JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

P.-H. BLANCHET

# Mémoire sur une circonstance remarquable de la délimitation de l'onde

*Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série*, tome 7 (1842), p. 23-34.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__23_0>

# MÉMOIRE

SUR

## UNE CIRCONSTANCE REMARQUABLE
## DE LA DÉLIMITATION DE L'ONDE;

Présenté à l'Académie des Sciences, le 5 juillet 1841;

**PAR M. P.-H. BLANCHET,**

Professeur de Physique au Collége royal de Henri IV.

---

**1.** L'objet principal de ce travail est l'étude de la délimitation de l'onde dans le cas où l'on peut avoir $s' = s''$. C'est presque une généralité. Il est difficile, en effet, de dire s'il est plus général qu'une nappe soit enveloppée par toutes les autres ou que les diverses nappes s'entrecoupent. Mais avant de traiter cette seconde partie de la question, je profiterai de l'occasion pour ajouter quelques développements à la première partie, traitée dans le Mémoire précédent. Il n'est peut-être pas inutile de rapprocher la formule (17, III) [*] des résultats obtenus dans les numéros **10** et **11** du premier Mémoire (*voyez* tome V de ce Journal, page 17 et suivantes).

## § I.

**2.** L'une des trois intégrales comprises dans la forme (7, III) est absorbée dans la formule (17, III); c'est l'intégrale

$$(1) \qquad -\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{N't}^{\infty}\varphi_1(t,s)\,\chi(s)\,ds\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta \text{ [**]}.$$

---

[*] (17, III) *signifie* la formule (17) du troisième Mémoire, qui est le précédent.

[**] Le $\varphi(t, s)$ du premier Mémoire vaut deux fois le $\varphi(t, s)$ du troisième.

Les parties des deux autres qui subsistent sont alors de la forme

$$(2)\qquad -\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{N''t}^{N't}\varphi_2(t,s)\chi(s)\,ds\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,$$

$$(3)\qquad -\frac{d^2}{dt^2}\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{N'''t}^{N't}\varphi_3(t,s)\chi(s)\,ds\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

Les formes particulières de $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ dépendent respectivement de celles de $s'$, $s''$, $s'''$.

Les limites inférieures $N''t$, $N'''t$ donneront évidemment des résultats concordants avec ceux du premier Mémoire. Il s'agit de savoir ce qu'on tirera de la limite supérieure $N't$, commune aux deux intégrales (2) et (3).

Elles donneront des termes analogues à ceux que l'on trouve à la fin du n° **8** (I). Il y aura cependant une différence de signe qui se manifestera dans la différentiation, parce qu'elles sont en haut au lieu d'être en bas. On trouvera

$$(4)\qquad \begin{cases} -\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}N't\,\varphi_2(1,N')\frac{d.}{dt}\chi(N't)\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,\\ -\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}N'\,\varphi_2(1,N')\chi(N't)\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,\\ -\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}N'\,\varphi'_2(1,N')\chi(N't)\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta; \end{cases}$$

et

$$(5)\qquad \begin{cases} -\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}N't\,\varphi_3(1,N')\frac{d.}{dt}\chi(N't)\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,\\ -\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}N'\,\varphi_3(1,N')\chi(N't)\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,\\ -\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}N'\,\varphi_3(1,N')\chi(N't)\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta. \end{cases}$$

**3**. La somme des fonctions $\varphi_2(t,s)+\varphi_3(t,s)$ atteint la même limite pour $s=N't$, soit qu'on y arrive par des valeurs supérieures, soit qu'on y arrive par des valeurs inférieures à $N't$, puisque, par hypothèse, dans le voisinage de cette valeur de $s$, les fonctions $\varphi_2$ et $\varphi_3$

sont continues sans aucune singularité. Or, pour des valeurs supérieures à $N't$, on a, d'après le n° **15** (III),

$$\varphi_1(t, s) + \varphi_2(t, s) + \varphi_3(t, s) = 2s\int_0^\pi \mathrm{H}\, dp \text{ [*]}; \tag{6}$$

donc, en faisant converger $s$ vers $N't$, on aura

$$t[\varphi_1(1, N') + \varphi_2(1, N') + \varphi_3(1, N')] = 2tN'\int_0^\pi \mathrm{H}\, dp. \tag{7}$$

