous posons les trois équations

$$(\mathrm{C}) \qquad C_{,} = 0, \quad C'_{,} = 0, \quad C''_{,} = 0,$$

les valeurs qu'on en déduira pour $x_{,}$, $y_{,}$, z, seront les coordonnées du centre de la surface.

Dans le cas où les trois valeurs de s sont différentes de zéro, les équations (C) donneront pour $x_{,}$, $y_{,}$, z, un système unique de valeurs finies, et réciproquement; car toutes les surfaces de cette première classe sont douées d'un centre unique.

Les coordonnées du centre étant ainsi calculées, on les substituera dans $D_{,}$, et il peut arriver qu'elles donnent $D_{,} = 0$. Alors la surface sera un point unique ou un cône; elle sera un point si les trois valeurs de s sont de même signe, et un cône s'il y en a une de signe contraire aux deux autres.

Dans le cas où les coordonnées du centre rendront $D_{,}$ différent de zéro, l'équation de la surface deviendra

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + D_{,} = 0;$$

et si l'on donne aux axes de coordonnées une direction convenable,

$$s_1 x^2 + s_2 y^2 + s_3 z^2 + D_{,} = 0.$$

Par conséquent, en désignant par a, b, c les longueurs des demi-axes, on aura

$$a^2 = -\frac{D_{,}}{s_1}, \quad b^2 = -\frac{D_{,}}{s_2}, \quad c^2 = -\frac{D_{,}}{s_3},$$

et l'on distinguera l'espèce de la surface d'après le nombre des racines de l'équation (s) qui seront de même signe que $D_{,}$, savoir : aucune, *ellipsoïde;* une seule, *hyperboloïde à une nappe;* deux, *hyperboloïde à deux nappes;* toutes trois, *surface imaginaire.*

Quant à la direction des axes, l'équation (s) étant supposée résolue, on substituera successivement les trois valeurs s_1, s_2, s_3 dans l'équation générale (g), et l'on aura les trois plans diamétraux principaux qui se couperont deux à deux suivant trois droites dont la direction sera celle des axes de la surface.

48. Passons au cas où l'équation (s) a une seule de ses racines égale à zéro.

Si la surface consiste en deux plans qui se coupent, un point quelconque de la ligne d'intersection peut être considéré comme un centre, et par conséquent les coordonnées de l'un quelconque de ces points doivent vérifier à la fois les trois équations (C) et donner, en outre,

$$D_{,} = 0.$$

Donc, si l'on attribue à l'une des trois inconnues $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ une valeur arbitraire quelconque, on déduira de deux des équations (C) des valeurs finies et déterminées pour les deux autres inconnues, et ces trois valeurs devront vérifier la troisième équation (C) et donner

$$D_{,} = 0.$$

La ligne d'intersection, ainsi que la direction des deux plans, s'obtiendront en substituant successivement les deux valeurs de s dans l'équation (g), laquelle donnera ainsi les deux plans bissecteurs des angles formés par les plans contenus dans l'équation donnée.

Si la surface est un cylindre à base elliptique ou hyperbolique, un point quelconque de l'axe peut être considéré comme un centre; et par conséquent encore, si l'on attribue à l'une des trois inconnues $x_{,}, y_{,}, z_{,}$ une valeur arbitraire, on déduira de deux quelconques des équations (C) des valeurs finies et déterminées pour les deux autres, et le système des valeurs de $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ ainsi déterminé vérifiera la troisième équation (C), mais donnera $D_{,}$ différent de zéro.

Ce point étant pris pour origine des coordonnées, l'équation du cylindre pourra le ramener à la forme

$$s_2 y^2 + s_3 z^2 + D_{,} = 0,$$

et par conséquent, on aura pour les valeurs des demi-axes de la base

$$b^2 = -\frac{D_{,}}{s_2}, \quad c^2 = -\frac{D_{,}}{s_3},$$

laquelle sera donc une ellipse, une hyperbole ou une courbe imaginaire, suivant que les deux valeurs de s seront toutes les deux de signe contraire à $D_{,}$, une seule ou toutes les deux de même signe.

Quant à la direction de l'axe du cylindre, elle sera donnée par la combinaison de deux quelconques des équations (C); puis, substituant successivement les deux valeurs de s dans l'équation du plan focal (g), on aura deux plans dont l'intersection sera l'axe *principal* de la base du cylindre.

49. Enfin, si l'équation proposée représente l'un ou l'autre des deux paraboloïdes, il n'existe aucun point que l'on puisse considérer comme un centre, et par conséquent chacune des équations (C) est incompatible avec les deux autres. Réciproquement, on reconnaîtra que la surface est un paraboloïde lorsque, avec une seule valeur de s nulle, on aura une ou plusieurs des valeurs de $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ infinies.

Si l'on suppose la surface rapportée à son axe et à son sommet, l'équation sera de la forme

$$s_2 y^2 + s_3 z^2 + 2Qx = 0;$$

et par conséquent, suivant que s_2 et s_3 seront de même signe ou de signe contraire, le paraboloïde sera elliptique ou hyperbolique.

