

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JAMES MAC-CULLAGH

Mémoire sur les lois de la réflexion et de la réfraction cristallines

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 7 (1842), p. 217-265.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7_217_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

MÉMOIRE

SUR LES LOIS

DE LA RÉFLEXION ET DE LA RÉFRACTION CRISTALLINES ;

PAR M. JAMES MAC-CULLAGH,

Membre du Collège de la Trinité, à Dublin[*].

[Extrait des *Transactions de l'Académie royale d'Irlande*, vol. XVIII, part. 1^{re}.]

Lorsqu'un rayon de lumière, polarisé dans un plan connu, subit la réflexion et la réfraction à la surface d'un milieu transparent, les rayons dans lesquels il se partage sont polarisés suivant d'autres plans. On peut se proposer de déterminer les positions de ces plans, et les intensités relatives de ces rayons; ou, en langage théorique, de trouver l'amplitude des vibrations réfléchies et réfractées, quand on suppose donnée celle des vibrations incidentes. Le milieu transparent peut être, ou uniréfringent comme le verre, ou biréfringent comme le spath d'Islande. Si le milieu est de la première espèce, le problème est comparativement simple, et n'est en réalité qu'un cas particulier du problème plus général où le milieu est supposé de la seconde espèce. Dans la marche de la science, il était naturel que la question la plus simple fût traitée la première, et Fresnel, pendant sa courte et brillante carrière, trouva le temps de la résoudre. Mais le problème général, pour les milieux biréfringents, n'avait été abordé par personne, lorsqu'en 1834 je fus conduit à m'en occuper. J'ai rap-

[*] Bien que le Mémoire de M. Mac-Cullagh ait une date déjà assez ancienne, puisqu'il a été lu à l'Académie de Dublin le 9 janvier 1837, il est peu connu en France, et nos lecteurs nous sauront gré d'en publier ici la traduction. L'auteur s'est occupé à diverses reprises de la théorie de la lumière. Rappelons à cette occasion la lettre dans laquelle il a élevé en 1839 une réclamation de priorité au sujet de certaines formules. On trouvera cette lettre et les observations auxquelles elle a donné lieu de la part de M. Cauchy, dans le tome VIII des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, page 961.

(J. LIOUVILLE.)

pelé alors une conclusion que j'avais déduite quelques années auparavant, et qui, dans cette occasion, m'a été d'un grand secours. Passionné pour les constructions géométriques, j'avais pris plaisir, la première fois que je connus les théories de Fresnel, à traduire, autant que je le pouvais, ses expressions algébriques sous une forme géométrique, et traitant ainsi les formules bien connues dans lesquelles il a renfermé la solution du problème énoncé plus haut, j'avais obtenu un résultat remarquable, qui me donna la première idée du principe que j'ai employé depuis sous le nom de *principe de l'équivalence des vibrations*. Pour faire connaître brièvement ce résultat, je désignerai par un terme nouveau une ligne droite menée parallèlement au plan de polarisation d'un rayon, et perpendiculaire à la direction de ce rayon même. Appelant cette ligne *la transversale* du rayon polarisé, j'ai trouvé, d'après les formules de Fresnel, que, quand de la lumière polarisée tombe sur un milieu uniréfringent, les transversales des rayons incident, réfléchi, et réfracté, sont parallèles à un même plan, lequel est le plan de polarisation du rayon réfracté, et que les grandeurs des vibrations ou les plus grandes excursions des molécules éthérées, pour les rayons incident et réfléchi, sont inversement l'une à l'autre comme les sinus des angles que les transversales respectives de ces rayons font avec la transversale du rayon réfracté. Je fus frappé de l'analogie complète que ces relations entre les transversales avaient avec la composition des forces ou des petites vibrations en mécanique; malheureusement, dans la théorie de Fresnel, les vibrations de la lumière sont, non parallèles, mais perpendiculaires aux transversales; ainsi aucune circonstance physique n'appuyait cette analogie, puisqu'il n'y a pas de mouvement sur les transversales; tandis que l'analogie n'existe pas pour les vibrations elles-mêmes dans les directions assignées par Fresnel. Aussi fut-ce avec un vif intérêt que j'appris depuis, par la publication du dixième volume des *Mémoires de l'Institut*, que M. Cauchy avait alors déduit de principes mécaniques que les vibrations de la lumière polarisée sont dans la direction des transversales; mais cette déduction ne pouvait être admise avec une entière confiance, parce qu'elle était contraire à l'hypothèse de Fresnel; en outre, j'avais trouvé le moyen d'adapter mon analogie à cette dernière hypothèse, en supposant que *les aires* soient composées à l'instar des vibrations, en sorte que j'hésitais dans le choix à faire entre les deux