Si l'on réunit tout ce qui multiplie $N't\frac{d.}{dt}\chi(N't)$, dans les formules (4), (5) et (17, III), on trouvera pour coefficient total

$$-\left[\varphi_2(1, N') + \varphi_3(1, N') - 2N'\int_0^\pi \mathrm{H}\, dp\right].$$

Donc, d'après l'équation (7), on aura, toute réduction faite,

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^\pi N't\varphi_1(1, N')\frac{d.}{dt}\chi(N't),$$

ce qui s'accorde avec le résultat obtenu à la fin du n° **8** (I).

**4.** De même la seconde des intégrales (4) et la seconde des intégrales (5) donnent, avec la seconde partie de l'intégrale (17, III),

$$\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^\pi N'\varphi_1(1, N')\chi(N't)\sin\varpi\, d\varpi\, d\theta.$$

Semblablement la somme des fonctions

$$\varphi'_2(t, s) + \varphi'_3(t, s),$$

atteint la même limite pour $s = N't$, par des valeurs supérieures ou inférieures de $s$. Pour des valeurs supérieures on peut différentier l'équation (6), et l'on a

$$\varphi'_1(t, s) + \varphi'_2(t, s) + \varphi'_3(t, s) = 0,$$

---

[*] Le $\varphi(t, s)$ du premier Mémoire vaut deux fois le $\varphi(t, s)$ du troisième.

donc

$$- [\varphi'_2(t,s) + \varphi'_3(t,s)] = \varphi'_1(t,s);$$

d'où, passant à la limite

$$- [\varphi'_2(1, \mathrm{N}') + \varphi'_3(1, \mathrm{N}')] = \varphi'_1(1, \mathrm{N}'),$$

par suite, en réunissant la dernière des intégrales (4) avec la dernière des intégrales (5), on trouve

$$-\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{N}'\varphi'_1(1, \mathrm{N}')\chi(\mathrm{N}'t)\sin\varpi\, d\varpi\, d\theta.$$

Les résultats du n° **8** (I) se trouvent ainsi reproduits.

**5**. Quant aux intégrales triples, que nous avons négligé d'écrire, elles donneront

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} &-\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{\mathrm{N}''t}^{\mathrm{N}'t}\varphi''_2(t,s)\chi(s)\,ds\sin\varpi\, d\varpi\, d\theta,\\ &-\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{\mathrm{N}''t}^{\mathrm{N}'t}\varphi''_3(t,s)\chi(s)\,ds\sin\varpi\, d\varpi\, d\theta.\end{aligned}\right.$$

Elles se vérifient par le cas sphérique. $\mathrm{N}'t$ devient égal à l'une des deux autres limites, par exemple, à $\mathrm{N}''t$. L'une des deux intégrales (8) disparaît et il est aisé de voir que l'autre revient à l'intégrale triple de même genre qui s'est présentée dans le deuxième Mémoire.

## § II.

**6**. Je passe à l'examen du cas où deux des nappes de la surface des $u$, $v$, $w$ se couperaient et seraient en même temps enveloppées de toutes parts par la troisième Dans ce cas, pour certains rapports entre $u$, $v$, $w$, on aurait $s' = s''$. La courbe d'intersection serait naturellement sur une certaine surface conique ayant pour centre l'origine des coordonnées $u$, $v$, $w$. Le résidu relatif à $s$ changerait d'aspect. Il y a donc lieu à examiner spécialement cette circonstance. Pour faire voir en même temps une autre disposition du calcul, je reprendrai les transformations.

