JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

STURM

Démonstration d'un Théorème d'algèbre de M. Sylvester

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 356-368.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__356_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Démonstration d'un Théorème d'algèbre de M. Sylvester;

Par M. STURM.

I.

M. Sylvester a donné sans démonstration, dans le numéro de décembre 1839 du *Philosophical Magazine,* le théorème suivant :

Soit $V = 0$ une équation quelconque du degré m à une inconnue x dont les racines supposées inégales soient désignées par $a, b, c, d, \ldots, h$; d'où résulte

$$V = (x - a)(x - b)(x - c)\ldots(x - h).$$

Soit V_1 la fonction dérivée de V. Concevons qu'on cherche par le procédé ordinaire le plus grand commun diviseur de V et V_1, en ayant soin, dans les divisions successives, de n'introduire et de ne supprimer aucun facteur indépendant de x, et en changeant toujours les signes des restes avant de les prendre pour diviseurs. Désignons par $V_2, V_3, \ldots, V_m$ ces restes pris ainsi avec des signes contraires, dont les degrés par rapport à x sont respectivement $m - 2$, $m - 3, \ldots$, jusqu'à 0. Les polynômes $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_m$ s'exprimeront en fonction de x et des racines $a, b, c, \ldots$ de l'équation $V = 0$ de la manière suivante :

La dérivée V_1 est, comme on sait, la somme des produits $m - 1$ à $m - 1$ des facteurs $x - a$, $x - b, \ldots, x - h$, ce que nous écrirons ainsi

$$V_1 = \sum (x - b)(x - c)\ldots(x - h).$$

Pour former V_2, on multipliera chacun des produits $m - 2$ à $m - 2$ des facteurs $x - a$, $x - b$, $x - c, \ldots, x - h$ par le carré de la différence des deux racines qui n'entrent pas dans le produit que l'on considère; la somme des résultats, divisée par m^2 donnera V_2, c'est-à-dire qu'on a

$$V_2 = \frac{1}{m^2} \sum (a - b)^2 (x - c)(x - d)\ldots(x - h).$$

On a de même

$$(1)\left\{\begin{aligned} V_3 &= \frac{1}{\lambda_3}\sum (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2(x-d)(x-e)\ldots(x-h),\\ V_4 &= \frac{1}{\lambda_4}\sum (a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2(b-c)^2(b-d)^2(c-d)^2(x-e)\ldots(x-h),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ V_m &= \frac{1}{\lambda_m}(a-b)^2(a-c)^2\ldots(a-h)^2(b-c)^2\ldots(g-h)^2, \end{aligned}\right.$$

en désignant par $\frac{1}{\lambda_3}$, $\frac{1}{\lambda_4}, \ldots, \frac{1}{\lambda_m}$ certaines quantités indépendantes de x et fonctions symétriques des racines a, b, c,... de l'équation $V = 0$. Ces quantités sont toutes positives, quand l'équation $V = 0$ a tous ses coefficients réels [*].

II.

Soient q_1, q_2, q_3, etc. les quotients que fournit le calcul du plus grand commun diviseur de V et V_1; ils sont du premier degré par rapport à x, et l'on a les équations

$$V = V_1 q_1 - V_2,\quad V_1 = V_2 q_2 - V_3,\quad V_2 = V_3 q_3 - V_4,\ \text{etc.}$$

La première donne

$$V_2 = V_1 q_1 - V.$$

En mettant cette expression de V_2 dans la seconde, on en tire

$$V_3 = V_1(q_1 q_2 - 1) - V q_2.$$

En substituant dans la troisième ces valeurs de V_2 et V_3, on trouve

$$V_4 = V_1[(q_1 q_2 - 1)q_3 - q_1] - V(q_2 q_3 - 1).$$

En continuant ainsi, on voit que chacun des polynômes V_2, V_3, V_4, etc. est de la forme $V_1 N - VP$, N et P étant deux polynômes dont les degrés diffèrent d'une unité. On voit d'ailleurs que N et P sont toujours les deux termes de l'une *des réduites* qui proviennent de la fraction continue $q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{1}{q_3 - \text{etc.}}}$ égale à $\frac{V}{V_1}$.

[*] M. Sylvester n'a pas donné explicitement, dans le Journal cité, les expressions de ces facteurs $\frac{1}{\lambda_3}$, $\frac{1}{\lambda_4}$,... en fonction des racines a, b, c,... On les trouvera plus loin, au § V.