opinions. Adoptant cependant l'opinion de M. Cauchy, comme celle qui s'accordait le plus naturellement avec l'analogie énoncée, je fus conduit à cette conclusion, que la vibration réfractée est probablement la résultante des vibrations incidente et réfléchie; et je compris que si le principe était vrai pour les milieux uniréfringents, il devait être vrai aussi, d'après sa nature et quand il serait convenablement généralisé, pour les cristaux biréfringents; c'est-à-dire que, dans ces cristaux, la résultante des deux vibrations réfractées serait la même, en grandeur et en direction, que la résultante des vibrations incidente et réfléchie.

Tel était le principe des vibrations équivalentes. Mais je n'eus pas plutôt commencé à le regarder comme probable, qu'une objection s'éleva contre lui: dans le cas d'un rayon réfracté simplement, d'un milieu moins dense dans un milieu plus dense, la grandeur de la vibration réfractée, déduite de ce principe, était plus grande que celle déduite de la théorie de Fresnel, dans la proportion du sinus d'incidence au sinus de réfraction. Conséquemment, en supposant, avec Fresnel, que l'éther est plus dense dans les milieux plus réfringents, la loi de la conservation des forces vives était enfreinte.

Je tombai encore dans un autre embarras, en cherchant les lois de la lumière réfléchie par les cristaux. Regardant comme certaine l'hypothèse de Fresnel, que la densité de l'éther dans un milieu ordinaire est proportionnelle au carré de l'indice de réfraction, je ne savais quelle hypothèse faire par rapport aux cristaux biréfringents, dans lesquels l'indice change avec la direction du rayon, car cette densité est nécessairement indépendante de la direction, et ne saurait varier avec l'indice de réfraction. Il y a environ deux ans, je parvins à lever cette difficulté, en supposant que la densité de l'éther est la même dans tous les milieux [*]. A la même époque, je fus forcé d'employer le principe des vibrations équivalentes, pour obtenir un nombre suffisant de conditions; et quoique j'eusse négligé l'accord qui subsiste maintenant entre ce principe et la loi des forces vives, il se trouva que la nouvelle hypo-

[*] Cette hypothèse est adoptée par M. Challis; elle s'accorde très-bien avec le phénomène astronomique de l'aberration de la lumière. (Voir, sur ce sujet, le Rapport du professeur Lloyd sur l'Optique physique; quatrième Rapport de l'Association britannique pour l'avancement des sciences, pages 311 à 313.)

thèse d'une densité constante rendait la force vive du rayon réfracté exactement la même que dans la théorie de Fresnel.

Mais pour voir combien il était nécessaire d'employer le principe des vibrations équivalentes, il faut observer que, quand un rayon polarisé atteint un cristal, il y a quatre choses à déterminer : la direction et la grandeur de la vibration réfléchie, et les grandeurs des deux vibrations réfractées. Il est donc nécessaire d'avoir quatre conditions, ou des relations conduisant à ce même nombre d'équations. Mais les hypothèses adoptées par Fresnel, pour résoudre le problème de la réflexion sur les milieux ordinaires, ne donnent que trois conditions; ces hypothèses sont les suivantes :

Première hypothèse. Les vibrations de la lumière polarisées s'exécutent dans le plan de l'onde, et perpendiculairement au plan de polarisation.

Deuxième hypothèse. La densité de l'éther est proportionnelle au carré de l'indice de réfraction du milieu.

Troisième hypothèse. La force vive est conservée.

Quatrième hypothèse. Les vibrations parallèles à la surface de séparation des deux milieux sont équivalentes, c'est-à-dire que la vibration réfractée, parallèle à la surface, est la résultante des vibrations incidente et réfléchie, parallèles à la même surface.

On voit que la quatrième hypothèse donne deux conditions, et que la loi des forces vives en donne une troisième.

Prenons maintenant le principe plus général des vibrations équivalentes, au lieu de la quatrième hypothèse de Fresnel; altérons la première comme nous avons montré qu'il était nécessaire de le faire quand on admet ce principe, et supposons l'éther de densité constante. Alors, si nous conservons la loi des forces vives, nos nouvelles hypothèses seront celles-ci :

Première hypothèse. Les vibrations de la lumière polarisée s'exécutent dans le plan de l'onde, et *parallèlement* au plan de polarisation; ce qui peut être exprimé en un mot, en disant que les vibrations sont *transversales*, ce terme ayant le sens particulier que j'ai défini.

