JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BERTRAND

Remarques sur la théorie des maxima et minima de fonctions à plusieurs variables

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 155-160.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__155_0>

REMARQUES

SUR LA THÉORIE DES MAXIMA ET MINIMA

DE FONCTIONS A PLUSIEURS VARIABLES;

PAR J. BERTRAND,

Élève-Ingénieur des Mines.

Les remarques qui suivent sont bien élémentaires et se sont probablement présentées plus d'une fois à l'esprit des géomètres; néanmoins, comme elles se rattachent à une théorie qui fait partie de l'enseignement du calcul différentiel, je pense qu'elles pourront être utiles.

Soit $\varphi(x, y)$ une fonction de deux variables; la condition pour que cette fonction soit maxima ou minima est, comme on sait, que sa variation conserve toujours le même signe, quels que soient les accroissements infiniment petits de x et de y. Or, les termes du premier ordre, dans cet accroissement, sont

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy.$$

Ces termes donneront leur signe à toute la variation, à moins qu'ils ne soient identiquement nuls; et comme ils changent évidemment de signe avec dx et dy, il ne peut y avoir ni maximum ni minimum, à moins que ces deux termes ne disparaissent, c'est-à-dire à moins que l'on n'ait

$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0,$$

mais cette conclusion n'est rigoureuse qu'autant que $\frac{d\varphi}{dx}$ et $\frac{d\varphi}{dy}$ ont des valeurs déterminées. Lorsque, pour certaines valeurs de x et de y, ces dérivées se présenteront sous une forme indéterminée, on ne pourra plus employer la formule dont nous venons de nous servir pour représenter l'accroissement de la fonction, et rien n'empêchera qu'il y ait maximum ou minimum.

Cette remarque est toute simple et n'est certainement pas nouvelle, mais on n'a pas l'habitude de la faire explicitement dans les Traités élémentaires; cependant les géomètres qui oublieraient d'en tenir compte pourraient être conduits à regarder comme impossibles des problèmes qui ont des solutions.

Je prendrai pour exemple ce problème de géométrie élémentaire :

Trouver un point dont la somme des distances à trois autres A, B, C, *soit un minimum.*

Quoique ce problème soit susceptible d'une solution géométrique, nous allons d'abord le traiter par l'analyse.

Prenons pour axe des x la droite qui joint les deux points A et B, et pour axe des y, une perpendiculaire à cette droite élevée au point A. Soit α l'abscisse de B, et a, b les coordonnées de C. Si l'on désigne par x, y celles du point cherché, l'expression à rendre minimum est

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}+\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-\alpha)^2+y^2}.$$

Si l'on égale à zéro les dérivées par rapport à y et par rapport à x, il vient

$$\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x-\alpha}{\sqrt{(x-\alpha)^2+y^2}}=0,$$

$$\frac{y-b}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y}{\sqrt{(x-\alpha)^2+y^2}}=0;$$

élevant au carré, après avoir isolé les premiers termes de chaque équation, puis ajoutant, il vient

$$1=2+\frac{2[(x-\alpha)x+y^2]}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{(x-\alpha)^2+y^2}},$$

ou

$$\frac{x(x-\alpha)+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{(x-\alpha)^2+y^2}}=-\tfrac{1}{2};$$

chassant le dénominateur et élevant au carré, il vient

$$(x^2 + y^2 - \alpha x)^2 = \tfrac{1}{4}(x^2 + y^2)[(x - \alpha)^2 + y^2];$$

mais il est facile de voir que

$$(x^2 + y^2)[(x - \alpha)^2 + y^2] = (x^2 + y^2 - \alpha x)^2 + \alpha^2 y^2.$$

Il reste donc

$$3(x^2 + y^2 - \alpha x)^2 = \alpha^2 y^2;$$

et en extrayant la racine

$$x^2 + y^2 - \alpha x = \pm \frac{\alpha y}{\sqrt{3}},$$

ou

$$\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \left(y \pm \frac{\alpha}{2\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{3},$$

équation qui, comme on peut facilement s'en assurer, représente les deux cercles qui correspondent aux segments capables de 120 degrés que l'on peut décrire sur la corde AB.

Le point cherché est donc sur un segment capable de 120 degrés décrit sur l'un quelconque des côtés du triangle ABC, il est donc à l'intersection de trois segments semblables, décrits sur les côtés AB, AC, BC, et jouit par conséquent de cette propriété, que les droites qui le joignent aux points A, B, C, forment trois angles égaux entre eux, et à 120 degrés.

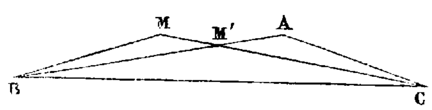
Mais dans le cas où ces segments ne peuvent pas se couper, c'est-à-dire, comme il est très-facile de s'en assurer lorsque le triangle ABC a un angle plus grand que 120 degrés, les deux conditions $\frac{d\varphi}{dx} = 0$, $\frac{d\varphi}{dy} = 0$, deviennent incompatibles, et pourtant le problème est, par sa nature, évidemment susceptible d'une solution.