Ainsi, pour V_k qui est du degré $m-k$, on a

$$V_k = V_1 N - VP. \tag{2}$$

N est le numérateur et P le dénominateur de la réduite équivalente à $q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \ldots - \cfrac{1}{q_{k-1}}}$; N est du degré $k-1$ et P du degré $k-2$.

L'équation (2) fait voir qu'étant donnés les deux polynômes V et V_1 des degrés m et $m-1$, on pourra toujours trouver trois autres polynômes T, Y et Z des degrés $m-k$, $k-1$ et $k-2$ respectivement, tels qu'on ait

$$T = V_1 Y - VZ. \tag{3}$$

D'après l'équation (2), il suffira, en effet, de prendre

$$T = \lambda V_k, \quad Y = \lambda N, \quad Z = \lambda P,$$

λ étant une quantité arbitraire indépendante de x.

Je dis en outre qu'il n'y a pas d'autre manière de satisfaire à cette équation (3), en supposant toujours que T, Y et Z soient des degrés $m-k$, $k-1$ et $k-2$. En effet, en éliminant V_1 entre les équations (2) et (3), on trouve

$$NT - V_k Y = V(PY - NZ),$$

d'où il résulte que les deux expressions $NT - V_k Y$ et $PY - NZ$ doivent être nulles identiquement. Car autrement, d'après les degrés de nos polynômes, le premier membre de cette équation serait du degré $m-1$ au plus, tandis que le second serait au moins du degré m, ce qui est absurde. On a donc à la fois

$$NT - V_k Y = 0, \quad PY - NZ = 0,$$

d'où

$$\frac{T}{V_k} = \frac{Y}{N} = \frac{Z}{P} = \lambda,$$

λ étant une quantité indépendante de x (puisque T et V_k sont du même degré $m-k$).

Si l'on prend pour Y et Z des polynômes à coefficients indéterminés, Y, étant du degré $k-1$, renfermera k de ces coefficients; Z en contiendra $k-1$; leur nombre total est $2k-1$. L'expression $V_1 Y - VZ$ est en général du degré $m+k-2$; mais on peut la réduire à un degré moindre en égalant à zéro quelques-uns des coefficients des plus hautes puissances de x. Si l'on veut réduire $V_1 Y - VZ$ à un polynôme T du degré $m-k$, il faudra égaler à zéro les coefficients de toutes les puissances de x, depuis la plus haute x^{m+k-2} jusqu'à x^{m-k+1} inclusivement; on aura ainsi $2k-2$ équations de condition linéaires entre les $2k-1$ coefficients des polynômes Y et Z, lesquelles détermineront les rapports de ces coefficients à l'un d'entre eux, qui restera seul arbitraire, et se trouvera comme facteur commun dans les valeurs de Y, Z et T. Ces équations linéaires ne peuvent être ni incompatibles ni indéterminées, puisqu'on a vu que l'équation (3) a pour solution unique

$$Y = \lambda N, \quad Z = \lambda P, \quad T = \lambda V_k,$$

λ étant indépendant de x, et les polynômes N, P, V_k étant complétement déterminés.

On voit bien par là que le degré de $V_1 Y - VZ$ ne peut pas, en général, devenir moindre que $m-k$, en prenant toujours des polynômes Y et Z des degrés $k-1$ et $k-2$; mais on pourra d'une infinité de manières réduire $V_1 Y - VZ$ à un degré plus petit que $m+k-2$ et plus grand que $m-k$.

Pour avoir $V_1 Y - VZ =$ une constante C, il faudra nécessairement prendre pour Y et Z le numérateur et le dénominateur de l'avant-dernière *réduite* provenant de $q_1 - \frac{1}{q_2 - \text{etc.}}$, multipliés par $\frac{C}{V_m}$; Y est alors du degré $m-1$ et Z du degré $m-2$. Cela résulte de la formule $V_m = V_1 N - VP$, ou bien encore de ce que les termes de deux réduites consécutives $\frac{N}{P}$, $\frac{N'}{P'}$, sont toujours liés par la relation $NP' - PN' = +1$, et que les deux termes de la dernière réduite sont égaux à $\frac{V}{V_m}$ et $\frac{V_1}{V_m}$ identiquement.

Ce qu'on vient d'établir ne suppose point que V_1 soit la fonction dérivée de V. Il suffit que V_1 soit du degré $m-1$, V étant du degré m, et que V et V_1 n'aient pas de diviseur commun.