Deuxième hypothèse. La densité de l'éther dans tous les milieux est la même que dans le vide.

Troisième hypothèse. La force vive est conservée.

Quatrième hypothèse. Les vibrations dans deux milieux contigus sont équivalentes, c'est-à-dire que la résultante des vibrations incidente

et réfléchi est la même, en grandeur et en direction, que la résultante des vibrations réfractées.

Il est évident que cette dernière hypothèse apporte trois équations, que l'on obtiendra en décomposant les vibrations parallèlement à trois axes coordonnés; et la loi des forces vives fournit la quatrième équation. Ainsi nous avons le nombre d'équations nécessaire.

Telles sont les hypothèses qui servent de base au Mémoire actuel. Elles ont été disposées de manière à renfermer la loi des forces vives, car j'ai trouvé récemment que cette loi doit nécessairement accompagner les autres; mais je l'avais d'abord négligée, et, à l'aide d'une autre hypothèse, j'avais obtenu des formules qui représentaient assez bien les expériences connues. Cette autre hypothèse me fut suggérée par un article de M. Cauchy, inséré au *Bulletin des sciences mathématiques* [*],

[*] Sur la réfraction et la réflexion de la lumière, *Bulletin des sciences mathématiques*, juillet 1830. Dans ce Mémoire, les vibrations de la lumière polarisée sont supposées perpendiculaires au plan de polarisation, quoique ce Mémoire fût publié immédiatement après que l'auteur eut avancé l'opinion contraire, que j'ai adoptée d'après lui parce qu'elle s'accorde très-bien avec l'analogie énoncée plus haut; mais il y renonce formellement, et retourne à l'hypothèse de Fresnel. M. Cauchy suppose encore, dans ce Mémoire, que la densité de l'éther est la même dans tous les milieux; mais depuis il a trouvé des raisons d'abandonner aussi cette hypothèse. Voyez les Notes adressées à M. Libri, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. II, p. 343, où il donne les motifs de ses nouvelles opinions. M. Cauchy dit : « Ainsi Fresnel a eu » raison de dire, non-seulement que les vibrations des molécules éthérées sont généralement comprises dans les plans des ondes, mais encore que les plans de polarisation sont perpendiculaires aux directions des vitesses ou des déplacements moléculaires. J'arrive, au reste, à cette dernière conclusion d'une autre manière, en établissant les lois de la réflexion et de la réfraction à l'aide d'une nouvelle méthode qui sera développée dans mon Mémoire. . . Cette méthode ne m'oblige plus à supposer, comme je l'avais fait dans un article du *Bulletin des sciences*, que la densité de l'éther est la même dans tous les milieux. Mes nouvelles recherches donnent lieu de croire que cette densité varie, en général, quand on passe d'un milieu à un autre. » Plus récemment, dans ses *Nouveaux Exercices de Mathématiques*, septième livraison, M. Cauchy établit positivement que ses principes ne lui permettent pas l'hypothèse d'une densité constante. Il donne aussi les équations différentielles qui, comme il l'a trouvé par sa nouvelle méthode, doivent subsister à la surface de séparation de deux milieux, et desquelles il déduit les formules de Fresnel pour la réflexion ordinaire; mais ces équations ne renferment pas la loi de la réflexion sur les substances cristallisées.

et dans lequel il arrive, par un procédé particulier, aux formules de Fresnel relatives à la réflexion ordinaire. Les hypothèses principales qu'il emploie sont des relations entre certaines quantités appelées pressions; et c'est une relation semblable que j'adoptais au lieu de la loi des forces vives. Je supposais qu'aux confins de deux milieux, la pression sur la surface de séparation, dans la direction perpendiculaire au plan d'incidence, devait être la même, qu'elle fût considérée comme résultant des vibrations du premier milieu, ou de celles du second. Je pensais que cette hypothèse était vraie en général, comme pour les milieux ordinaires. En la combinant avec le principe des vibrations équivalentes, j'en déduisis plusieurs expressions pour les cristaux à un axe, et entre autres une formule pour les angles de polarisation dans différents azimuts du plan de réflexion. Quand je comparai les résultats déduits de cette formule avec les expériences de sir David Brewster sur les angles de polarisation du spath d'Islande (*Transactions philosophiques*, 1819, page 150), l'accord fut si satisfaisant que je crus fermement être arrivé à la véritable formule de ces angles; et quoique cette vérification ne me permit pas de conclure que les principes d'où j'étais parti étaient vrais, la présomption en leur faveur était du moins très-forte; ma conviction fut telle que, n'ayant pas tardé à reconnaître l'accord de la loi des forces vives avec mes autres hypothèses, je ne crus pas nécessaire de voir ce que donnerait directement cette loi [*], employée au lieu de la relation entre les pressions.