**7**. Dans les formules (2, III) les diverses parties de $\xi$, $\eta$, $\zeta$ sont de la forme

$$(9)\qquad \frac{1}{8\pi^3}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\int \mathcal{E}\,\frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)-st]\sqrt{-1}}s\omega}{(S)}f(\lambda,\mu,\nu)\,du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu,$$

ou de la forme

$$(10)\qquad \frac{-\sqrt{-1}}{8\pi^3}\int\int\int_{-\infty}^{\infty}\int\int\int \mathcal{E}\,\frac{e^{[u(x-\lambda)+v(y-\mu)+w(z-\nu)-st]\sqrt{-1}}\,\omega}{(S)}f(\lambda,\mu,\nu)\,du\,dv\,dw\,d\lambda\,d\mu\,d\nu\ [*].$$

J'ai mis dans l'exponentielle $-s$ au lieu de $+s$; ce changement de signe n'a pas d'influence.

Rien n'empêche d'appliquer à la formule (9) la transformation indiquée au n° **7** du premier Mémoire, pages 10 et 11. Elle peut se faire sous le signe $\mathcal{E}$. On aura

$$(11)\qquad \frac{1}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}\,\frac{e^{(\rho u-st)\sqrt{-1}}s\omega}{(S)}\rho^2\chi(\rho)\,du\,dv\,dw\,d\rho\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,$$

si l'on applique les formules (43, I, page 11), en posant $s = nu$, on trouve

$$(12)\qquad \frac{1}{8\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}\,\frac{e^{u(\rho-nt)\sqrt{-1}}nm}{(T)_n}\chi(\rho)u^2\rho^2\,du\,dp\,dq\,d\rho\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

T est ce que devient S quand on y remplace $s$ par $n$; $u$, $v$, $w$ par 1, $p$, $q$. Les résidus devront être pris par rapport à $n$.

Mais ici il a fallu faire attention au changement de variable indépendante sous le signe $\mathcal{E}$. (*Exercices de Mathématiques* de M. Cauchy, tome I, page 172.)

---

[*] Elle peut se déduire de la précédente par une intégration par rapport à $t$, de 0 à $t$. La partie correspondante à la limite inférieure 0, disparaîtra dans le résidu total. Nous nous occuperons donc seulement de la formule (9) et nous négligerons la formule 10, qui s'y ramène.

L'intégrale (12) revient à

$$-\frac{1}{8\pi^3}\frac{d^2.}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}\frac{e^{u(\rho-nt)\sqrt{-1}}\,nm}{(\mathrm{T})_n}\frac{\rho^2}{n^2}\chi(\rho)\,du\,dp\,dq\,d\rho\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

Les valeurs de $n$, tirées de l'équation $\mathrm{T}=0$, sont indépendantes de $u$ et de $\rho$. On peut donc faire, sous le signe $\mathcal{E}$, les intégrations relatives à ces variables. Il suffira, pour cela, d'appliquer la formule de Fourier. A cause des limites de $\rho$, il est clair que les valeurs négatives de $n$ ne donneront rien. On aura

$$(13)\qquad -\frac{1}{8\pi^2}\frac{d^2.}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}\frac{2nm}{(\mathrm{T})_n}t^2\chi(nt)\,dp\,dq\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta.$$

Le résidu intégral devra être borné aux valeurs positives de $n$.

Supposons maintenant $v=pt$, $w=qt$, $s=nt$; la formule (13) deviendra

$$(14)\qquad -\frac{1}{8\pi^2}\frac{d^2.}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}\frac{2s\omega}{(\mathrm{S})}\chi(s)\,dv\,dw\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,$$

ou encore

$$(15)\qquad -\frac{1}{8\pi^2}\frac{d^2.}{dt^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\mathcal{E}\frac{s\omega}{(\mathrm{S})}\chi(s)\,r\,dr\,dp\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta;$$

on a fait

$$v=r\sin p,\quad w=r\cos p.$$

Le résidu intégral sera borné aux valeurs positives de $s$.

8. Si les racines de l'équation $\mathrm{S}=0$ étaient inégales, on raisonnerait comme dans le troisième Mémoire et, par la transformation des résidus partiels, on trouverait

$$(16)\qquad -\frac{d^2.}{dt^2}\frac{1}{8\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\int_{\mathrm{K}}^{\infty}\mathcal{E}\frac{sr\omega}{(\mathrm{S})_r}\chi(s)\,ds\,dp\sin\varpi\,d\varpi\,d\theta,$$

sous les mêmes conditions que dans la formule (12, III), pour représenter la portion de l'intégrale (15) dans laquelle $s$ prend des valeurs supérieures à une limite convenablement choisie.