Pour déterminer la surface, nous avons d'abord l'axe par les deux équations

$$\begin{aligned} Vx' + V'y' + V''z' &= T, \\ V_{,}x' + V'_{,}y' + V''_{,}z' &= T_{,}, \end{aligned}$$

que nous obtenons en substituant successivement à s les deux valeurs s_2 et s_3 dans l'équation générale (g).

Transportons maintenant les axes de coordonnées parallèlement à eux-mêmes en un certain point de l'axe (pris arbitrairement, pourvu que ce ne soit pas le sommet de la surface), et soit

$$\begin{aligned} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2C_{,}x + 2C'_{,}y + 2C''_{,}z + D_{,} = 0 \end{aligned}$$

l'équation de la surface rapportée à ces nouvelles coordonnées.

Or, soient α, β, γ les coordonnées du sommet, ce point étant sur l'axe et ses coordonnées réduisant nécessairement l'équation de la surface au premier degré, on obtiendra celles-ci en résolvant les trois équations

$$(z)\quad \left\{\begin{aligned} V\alpha + V'\beta + V''\gamma &= 0, \\ V_{,}\alpha + V'_{,}\beta + V''_{,}\gamma &= 0, \\ 2C_{,}\alpha + 2C'_{,}\beta + 2C''_{,}\gamma &= -D_{,}; \end{aligned}\right.$$

et par conséquent elles seront de la forme

$$\alpha = \frac{D_{,}U}{R}, \quad \beta = \frac{D_{,}U'}{R}, \quad \gamma = \frac{D_{,}U''}{R}.$$

On a donc, en désignant par δ la portion de l'axe comprise entre l'origine des coordonnées et le sommet de la surface,

$$\delta = \frac{D_{,}\sqrt{U^2 + U'^2 + U''^2}}{R}.$$

Supposons ensuite que, sans déplacer l'origine, nous changions la direction des axes de coordonnées de manière que les x soient comptées sur l'axe de la surface, l'équation de celle-ci deviendra

$$s_2 y^2 + s_3 z^2 + 2Qx + D_{,} = 0,$$

et par conséquent, si l'on fait

$$y = 0, \quad z = 0,$$

on aura

$$2Q\delta + D_{,} = 0, \quad \text{d'où} \quad Q = -\frac{D_{,}}{2\delta} = -\frac{R}{2\sqrt{U^2 + U'^2 + U''^2}}.$$

On aura donc pour les valeurs des paramètres de la surface

$$-\frac{2Q}{s_2} = \frac{R}{s_2\sqrt{U^2 + U'^2 + U''^2}}, \quad \text{et} \quad -\frac{2Q}{s_3} = \frac{R}{s_3\sqrt{U^2 + U'^2 + U''^2}},$$

U, U', U'' et R étant des quantités qui se calculeront aisément par le moyen des équations (α).

50. Passons au troisième cas, celui où l'équation générale (s) a deux de ses racines égales à zéro.

Si l'équation proposée représente un plan unique, un point quelconque de ce plan peut être considéré comme un centre, et par conséquent les équations (C) doivent se réduire à une seule; et de plus, si l'on donne à deux des inconnues $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ des valeurs arbitraires, on déduira de l'équation

$$C_{,} = 0$$

par exemple, une valeur finie pour l'autre inconnue, et ce système de valeurs rendra

$$D_{,} = 0.$$

Si l'équation proposée représente un système de deux plans parallèles, on peut considérer comme un centre tout point d'un plan parallèle à ceux-ci et également distant de chacun d'eux. Donc encore, dans ce cas, les trois équations doivent se réduire à une seule, et si l'on attribue à deux des inconnues $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ des valeurs arbitraires, on aura pour la troisième une valeur finie et déterminée, mais ce système de valeurs rendra $D_{,}$ différent de zéro.

Supposons le point ainsi déterminé pris pour origine des coordonnées; l'équation deviendra

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + D_, = 0,$$

et pour une direction convenable des axes de coordonnées, elle prendra la forme

$$s_3 z^2 + D_, = 0, \quad \text{d'où} \quad z = \pm\sqrt{-\frac{D_,}{s_3}},$$

valeur réelle ou imaginaire suivant que $D_,$ et s_3 seront de signe contraire ou de même signe.

51. Enfin, si la surface est un cylindre à base parabolique, il n'existe aucun point que l'on puisse considérer comme un centre, et par conséquent les trois équations (C) sont incompatibles deux à deux, et réciproquement.

Si l'on substitue la valeur de s dans l'équation générale (g), on aura le plan diamétral principal. On pourra transporter l'origine des coordonnées en un point quelconque de ce plan sans changer la direction des axes; puis, en raisonnant comme on l'a fait pour les paraboloïdes, on obtiendra le paramètre de la base du cylindre.