JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BERTRAND

Détermination de l'intégrale définie $\int_0^1 \frac{l(1+x)dx}{1+x^2}$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 8 (1843), p. 110-112.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1843_1_8__110_0>

DÉTERMINATION DE L'INTÉGRALE DÉFINIE

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)\,dx}{1+x^2};$$

Par J. BERTRAND,

Élève-Ingénieur des Mines.

J'ai été conduit à la valeur de cette intégrale en appliquant à l'intégrale indéfinie $\int_0^x \frac{l(1+x^2)\,dx}{1+x^2}$ un procédé de réduction analogue à l'intégration par partie, et que je commencerai par exposer d'une manière générale.

I.

Soit une intégrale $\int_0^x \varphi(x)\,dx$, considérons une fonction de deux variables $\psi(x, m)$, qui devienne égale à $\varphi(x)$ par la substitution de x à m, en sorte que $\psi(x, x) = \varphi(x)$; la fonction ψ pourra évidemment être déterminée d'une infinité de manières différentes. Soit

$$\int_0^x \psi(x, m)\,dx = \psi_1(x, m).$$

Différentions $\psi_1(x, m)$ par rapport à m, et posons

$$\frac{d\psi_1(x, m)}{dm} = \int_0^x \frac{d\psi(x, m)}{dm}\,dx = \psi_2(x, m).$$

Je dis que l'on aura identiquement

$$(1) \qquad \int_0^x \varphi(x)\,dx = \psi_1(x, x) - \int_0^x \psi_2(x, x)\,dx + \mathrm{C},$$

en sorte que l'intégrale proposée se trouvera ramenée à l'intégrale, en général, fort différente, $\int_0^x \psi_2(x, x)\,dx$.

La démonstration de ce théorème est bien facile: il suffit de différentier les deux membres par rapport à x; le premier donne évidemment $\varphi(x)$; quant au second sa dérivée est égale à

$$\frac{d\psi_1(x, x)}{dx} - \psi_2(x, x);$$

or en traitant $\psi_1(x, x)$ comme une fonction composée, et se rappelant que l'on a

$$\frac{d\psi_1(x, m)}{dx} = \psi(x, m), \qquad \frac{d\psi_1(x, m)}{dm} = \psi_2(x, m),$$

cette dérivée devient

$$\psi(x, x) + \psi_2(x, x) - \psi_2(x, x) = \psi(x, x) = \varphi(x).$$

Les deux membres de l'équation (1) ont donc même dérivée, et par conséquent ils peuvent être considérés comme égaux, puisque nous avons ajouté une constante au second.

Il est facile de voir que le théorème précédent renferme comme cas particulier le procédé d'intégration par parties. Soit, en effet,

$$\varphi(x) = f(x) \times F'(x);$$

prenons

$$\varphi(x, m) = f(m) \times F'(x),$$

nous aurons évidemment

$$\psi_1(x, m) = \int_0^x dx\, f(m)\, F'(x) = f(m)\, F(x) - f(m)\, F(0),$$

$$\psi_2(x, m) = \frac{d\psi_1(x, m)}{dm} = f'(m)\, F(x) - f'(m)\, F(0),$$

en sorte que la formule (1) devient

$$\int_0^x f(x) F'(x)\, dx = f(x) F(x) - \int_0^x f'(x)\, \psi(x)\, dx + C,$$

ce qui est précisément la formule d'intégration par parties.

II.

Appliquons le théorème précédent à l'intégrale $\int_0^x \frac{l(1+x^2)\, dx}{1+x^2}$; prenons

$$\psi(x, m) = \frac{l(1+mx)}{1+x^2},$$

nous aurons

$$\psi_1(x, m) = \int_0^x \frac{l(1+mx)}{1+x^2}\, dx.$$

La valeur de

$$\psi_2(x, m) = \frac{d\psi_1(x, m)}{dm}$$

sera donc

$$\int_0^x \frac{x dx}{(1+mx)(1+x^2)} = -\frac{1}{1+m^2}\, l(1+mx) + \frac{l(1+x^2)}{2(1+m^2)} + \frac{m}{1+m^2} \text{arc tang } x \text{ [*]};$$

[*] En supposant égale à 1 la limite supérieure de l'intégrale, cette formule donne

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(1+mx)(1+x^2)} = -\frac{l(1+m)}{1+m^2} + \frac{l2}{2(1+m^2)} + \frac{\pi}{4}\frac{m}{1+m^2}.$$

Multiplions les deux membres par dm et intégrons de $m = 0$ à $m = 1$; il nous viendra

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)\, dx}{1+x^2} = -\int_0^1 \frac{l(1+m)\, dm}{1+m^2} + \frac{\pi l2}{4};$$

et comme l'intégrale est au fond la même dans les deux membres, nous en conclurons

$$\int_0^1 \frac{l(1+x)\, dx}{1+x^2} = \frac{\pi l2}{8}:$$

c'est précisément le résultat auquel arrive M. Bertrand. (J. L.)

en remplaçant m par x dans cette expression, il vient

$$\psi_1(x, x) = -\frac{1}{2}\,\frac{l(1+x^2)}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}\,\text{arc tang}\,x,$$

et par suite, d'après la formule (1),

$$\int_0^x \frac{l(1+x^2)\,dx}{1+x^2} = \psi_1(x, x) + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{l(1+x^2)\,dx}{1+x^2} - \int_0^x \frac{x dx\,\text{arc tang}\,x}{1+x^2} + \text{C}.$$

Mais en intégrant par parties, on a

$$\int_0^x \frac{x dx\,\text{arc tang}\,x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\,l(1+x^2)\,\text{arc tang}\,x - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dx\,l(1+x^2)}{1+x^2}.$$

Substituant, et supprimant l'intégrale $\int_0^x \frac{dx\,l(1+x^2)}{1+x^2}$, qui se trouve commune aux deux membres, il vient

$$\psi_1(x, x) = \frac{1}{2}\,l(1+x^2)\,\text{arc tang}\,x.$$

Mais $\psi_1(x, x)$ est ce que devient l'intégrale $\int_0^x \frac{l(1+mx)\,dx}{1+x^2}$ lorsque l'on y remplace m par x. C'est, par conséquent, comme il est facile de le voir,

$$\int_0^x \frac{l(1+xz)\,dz}{1+z^2}.$$

Nous avons donc

$$\int_0^x \frac{l(1+xz)\,dz}{1+z^2} = \frac{1}{2}\,l(1+x^2)\,\text{arc tang}\,x;$$

car la constante est évidemment nulle, puisque arc tang x s'annulle avec x. Si, dans cette formule, on fait $x = 1$, elle devient

$$\int_0^1 \frac{l(1+z)\,dz}{1+z^2} = \frac{\pi}{8}\,l\,2.$$

Cette intégrale n'était pas connue, je crois. On pourrait l'obtenir de plusieurs manières; j'ai choisi la précédente parce qu'elle repose sur une méthode nouvelle d'intégration qui pourra être utile dans certains cas.