On voit aussi comment il faudrait modifier ce qui précède, si V et V_1 représentaient deux polynômes quelconques.

III.

Il s'agit maintenant d'exprimer *les restes* V_2, V_3, etc. en fonction de x et des racines $a, b, c, \ldots, h$ de l'équation $V = 0$.

Pour fixer les idées, considérons V_4, qui est du degré $m-4$ par rapport à x. La méthode serait la même pour toute autre fonction V_k.

Multiplions la fonction V_1, dérivée de V, par le polynôme suivant :

$$(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2(x-a)(x-b)(x-c)+\ldots+(b-c)^2(b-d)^2(c-d)^2(x-b)(x-c)(x-d)+\text{etc.}, \tag{4}$$

que nous désignerons par Y et qui est une fonction symétrique des racines de $V=0$, du troisième degré par rapport à x.

Le produit $V_1 Y$ sera du degré $m+2$. Si l'on divise ce produit par V, qui est du degré m, on aura un quotient Z du deuxième degré, et un reste T qu'on pourra présenter sous une forme particulière et qui ne différera de V_4 que par un facteur indépendant de x, comme nous allons le montrer.

La division indiquée donne

$$\frac{V_1 Y}{V} = Z + \frac{T}{V}. \tag{5}$$

La fraction rationnelle $\frac{T}{V}$ peut se décomposer en fractions simples ayant pour dénominateurs les facteurs du premier degré $x-a, x-b, \ldots, x-h$ du polynôme V. D'après la règle connue pour la formation des fractions partielles, celle qui a pour dénominateur $x-a$ doit avoir pour numérateur ce que devient pour $x=a$ le quotient de $V_1 Y$ divisé par la dérivée de V qui est V_1, c'est-à-dire la valeur même de Y pour $x=a$, qu'on peut désigner par $Y(a)$. On aura donc

$$\frac{T}{V} = \frac{Y(a)}{x-a} + \frac{Y(b)}{x-b} + \cdots + \frac{Y(h)}{x-h} = \sum \frac{Y(a)}{x-a},$$

ou, d'après l'expression (4) de Y,

$$\frac{T}{V} = \sum \frac{(b-c)^2(b-d)^2(c-d)^2(a-b)(a-c)(a-d)+(b-c)^2(b-e)^2(c-e)^2(a-b)(a-c)(a-e)+\text{etc.}}{x-a}.$$

Or cette valeur de $\frac{T}{V}$ n'est autre chose que la somme des fractions partielles qu'on trouve en décomposant la fraction rationnelle suivante

$$\frac{(a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2(b-c)^2(b-d)^2(c-d)^2(x-e)(x-f)\ldots(x-h)+\text{etc.}}{(x-a)(x-b)(x-c)\ldots(x-h)},$$

dont le dénominateur est égal à V [*].

En conséquence, T est égal au numérateur de cette fraction, lequel est du degré $m-4$ par rapport à x.

---

[*] Il faut observer dans cette décomposition que $V_1(a) = (a-b)(a-c)\ldots(a-h)$.

D'ailleurs l'équation (5) donne $T = V_1 Y - VZ$; et comme T, Y et Z sont respectivement des degrés $m-4$, 3 et 2, il faut, d'après ce qu'on a vu précédemment au § II, qu'on ait $T = \lambda V_4$, λ étant un facteur indépendant de x. On a donc

$$V_4 = \frac{1}{\lambda} \sum (a-b)^2 (a-c)^2 (a-d)^2 (b-c)^2 (b-d)^2 (c-d)^2 (x-e)(x-f)\ldots(x-h),$$

conformément au théorème de M. Sylvester.

On a en même temps, Y désignant toujours le polynôme (4),

$$Y = \lambda N, \quad Z = \lambda P, \quad \text{en supposant } \frac{N}{P} = q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \cfrac{1}{q_3}}.$$

On trouverait de même les expressions de V_2, V_3,... en prenant successivement

$$Y = (x-a)+(x-b)+\ldots+(x-h) \quad (\text{d'où } Z = m^2, \quad \lambda = m^2 \quad \text{et} \quad Y = \lambda q_1 = m^2 q_1),$$
$$Y = (a-b)^2 (x-a)(x-b) + (a-c)^2 (x-a)(x-c) + \text{etc.},$$

. . . .