[*] D'ailleurs la loi des forces vives me donnait une équation du second degré, et je désirais avoir toutes mes équations linéaires, de peur que, dans la question en apparence compliquée de la réflexion cristalline, elles donnassent deux réponses quand la nature de la question n'en requérait qu'une. Cette circonstance s'est présentée, depuis la lecture de ce Mémoire, lorsque j'ai appliqué mes hypothèses au cas de la réflexion interne sur la seconde surface d'un cristal à un axe. Supposant qu'un rayon ordinaire sorte du cristal après avoir subi deux réflexions intérieures, et désignant par θ l'angle que la transversale du rayon émergent fait avec le plan d'incidence, j'ai trouvé, pour déterminer θ , une équation de la forme

$$A + B \operatorname{tang} \theta + C \operatorname{tang}^2 \theta = 0,$$

dans laquelle A est très-petit, mais non nul; en sorte que l'équation donne deux ra-

Ce fut dans cet état que j'exposai ma théorie à la séance de l'Association britannique de Dublin, en août 1835 (*London and Edinburgh philosophical Magazine*, t. VII, page 295); les conséquences et les résultats furent ensuite publiés dans une lettre adressée à sir David Brewster (*ibid.*, vol. VIII, février 1836).

Maintenant, il faut le remarquer, quand de la lumière commune est polarisée par réflexion à la surface d'un cristal biréfringent, le plan de polarisation ne doit pas, en général, coïncider avec le plan de réflexion, comme dans le cas d'un milieu ordinaire : ces deux plans font entre eux un certain angle, qu'on peut appeler *la déviation*; c'est en égalant deux valeurs de cette déviation, que j'avais obtenu la formule des angles de polarisation. Cette formule, comme nous l'avons vu, était d'accord avec les faits, mais il arrivait néanmoins que les expressions de la déviation, employées pour obtenir la formule, étaient inexactes. C'est M. Seebeck que je dois remercier d'avoir signalé cette singulière circonstance. Dans les *Annales de Poggendorff*, t. XXXVIII, page 276, après avoir donné un extrait de ma Lettre à sir David Brewster, il compare mes résultats avec ses expériences nombreuses et soignées sur les angles de polarisation du spath d'Islande, et sur les angles de déviation. Il a reconnu que ma formule représentait la première classe d'expériences aussi bien qu'on pouvait le désirer, mais que les valeurs théoriques des déviations ne s'accordaient pas du tout avec ses mesures expérimentales. A l'aide des déviations exactes qu'il a publiées à cette occasion, j'ai pu remonter jusqu'à la source de l'erreur, et reconnaître qu'elle dépendait de la relation entre les pressions. J'abandonnai donc cette relation, pour lui substituer le principe des forces vives, et la théorie devint même beaucoup plus simple par cet

cines, une très-petite, et l'autre qui est la valeur véritable. Il est clair toutefois que la mise en équation du problème pêche en quelque chose; mais je suis maintenant porté à croire que la faute ne dépend pas du principe des forces vives. Il est possible que les lois de la propagation de la lumière dans les milieux biréfringents ne soient pas encore complètement connues. Quelle que soit la loi supplémentaire qui détruise l'anomalie de ce résultat, elle rendra compte sans doute du phénomène extraordinaire observé par Brewster, sur la réflexion à la première surface, quand le cristal est en contact avec un milieu d'une puissance réfractive à peu près égale à la sienne

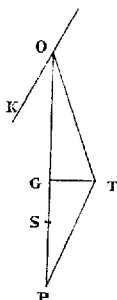
échange. C'est ainsi que j'ai obtenu pour la déviation une expression nouvelle qui s'accorde avec les expériences de M. Seebeck, tandis que la formule des angles de polarisation reste la même qu'auparavant. Cette correction fut faite le 6 décembre 1836. (*Philosophical Magazine*, vol. X, page 43, janvier 1837.)