9. Je dis que l'on peut passer de la formule (15) à la formule (16), même dans le cas des racines égales; par exemple, si $s' = s''$.

Le plan $u = t$ coupe les nappes de la surface des $u$, $v$, $w$, correspondantes à $s'$ et $s''$, chacune suivant une courbe. Dans le cas de $s' = s''$, on a $S'_s = 0$, les deux courbes se rencontrent. Si elles se coupent, on a aussi $S'_r = 0$, pour un point d'intersection, afin que $\frac{dr}{ds}$ puisse avoir deux valeurs distinctes dans le voisinage de ce point.

Concevons que pour un point d'intersection on ait

$$p = \mathrm{P}, \quad r = \mathrm{R};$$

et posons généralement pour un point très-voisin

$$p = \mathrm{P} + p', \quad r = \mathrm{R} + r'.$$

On pourra mettre en évidence la partie la plus considérable de S, en écrivant sous la forme

$$\mathrm{S} = \mathrm{A}\,r'^2 + \mathrm{B}\,r'p' + \mathrm{C}\,p'^2 + \mathrm{S}_1 \tag{17}$$ [*].

Si l'on regarde $p'$ comme infiniment petit du premier ordre, $r'$ sera du même ordre, $\mathrm{S}_1$ sera d'un ordre plus élevé que le deuxième. Cette quantité $\mathrm{S}_1$ sera précisément égale à

$$\mathrm{S} - (\mathrm{A}\,r'^2 + \mathrm{B}\,r'p' + \mathrm{C}\,p'^2).$$

On aura semblablement

$$\mathrm{S}'_{r'} = 2\mathrm{A}\,r' + \mathrm{B}p' + \mathrm{S}'_1; \tag{18}$$

$\mathrm{S}'_1$ sera d'un ordre supérieur au premier.

L'équation

$$\mathrm{A}\,r'^2 + \mathrm{C}\,r'p' + \mathrm{B}\,p'^2 = 0, \tag{19}$$

---

[*] $\mathrm{S}'_p = 0$, sans cela, $r'$ serait de l'ordre de $p'^{\frac{1}{2}}$; les deux courbes se toucheraient au lieu de se couper. La somme des éléments de l'intégrale pour les points voisins du point de contact serait évidemment infiniment petite. Il n'y aurait pas de difficulté.

résolue par rapport à $r'$, donnera deux racines de la forme

$$(20)\qquad \begin{cases} r' = (h + \sqrt{k})\, p', \\ r' = (h - \sqrt{k})\, p'. \end{cases}$$

Si l'on pose $S = 0$, on en tirera deux valeurs de $r'$ qui différeront peu de celle-là, et que l'on pourra présenter sous la forme

$$(21)\qquad \begin{cases} r' = (h + \sqrt{k})\, p' + g, \\ r' = (h + \sqrt{k})\, p' + l. \end{cases}$$

$g$ et $l$ seront des quantités infiniment petites par rapport à $p'$.

Si, pour prendre le résidu relatif à la première des valeurs (21) de $r'$, on veut substituer dans l'expression

$$\frac{2 s r \omega}{S'_{r'}},$$

on pourra d'abord mettre cette expression sous la forme

$$(22)\qquad \frac{\Omega}{2A r' + B p'} + U;$$

U désignera une quantité infiniment petite par rapport au premier terme dans lequel $\Omega$ est de degré nul par rapport à $r'$ et $p'$.