IV.

M. Liouville m'a fait voir que les résultats précédents se déduisent aussi d'une formule que M. Cauchy a donnée dans son *Cours d'Analyse algébrique*, note 5, page 528, et par laquelle on détermine une fraction rationnelle, dont on connaît un certain nombre de valeurs particulières.

Supposons qu'on cherche l'expression de V_4. Comme on l'a expliqué au § II, on aura

$$V_4 = \frac{1}{\lambda} T,$$

si l'on trouve un polynôme T du degré $m-4$ et deux autres Y et Z du troisième et du deuxième degré qui satisfassent à l'équation

$$T = V_1 Y - VZ.$$

Il faut et il suffit évidemment que $V_1 Y - T$ soit divisible par V, ou, ce qui revient au même, s'annule pour les m valeurs a, b, c,..., h attribuées à x. Donc, pour chacune de ces valeurs, la fraction $\frac{T}{Y}$ doit être égale à V_1, de sorte que, pour $x = a$, par exemple, on aura

$$\frac{T}{Y} = V_1(a) = (a-b)(a-c)\ldots(a-h).$$

On connaît ainsi m valeurs particulières de la fraction $\frac{T}{Y}$, ce qui la détermine complétement, puisque, d'après les degrés des polynômes T et Y, les coefficients indéterminés qui doivent entrer dans $\frac{T}{Y}$ sont au nombre de $m+1$, et que l'un d'eux peut être remplacé par l'unité. En introduisant ces m valeurs de $\frac{T}{Y}$ pour $x=a$, $x=b$, etc., dans la formule mentionnée de M. Cauchy, on retrouve précisément les expressions de T et de Y données plus haut, et par suite celle de V_4.

V.

Posons, pour abréger,

$$\begin{aligned}
T_2 &= \sum (a-b)^2(x-c)(x-d)\ldots(x-h),\\
T_3 &= \sum (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2(x-d)(x-e)\ldots(x-h),\\
T_4 &= \sum (a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2(a-d)^2(b-d)^2(c-d)^2(x-e)\ldots(x-h),\\
&\qquad\text{etc.}
\end{aligned}$$

Nous avons trouvé

$$V_2 = \frac{1}{m^2}T_2,\quad V_3 = \frac{1}{\lambda_3}T_3,\quad V_4 = \frac{1}{\lambda_4}T_4,\ldots,\quad V_k = \frac{1}{\lambda_k}T_k,\ \text{etc.},$$

les quantités $\frac{1}{\lambda_3}$, $\frac{1}{\lambda_4}$,... devant être indépendantes de x, mais fonctions symétriques des racines $a, b, c, \ldots$ de l'équation $V=0$ (car elles dépendent des coefficients de cette équation). Il nous reste à déterminer ces facteurs $\frac{1}{\lambda_k}$.

On a vu, au § III, qu'au polynôme T du degré $m-4$ qui est maintenant représenté par T_4, correspondaient deux autres polynômes Y et Z des degrés 3 et 2 liés avec T par la relation $T = V_1Y - VZ$.

De même, à tout autre polynôme T_k du degré $m-k$ correspondent deux polynômes des degrés $k-1$ et $k-2$ que nous désignerons par Y_k et Z_k, et tels qu'on a

$$T_k = V_1Y_k - VZ_k.$$

Les polynômes Y sont ainsi exprimés :

$$Y_2 = x - a + x - b + \ldots + x - h = \sum (x-a),$$

$$Y_3 = \sum (a-b)^2 (x-a)(x-b),$$

$$Y_4 = \sum (a-b)^2 (a-c)^2 (b-c)^2 (x-a)(x-b)(x-c),$$

$$Y_5 = \sum (a-b)^2 (a-c)^2 (a-d)^2 (b-c)^2 (b-d)^2 (c-d)^2 (x-a)(x-b)(x-c)(x-d),$$

etc.

Je désigne encore par p_2, p_3, p_4, etc. le coefficient de la plus haute puissance de x dans T_2, T_3, T_4,... respectivement, de sorte que

$$p_2 = (a-b)^2 + (a-c)^2 + \ldots + (g-h)^2 = \sum (a-b)^2,$$

$$p_3 = \sum (a-b)^2 (a-c)^2 (b-c)^2,$$

$$p_4 = \sum (a-b)^2 (a-c)^2 (a-d)^2 (b-c)^2 (b-d)^2 (c-d)^2,$$

etc.