Avant cette nouvelle publication, j'étais arrivé à des lois géométriques très-élégantes, qui peuvent se retenir aisément, et qui embrassent toute la théorie de la réflexion cristalline. Pour énoncer ces lois, il convient de mener toutes les transversales par la même origine O, que nous supposons être le point d'incidence lui-même qui appartient à la fois aux rayons incident, réfléchi, ou réfracté; on peut imaginer les ondes planes menées par la même origine, de telle sorte que chaque transversale soit couchée sur l'onde plane qui lui correspond. Les ondes planes incidente et réfléchie seront respectivement perpendiculaires aux rayons incident et réfléchi, mais les deux ondes planes réfractées seront, en général, obliques sur leurs rayons. Dans ce dernier cas, une droite menée par l'origine perpendiculairement à l'onde plane est appelée la normale de l'onde. Il est nécessaire de remarquer que les quatre ondes planes coupent la surface du cristal suivant une même ligne, qui est perpendiculaire au plan d'incidence, et que les angles de réfraction sont les angles que les normales des ondes planes réfractées font avec une perpendiculaire à cette surface. L'indice de réfraction est le rapport du sinus de l'angle d'incidence au sinus de l'angle de réfraction, comme dans les milieux ordinaires; mais ici ce rapport est variable, et a différentes valeurs pour le même angle d'incidence. J'ai montré, dans un autre Mémoire, comment on détermine les rayons réfractés et leurs ondes planes, quand le rayon incident est donné. (*Irish. Acad. Trans.*, vol. XVII, page 252.)

Comme nous supposons que les molécules d'éther vibrent parallèlement aux transversales, nous pouvons prendre les longueurs des transversales proportionnelles aux grandeurs ou aux amplitudes des vibrations, ces longueurs étant toujours mesurées à partir de l'origine commune O. Alors, en vertu de notre quatrième hypothèse, les transversales se composeront et décomposeront exactement suivant les mêmes règles que si elles représentaient des forces agissant au point O.

Nous pouvons maintenant concevoir la surface des ondes dans le

crystal, ayant son centre au point d'incidence O; les vitesses des rayons lumineux qui traversent le cristal, dans des directions parallèles aux rayons vecteurs de cette surface, sont représentées par ces rayons mêmes. Soit décrite une sphère concentrique avec un rayon OS, qui représen-



tera, sur la même échelle, la vitesse constante de la lumière dans le milieu extérieur au cristal. A tout point T pris sur la surface des ondes appartient un plan tangent, sur lequel nous abaissons, de O, une perpendiculaire OG rencontrant ce plan en G; sur cette perpendiculaire nous prenons la longueur OP, de O au delà de G, telle que OP soit troisième proportionnelle à OG et à la ligne constante OS. Alors, tandis que le point T décrit la surface des ondes, le point P décrira une autre surface, réciproque de la première. (Pour la théorie des surfaces réciproques, voir *Irish. Acad. Trans.*, vol. XVII, page 241). Cette autre surface peut être appelée *surface des indices* [*], parce que son rayon vecteur OP est l'indice de réfraction du rayon lumineux dont la vitesse est OT, ou mieux celui de l'onde plane TG qui correspond à ce rayon; car si nous concevons qu'une onde plane incidente, touchant la sphère, soit réfractée dans l'onde TG touchant la surface des ondes en T, le sinus de l'angle d'incidence sera au sinus de l'angle de réfraction comme OS à OG, ou comme OP à OS; en sorte que si l'on

[*] C'est cette surface que j'appelais autrefois *surface de réfraction*, nom qui ne la définissait pas suffisamment. Sir W. Hamilton l'a appelée *surface de l'onde lente* (of wave slowness), et en même temps *surface des composantes* (of componess). Mais le nom de *surface des indices* semble se recommander de lui-même, comme court et expressif.

prend la constante OS pour unité, l'indice de réfraction sera représenté par OP . La surface des ondes et la surface des indices seront réciproques l'une à l'autre, chaque point T sur l'une ayant un point P réciproquement correspondant sur l'autre.