Mais pour la première des racines (20), on a

$$2 A r' + B p' = + \sqrt{k}.p';$$

donc, si l'on substitue, dans l'expression (22), la première des racines (21), on obtiendra un résultat de la forme

$$(23)\qquad \frac{\Omega}{\sqrt{k}.p'} + U_1.$$

La seconde des racines (21) donnera

$$(24)\qquad -\frac{\Omega}{\sqrt{k}.p'} + U_2.$$

**12.** Il suit de là que les conclusions du troisième Mémoire subsisteront, toutes les fois que, dans le plan $u=t$, l'origine des $r$ sera tellement choisie que les six valeurs du rayon vecteur $r$, soient, pour chaque nappe de l'onde, deux à deux de signes contraires. Or cette condition sera remplie en général pour des valeurs de K et, par suite, pour des valeurs de $s$ très-grandes par rapport à $t$; donc la conclusion du nº **13** (III) a lieu, même si deux nappes de la surface des $u$, $v$, $w$ se coupent mutuellement.

**13.** On peut, en outre, restreindre la délimitation, comme au nº **14** (III). Il suffit de transporter l'origine des coordonnées en un point convenable. La courbe d'intersection des deux nappes intérieures, en général à double courbure, partage ces deux nappes en plusieurs régions. Nous nommerons, pour un instant, régions intérieures les portions de chaque nappe comprises dans l'autre, et régions extérieures les portions qui ne remplissent pas cette condition. Quand il existera un plan parallèle au plan $u=t$, tangent à une région intérieure, nous prendrons, comme au nº **15** (III), l'origine des $r$ au point homologue du point de contact. Elle se trouvera alors dans toutes les nappes. Dans le cas contraire, nous prendrons pour origine le point homologue du point où un plan, parallèle au plan $u=t$, touche la courbe d'intersection des deux nappes. La droite menée de l'origine des $u$, $v$, $w$ à ce point de contact, assujettie à couper la troisième nappe, ne peut, du même côté, couper ailleurs les deux autres; l'origine des $r$ sera encore dans les trois nappes. Les conclusions subsisteront. La limite, dans ce dernier cas, sera, comme on le voit, moins étroite que dans le premier, mais bien plus resserrée qu'au nº **13** (III). Ce résultat ne me paraît avoir rien d'étonnant, d'après l'étude des singularités et particularités, dont je donnerai l'ensemble plus tard.

**14.** Je ne m'arrêterai pas à considérer le cas où les trois nappes s'entrecouperaient deux à deux. L'analyse précédente montre ce qu'il y aurait à faire.

**15.** Dans le cas même où les trois nappes se couperaient en un même point dans le plan $u=t$, pour les points voisins de celui-là dans le

La somme des deux résidus partiels (23) et (24) sera

$$(25) \qquad U_1 + U_2,$$

quantité infiniment petite par rapport à $\frac{1}{p'}$. Si l'on intègre par rapport à $p'$ entre des limites infiniment petites, on aura une portion de l'intégrale (16), qui sera elle-même infiniment petite et pourra être négligée. D'ailleurs dans l'élément de l'intégrale correspondant à $p' = 0$, le coefficient de $dp'$ est fini, d'après la manière de prendre le résidu dans le cas des racines égales; on peut donc négliger aussi cet élément. Donc, enfin, dans l'intégrale (16) on peut sans erreur sensible négliger, à volonté tout se qui se rapporte aux points voisins d'un point d'intersection déterminé dans le plan $u = t$ par la rencontre des nappes relatives à $s'$ et $s''$. Ce sera sans influence sur la valeur de cette intégrale.

**10.** On peut appliquer des considérations semblables à l'intégrale (15). Seulement il faudra de plus mettre le facteur $\chi(s)$ sous la forme

$$\chi(s') + \chi_1,$$

en posant

$$s = s' + v$$

et

$$\chi_1 = \chi(s' + v) - \chi(s')\ [*].$$

$\chi_1$ s'évanouira avec $v$ et devra être une quantité infiniment petite en même temps que $v$.

**11.** Avec un peu d'attention on se convaincra facilement que, pour des limites inférieures convenablement choisies, les portions négligeables des intégrales (15) et (16) se rapportent à la même partie du plan $u=t$. D'ailleurs les autres éléments sont équivalents chacun à chacun; donc, comme dans le troisième Mémoire, on peut substituer l'intégrale (16) à une partie correspondante de l'intégrale (15), même lorsque les résidus peuvent se rapporter à des racines égales.