Pour la trouver, nous remarquerons que ces dérivées deviennent $\frac{0}{0}$ lorsqu'on prend pour le point cherché l'un des trois points A, B, C; c'est donc l'un de ces trois points qui donne la solution de la question, et comme la somme des distances se réduit, dans ce cas, à la somme de deux côtés du triangle qui sont adjacents au sommet considéré, cette somme sera la plus petite si l'on choisit le sommet de l'angle obtus qui, par suite, est le point demandé.

Ce problème présente donc cette circonstance remarquable, que le point cherché se trouve déterminé de deux manières différentes suivant que le triangle formé par les trois points donnés a ou n'a pas d'angle supérieur à 120 degrés; dans le premier cas, c'est le sommet de l'angle obtus qui satisfait; dans le second, c'est un point de l'intérieur du triangle qui tend vers le sommet à mesure que l'angle s'approche de 120 degrés.

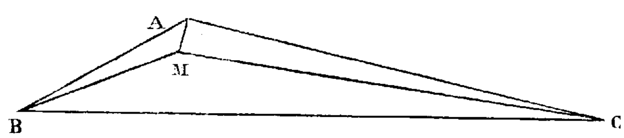
La démonstration précédente montre que le sommet de l'angle obtus est le point qui donne la plus petite somme de distances, en admettant qu'il doit nécessairement exister un point qui jouisse de cette propriété. Je vais démontrer, *à priori*, que ce sommet, dans le cas d'un angle supérieur à 120 degrés, donne, en effet, une somme de distances moindre que tous les points voisins.

D'abord il est facile de voir qu'il est inutile de considérer les points



situés en dehors du triangle. Car si M est un de ces points, on aura, en le joignant aux trois sommets A, B, C, une somme évidemment plus grande que celle qui correspondrait au point M' où MB coupe le contour du triangle.

Nous aurons donc prouvé que AB + AC est plus petit que la somme des distances à un point quelconque, si nous établissons cette proposition pour les points de l'intérieur du triangle



Soit M un quelconque de ces points infiniment rapproché de A, il s'agit de prouver que l'on a

$$AM + MC + MB > AB + AC;$$

or, on a évidemment, en représentant l'angle MAC par φ, l'angle BAC par A, et négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$MC = AC - AM\cos\varphi,$$

$$MB = AB - AM\cos(A - \varphi);$$

d'après cela, l'inégalité qu'il faut démontrer devient

$$AM[1 - \cos\varphi - \cos(A - \varphi)] > 0,$$

ou bien

$$1 - \cos\varphi - \cos(A - \varphi) > 0,$$

c'est-à-dire, en transformant la somme de cosinus,

$$1 - 2\cos\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}(A - 2\varphi) > 0.$$

Cette inégalité devient évidente si l'on se rappelle que A étant plus grand que 120 degrés, c'est-à-dire que $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{1}{2}$ A est plus grand que $\frac{\pi}{3}$, et son cosinus est, par conséquent, moindre que $\frac{1}{2}$. On voit, en même temps, qu'elle ne serait plus exacte si $\cos\frac{1}{2}$ A était plus grand que $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, si A était moindre que 120 degrés.

J'ai cru d'autant plus utile de mentionner ces remarques, qu'on trouve des conclusions tout opposées dans un article des *Annales de Mathématiques* de M. Gergonne. Après avoir démontré, tome I^er, page 377, la construction que nous avons déduite de l'analyse, on conclut que, dans le cas où elle ne s'applique pas, le problème est impossible. J'ignore si la fausseté de cette conclusion a déjà été signalée; dans tous les cas, il n'est pas nécessaire d'insister plus longuement pour en faire sentir l'impossibilité, puisqu'on est sûr, *à priori*, par la nature même de la question, qu'il y a toujours une solution.

Les personnes qui liront l'article dont je parle apercevront sans peine quel est le point de la démonstration qui a besoin d'être modifié. C'est par une erreur de même genre qu'il est dit dans le même Recueil, quelques pages plus bas, qu'on ne peut pas, en général, trouver un point tel que la somme de ses distances à deux droites et à un point soit un minimum; il est clair, au contraire, qu'un pareil point existe toujours; seulement il est situé soit sur l'une des droites, soit précisément au point donné, de sorte qu'il ne satisfait pas à la condition analytique ordinaire de maximum et de minimum. Je me contente d'indiquer ces erreurs, sans entrer dans le détail de la solution très-facile du problème dans les différents cas. Cette solution présenterait, du reste, une discontinuité remarquable dans la position du point, suivant le plus ou moins grand angle que forment les droites données.