On voit qu'en général, p_k, qui est le coefficient de la plus haute puissance de x dans T_k, est aussi le coefficient de la plus haute puissance de x dans Y_{k+1}.

Cela posé, on a les deux équations

$$(6) \qquad \begin{cases} T_k = V_1 Y_k - VZ_k, \\ T_{k+1} = V_1 Y_{k+1} - VZ_{k+1}, \end{cases}$$

qui donnent, par l'élimination de V_1,

$$T_k Y_{k+1} - T_{k+1} Y_k = V (Y_k Z_{k+1} - Y_{k+1} Z_k).$$

Mais, en désignant par $\frac{N_k}{P_k}$ la réduite égale à $q_1 - \cfrac{1}{q_2 - \ldots - \cfrac{1}{q_{k-1}}}$, et par $\frac{N_{k+1}}{P_{k+1}}$ la réduite suivante, on a

$$Y_k = \lambda_k N_k, \qquad Z_k = \lambda_k P_k, \qquad \text{avec} \qquad V_k = \frac{1}{\lambda_k} T_k,$$

et

$$Y_{k+1} = \lambda_{k+1} N_{k+1}, \quad Z_{k+1} = \lambda_{k+1} P_{k+1};$$

donc $\quad Y_k Z_{k+1} - Y_{k+1} Z_k = \lambda_k \lambda_{k+1} (N_k P_{k+1} - P_k N_{k+1}) = \lambda_k \lambda_{k+1},$

à cause de la relation connue $\quad N_k P_{k+1} - P_k N_{k+1} = +1.$

En conséquence, l'équation précédente devient

$$T_k Y_{k+1} - T_{k+1} Y_k = V.\lambda_k \lambda_{k+1}. \tag{7}$$

Le premier terme du produit effectué $T_k Y_{k+1}$ est $p_k x^{m-k}.p_k x^k$ ou $p_k^2 x^m$; la plus haute puissance de x dans $T_{k+1} Y_k$ est x^{m-2}, et le premier terme de V est x^m. Donc, en égalant les coefficients de la plus haute puissance de x, qui est x^m, dans les deux membres, on aura

$$p_k^2 = \lambda_k \lambda_{k+1}; \tag{8}$$

ce qui donne successivement (en observant que $p_1 = m$ et $\lambda_1 = 1$),

$$m^2 = \lambda_2, \quad p_2^2 = \lambda_2 \lambda_3, \quad p_3^2 = \lambda_3 \lambda_4, \quad p_4^2 = \lambda_4 \lambda_5, \quad \text{etc.}$$

On déduit de là les valeurs de $\frac{1}{\lambda_2}$, $\frac{1}{\lambda_3}$, etc., et par suite

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{l} V_2 = \frac{1}{m^2} T_2, \quad V_3 = \frac{1}{\lambda_3} T_3 = \left(\frac{m}{p_2}\right)^2 T_3, \quad V_4 = \left(\frac{p_2}{mp_3}\right)^2 T_4, \\ V_5 = \left(\frac{mp_3}{p_2 p_4}\right)^2 T_5, \quad V_6 = \left(\frac{p_2 p_4}{mp_3 p_5}\right)^2 T_6, \quad V_7 = \left(\frac{mp_3 p_5}{p_2 p_4 p_6}\right)^2 T_7, \quad \text{etc.,} \\ \text{et enfin, selon que } m \text{ est pair ou impair,} \\ V_m = \left(\frac{p_2 p_4 p_6 \ldots p_{m-2}}{mp_3 p_5 \ldots p_{m-1}}\right)^2 p_m \text{ [*]}, \quad \text{ou} \quad V_m = \left(\frac{mp_3 p_5 \ldots p_{m-2}}{p_2 p_4 p_6 \ldots p_{m-1}}\right)^2 p_m. \end{array}\right.$$

C'est là le théorème complet de M. Sylvester.

Quand l'équation $V = 0$ a tous ses coefficients réels, les quantités $p_2, p_3, \ldots, p_m$ sont aussi toutes réelles, puisqu'elles sont des fonctions symétriques et entières des racines $a, b, c, \ldots$ de l'équation $V=0$, et par conséquent des fonctions entières de ses coefficients. Les polynômes V_2, V_3, etc., ne diffèrent alors de T_2, T_3, etc. que par des facteurs indépendants de x essentiellement positifs, comme le montrent les formules (9).