---

[*] La fonction arbitraire $\chi$ devra être susceptible d'être différenciée une fois de plus que dans le cas des racines inégales.

même plan, la somme des résidus partiels ne renfermerait pas de terme de l'ordre $-2$ ou de l'ordre $-1$ par rapport à $r'$. La somme de ces termes serait elle-même un résidu intégral nul [*]. C'est ainsi que, dans la somme des résidus partiels (25) pris au nº **9**, la somme des termes de l'ordre $-1$ est la même chose que

$$\mathcal{E}\frac{\Omega}{(Ar'^2 + Br'p' + Cp'^2)_{r'}} = 0.$$

**16.** Je terminerai par quelques remarques. Le résultat de la formule (13) du nº **10** (III) peut s'obtenir sans résidus. Il est une conséquence des propriétés des fractions rationnelles. Si $F(x)$ et $f(x)$ sont deux polynomes entiers et finis, tels que le degré du premier surpasse d'une unité le degré du second; en désignant par $x_1, x_2, x_3, \ldots$ les racines de l'équation

$$F(x) = 0,$$

et par $A_1, A_2, A_3, \ldots$ les quantités

$$\frac{f(x_1)}{F(x_1)} + \frac{f(x_2)}{F(x_2)} + \frac{f(x_3)}{F(x_3)} \cdots\cdots$$

de l'identité

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{x - x_2} + \frac{A_3}{x - x_3} \cdots\cdots,$$

---

[*] $s$ prendrait aussi une valeur déterminée $s_0$, par exemple. On poserait donc

$$s = s_0 + v,$$

et l'on aurait, pour les points voisins du point d'intersection dans le plan $u = t$:

$$S = Ar'^3 + Br'^2p' + Cr'^2v + \ldots + S_1,$$
$$S'_{r'} = 3Ar'^2 + 2Br'p' + 2Cr'v + \ldots + S'_1,$$
$$\mathcal{E}\frac{sr\omega}{(S)_{r'}} = \mathcal{E}\frac{\Omega + ar' + bp' + cv}{(Ar'^3 + Br'^2p' + Cr'^2v + \ldots)_{r'}} + U = U,$$

U serait d'un ordre supérieur à l'ordre $-1$. Donc, etc.

Je n'examinerai pas, pour le moment, le cas où le polynome $Ar'^3 + Br'^2p'\ldots$ aurait des racines égales. Ce serait une singularité trop particulière.

on conclura que la somme

$$A_1 + A_2 + A_3 \ldots .$$

est égale au rapport des deux coefficients du premier terme de $f(x)$ et du premier terme de $F(x)$. La même somme $A_1 + A_2 \ldots$ sera nulle, si la différence des degrés est plus grande que 1.

Mais l'utilité des résidus se fait mieux sentir dans le cas des racines égales, qui ne s'est trouvé exceptionnel dans notre question, qu'à cause de la transformation des résidus partiels.

**17.** Enfin il est aisé de voir que les transformations employées dans le premier et le troisième Mémoires peuvent être la source de transformations plus générales.

On peut faire subir des réductions analogues aux belles intégrales multiples, données par M. Cauchy, pour un système quelconque d'équations aux différentielles partielles à coefficients constants. J'appliquerai les mêmes méthodes de réduction aux intégrales des équations homogènes, quel que soit le nombre des variables principales et indépendantes, et j'en déduirai la délimitation et l'interprétation de ces intégrales.

Cette généralisation, purement analytique, sera l'objet d'un travail que j'ai commencé et dont il est facile de prévoir les résultats.

Il est même possible d'étendre la méthode à des approximations successives pour obtenir la dispersion, dans le cas d'un ébranlement central, et les résultats analytiques analogues.

Je me bornerai, pour aujourd'hui, à la solution de cette question très-générale de la délimitation de l'onde, quelle que soit la nature du milieu élastique; pourvu qu'il offre une distribution symétrique par rapport à chaque point et partout la même.