VI.

Je dois dire encore comment, étant donnée une équation $V = 0$ numérique ou littérale dont on ne connaît pas les racines, on trouvera les polynômes T_2, T_3, $T_4, \ldots$ sans aucun facteur étranger.

[*] p_m représente, comme T_m, le produit des carrés des différences de toutes les racines $a, b, c, \ldots, h$.

Pour cela, je substitue les expressions précédentes de V_2, V_3, V_4, etc., dans les équations primitives

$$V = V_1 q_1 - V_2, \quad V_1 = V_2 q_2 - V_3, \quad V_2 = V_3 q_3 - V_4, \ldots,$$

et je trouve

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} m^2 V &= V_1\, q_1\, m^2 - T_2, \\ p_2^2 V_1 &= T_2\, q_2 \frac{p_2^2}{m^2} - m^2 T_3, \\ p_3^2 T_2 &= T_3\, q_3 \frac{m^4 p_3^2}{p_2^4} - p_2^2 T_4, \\ p_4^2 T_3 &= T_4\, q_4 \frac{p_2^4 p_4^2}{m^4 p_3^4} - p_3^2 T_5, \\ p_5^2 T_4 &= T_5\, q_5 \frac{m^4 p_3^4 p_5^2}{p_2^4 p_4^4} - p_4^2 T_6, \\ p_6^2 T_5 &= T_6\, q_6 \frac{p_2^4 p_4^4 p_6^2}{m^4 p_3^4 p_5^4} - p_5^2 T_7, \\ &\text{etc. [*]}. \end{aligned} \right.$$

En considérant que m est le premier coefficient de V_1 ordonné suivant les puissances décroissantes de x, que p_2 est le premier coefficient de T_2, p_3 celui de T_3, etc., on tire de ces formules les conclusions suivantes.

On voit d'abord que si l'on multiplie V par m^2 et qu'on divise le produit $m^2 V$ par V_1, on obtient un quotient Q_1 du premier degré par rapport à x, égal à $q_1 m^2$, et entier par rapport à toutes les lettres qui y entrent, puis un reste qui, pris en signe contraire, est précisément T_2. On connaît donc p_2, qui est le premier coefficient de T_2. Multipliant V_1 par p_2^2, et divisant le produit $p_2^2 V_1$ par T_2, on a encore un quotient Q_2, entier par rapport à toutes les lettres, et égal à $q_2 \frac{p_2^2}{m^2}$ (quoique cette quantité paraisse fractionnaire), puis un reste qui, pris en signe contraire, est égal à $m^2 T_3$; en le divisant par m^2 on a T_3, et par conséquent

[*] On aperçoit mieux la loi de ces formules en observant que l'équation

$$V_{k-1} = V_k q_k - V_{k+1}$$

donne

$$\frac{1}{\lambda_{k-1}} T_{k-1} = \frac{1}{\lambda_k} T_k q_k - \frac{1}{\lambda_{k+1}} T_{k+1} \quad \text{ou} \quad \lambda_k \lambda_{k+1} T_{k-1} = T_k q_k \lambda_{k-1} \lambda_{k+1} - \lambda_{k-1} \lambda_k T_{k+1},$$

ou enfin, d'après l'équation (8),

$$p_k^2 T_{k-1} = T_k \cdot q_k \lambda_{k-1} \lambda_{k+1} - p_{k-1}^2 T_{k+1}.$$

on connaît p_3, coefficient de la plus haute puissance de x dans T_3. Divisant ensuite le produit $p_3^2\,T_2$ par T_3, on aura encore un quotient entier Q_3, égal à $q_3\dfrac{m^4 p_3^2}{p_2^2}$, et un nouveau reste qui sera divisible par p_2^2 ; en le divisant par ce facteur, puis changeant les signes, on aura T_4, et par suite on connaîtra p_4, qui est le premier coefficient de T_4. De même, la division de $p_4^2\,T_3$ par T_4 donnera un quotient entier Q_4 et un reste divisible par p_3^2 ; en supprimant ce facteur et changeant les signes, on connaîtra T_5 et aussi p_5. On forme ainsi successivement tous les polynômes T_2, T_3, T_4, etc. On peut les substituer à $V_2, V_3, V_4,\ldots$ dans la recherche des racines réelles de l'équation $V = 0$, en conservant V et V_1 pour les deux premières fonctions.

Connaissant $T_2, T_3, T_4,\ldots$, on pourra obtenir aussi les polynômes $Y_2, Y_3, Y_4,\ldots$

D'abord on a $Y_2 = x - a + x - b + \text{etc.} = mx + p$, p étant le coefficient de x^{m-1} dans V.

Ensuite, l'équation (7) donnera successivement

$$Y_3 = \frac{Vp_2^2 + T_3Y_2}{T_2},\quad Y_4 = \frac{Vp_3^2 + T_4Y_3}{T_3},\ \text{etc.}$$

On peut aussi, connaissant $T_2, T_3,\ldots$, former les polynômes Z_2, Z_3, etc.

En comparant les formules

$$T_2 = V_1Y_2 - VZ_2,\quad \text{et}\quad T_2 = V_1Q_1 - m^2V,$$

on a d'abord
$$Z_2 = m^2.$$

Ensuite les équations (6) donnent, en éliminant V,

$$T_kZ_{k+1} - T_{k+1}Z_k = V_1(Y_kZ_{k+1} - Y_{k+1}Z_k) = V_1\lambda_k\lambda_{k+1} = V_1p_k^2,$$

d'où l'on tire

$$Z_3 = \frac{p_2^2V_1 + m^2T_3}{T_2},\quad Z_4 = \frac{p_3^2V_1 + T_4Z_3}{T_3},\ \text{etc.}$$

Si l'on connaissait déjà Y_k, on trouverait immédiatement Z_k en divisant le produit V_1Y_k par V, car Z_k est la partie entière du quotient de cette division, d'après le § III.

On peut encore déterminer successivement $Y_2, Y_3, Y_4,\ldots, Z_2, Z_3$, etc., si l'on connaît seulement tous les quotients entiers Q_1, Q_2, etc. On partira des valeurs $Y_1 = 1$, $Z_1 = 0$, $Y_2 = Q_1$, $Z_2 = m^2$, qui résultent de la comparaison des formules $T_1 = V_1$, $T_2 = V_1Q_1 - m^2V$, avec la formule générale $T_k = V_1 Y_k - VZ_k$. Et l'on formera de proche en proche Y_3, Z_3, Y_4, etc. au moyen des relations

$$p_{k-1}^2 Y_{k+1} = Y_k Q_k - p_k^2 Y_{k-1}, \quad p_{k-1}^2 Z_{k+1} = Z_k Q_k - p_k^2 Z_{k-1},$$

qu'on déduit de celles-ci

$$N_{k+1} = N_k q_k - N_{k-1} \text{ [*]}, \quad P_{k+1} = P_k q_k - P_{k-1},$$

en y remplaçant N_k, P_k, N_{k-1}, etc. par leurs valeurs $\frac{1}{\lambda_k} Y_k$, $\frac{1}{\lambda_k} Z_k$, $\frac{1}{\lambda_{k-1}} Y_{k-1}$, etc., multipliant par $\lambda_{k-1}\lambda_k\lambda_{k+1}$, et ayant égard à la formule (8), et à ce que $Q_k = q_k \lambda_{k-1} \lambda_{k+1}$.

Nous avons appelé $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$ les quotients que fournit le calcul du plus grand commun diviseur de V et de V_1, effectué, comme l'indiquent les formules (10), de manière à éviter les coefficients fractionnaires. Ces quotients peuvent aussi s'exprimer en fonctions entières et symétriques des racines $a, b, c, \ldots$ de l'équation $V = 0$.

Par exemple, en effectuant la division de $p_4^2 T_3$ par T_4, on voit que le quotient Q_4 ne dépend que du premier et du second terme du divi-

---

[*] On peut remarquer ici une propriété des fonctions N ou Y. On a les relations

$$(11) \qquad N_3 = N_2 q_2 - N_1, \quad N_4 = N_3 q_3 - N_2, \ldots, \quad N_{m+1} = N_m q_m - N_{m-1},$$

dans lesquelles $N_1 = 1$, $N_2 = q_1$, et, comme on l'a déjà dit § II, $N_{m+1} = \frac{V}{V_m}$, ce que donne aussi l'élimination de V_1 entre les formules

$$V_m = V_1 N_m - V P_m, \quad 0 = V_1 N_{m+1} - V P_{m+1}.$$

L'équation $N_{m+1} = 0$ a donc les mêmes racines que $V = 0$.

D'après les relations (11), lorsqu'en faisant croître x, une fonction N_k autre que N_{m+1} s'évanouira, la suite des signes des fonctions $N_1, N_2, \ldots, N_m, N_{m+1}$ conservera le même nombre de variations. Mais elle en perdra une chaque fois que N_{m+1} deviendra nulle. En effet, on a

$$\frac{V}{V_1} = \frac{N_{m+1}}{P_{m+1}} = \frac{N_m N_{m+1}}{N_m P_{m+1}} \quad \text{ou} \quad \frac{V}{V_1} = \frac{N_m N_{m+1}}{1 + P_m N_{m+1}}.$$

Pour les valeurs réelles de x un peu plus grandes que celles qui annulent V, ou N_{m+1}, on sait que V et V_1 sont de même signe, et cette expression de $\frac{V}{V_1}$ montre que N_m et N_{m+1} sont aussi de même signe (le dénominateur étant alors peu différent de $+1$). Pour les valeurs de x un peu moindres que celles qui annulent V, V et V_1 ayant des signes contraires, N_m et N_{m+1} auront aussi des signes contraires.

On conclut de là que l'équation $V = 0$ ou $N_{m+1} = 0$ a autant de racines comprises entre deux nombres quelconques A et B qu'il y a de variations perdues dans la suite des signes des fonctions $N_1, N_2, \ldots, N_{m+1}$ en passant de A à B. On dira la même chose des polynômes Y, qui ne diffèrent des fonctions N que par des facteurs positifs.

On peut observer encore que, pour chaque valeur de x qui annule V, les fonctions $N_2, N_3, \ldots, N_m$, d'après les formules (11), comparées à $V_{k-1} = V_k q_k - V_{k+1}$, prennent des valeurs égales à $\frac{V_2}{V_1}$, $\frac{V_3}{V_1}, \ldots, \frac{V_m}{V_1}$, et ce fait fournit une autre démonstration de la propriété précédente.

dende et du diviseur, et l'on trouve,

$$Q_4=\sum(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2\times\sum(a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2(b-c)^2(b-d)^2(c-d)^2(x-a+x-b+x-c+x-d)$$
$$-\sum(a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2(b-c)^2(b-d)^2(c-d)^2\times\sum(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2(x-a+x-b+x-c).$$

On aurait des valeurs analogues pour les autres quotients. On y arrive encore de la manière suivante.

Les équations $T_3 = V_4 Y_3 - VZ_3$, $T_5 = V_4 Y_5 - VZ_5$, donnent

$$T_3 Y_5 - T_5 Y_3 = V(Y_3 Z_5 - Y_5 Z_3) = V\lambda_3\lambda_5(N_3 P_5 - N_5 P_3).$$

Mais on a

$$N_3 P_5 - N_5 P_3 = N_3(P_4 q_4 - P_3) - P_3(N_4 q_4 - N_3) = q_4,$$

et
$$\lambda_3\lambda_5 q_4 = Q_4;$$

donc
$$T_3 Y_5 - T_5 Y_3 = VQ_4.$$

Cette équation montre que si l'on divise $T_3 Y_5$ par V, la partie entière du quotient sera Q_4, et le reste $T_5 Y_3$; car le degré de T_3 surpasse celui de T_5 de deux unités, le degré de Y_5 surpasse aussi celui de Y_3 de deux unités; $T_3 Y_5$ est du degré $m+1$ et V du degré m. La division effectuée de $T_3 Y_5$ par le polynôme V, mis sous la forme

$$x^m - (a + b + \ldots + h)\, x^{m-1} + \text{etc.},$$

donnera la valeur de Q_4 trouvée plus haut.

J'observerai, en terminant, que la quantité p_2 ou $\sum(a-b)^2$, prise avec un signe contraire, est le coefficient du second terme de l'équation qui a pour racines les carrés des différences des racines a, b, c,... de $V=0$, et que le dernier terme de cette équation est p_m ou $-p_m$, selon que son degré $\frac{m(m-1)}{2}$ est pair ou impair. Mais les autres quantités p_3, p_4,... n'entrent pas comme coefficients dans l'équation aux carrés des différences. Ainsi p_3, qui représente $\sum(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2$, n'est pas la somme de tous les produits trois à trois des carrés des différences des racines $a, b, c, \ldots, h$, puisque, par exemple, le produit $(a-b)^2(a-c)^2(c-d)^2$ ne fait pas partie de p_3.