Il faut remarquer que la transversale du rayon OT est perpendiculaire au plan OTP ; car, dans la théorie de Fresnel, comme je l'ai prouvé jadis (*Ibidem*, vol. XVI, page 76), la direction des vibrations est la droite TG ; et comme je suppose que la transversale est perpendiculaire aux vibrations de cette théorie, et située en même temps dans l'onde plane qui est perpendiculaire à OP , il s'ensuit que la transversale doit être perpendiculaire à la fois aux lignes TG et OP , et conséquemment à leur plan OTP . C'est pourquoi, si l'on conçoit la transversale menée par O à angle droit du plan OTP , le plan de polarisation du rayon OT devra passer par cette ligne. Mais il n'y a pas d'autre condition qui fixe la position de ce dernier plan. Nous pouvons le faire passer par le rayon OT lui-même, comme dans un milieu ordinaire, ou le conduire suivant la normale à l'onde plane avec Fresnel; enfin, au lieu de le mener par un de ces deux côtés du triangle OTP , nous pouvons le prendre parallèle au troisième côté TP . Cette dernière définition est celle que je préfère, parce que le plan ainsi déterminé possède d'importantes propriétés. Toutefois je l'appellerai le *plan polaire*, expression plus courte que celle de plan de polarisation, qui restera distincte, et correspondra si l'on veut à la définition adoptée par Fresnel; d'ailleurs, pour un milieu unirefringent, les deux expressions signifieront la même chose. Le plan polaire du rayon OT est donc un plan passant par sa transversale, et parallèle à la droite TP ; en sorte que, si OK est parallèle à TP , le plan polaire passera par OK . En général, pour trouver la transversale et le plan polaire d'un rayon, il faut d'abord joindre le point où ce rayon rencontre la surface des ondes avec le point correspondant de la surface des indices, puis tracer un plan qui contienne la droite de jonction et le centre des deux surfaces. Alors la ligne menée par l'origine perpendiculairement à ce plan sera la transversale, et le plan mené par cette transversale parallèlement à la ligne de jonction sera le plan polaire.

Maintenant, soit un rayon polarisé, tombant en O sur le cristal. Il sera généralement divisé en deux rayons réfractés. Mais chacun de ces

rayons peut successivement disparaître si l'on polarise le rayon incident dans un certain plan. Supposons donc qu'il n'y ait qu'un seul rayon réfracté OT. Dans quel plan doit être polarisé le rayon incident, ou, en d'autres termes, quelle doit être la position de sa transversale pour qu'il en soit ainsi? et quelle sera alors la transversale du rayon réfléchi? La réponse est simple : ces deux transversales seront situées dans le plan polaire du rayon réfracté. Développons en peu de mots cette solution.

Le rayon réfracté OT étant donné, on peut trouver son plan polaire, et ensuite les intersections de ce plan avec les ondes planes, incidente et réfléchie. Ces intersections sont les positions des transversales incidente et réfléchie, quand OT est le seul rayon réfracté. La transversale réfractée est aussi dans le plan polaire, et cette transversale est, par notre quatrième hypothèse, la diagonale d'un parallélogramme dont les côtés sont les deux autres transversales; ce qui détermine les longueurs des trois transversales, ou les amplitudes relatives de leurs vibrations. Enfin, les intensités des rayons incident et réfléchi sont proportionnelles aux carrés de leurs transversales. Quand le rayon OT disparaît, on doit prendre le plan polaire de l'autre rayon, et procéder de la même manière.

Ainsi il existe sur l'onde plane incidente deux directions de la transversale qui ne donnent qu'un seul rayon réfracté. Ces directions, aussi bien que leurs correspondantes sur l'onde plane réfléchie, peuvent être appelées *transversales uniradiales*; elles sont les intersections des plans polaires des deux rayons réfractés avec les ondes planes incidente et réfléchie.

Quand la transversale incidente ne coïncide avec aucune des directions uniradiales, il faut la décomposer parallèlement à ces directions; alors chaque transversale composante fournit un rayon réfracté, en se conformant aux règles précédentes. Les transversales réfléchies provenant de ces composantes incidentes, sont trouvées séparément par les mêmes règles, et doivent être ensuite composées en une seule.

Dans la réflexion ordinaire, si la transversale incidente est dans le plan d'incidence, ou lui est perpendiculaire, la transversale réfléchie l'est pareillement; mais cela n'a pas lieu dans la réflexion cristalline. La méthode générale, qui vient d'être donnée, sera toutefois capable de

déterminer les positions et les grandeurs des transversales réfléchies dans ces deux cas remarquables; et alors, si on le préfère, on pourra réduire tout autre cas à ces deux-là, en décomposant la transversale incidente sur les directions parallèle et perpendiculaire au plan d'incidence.

Si nous concevons que deux transversales incidentes, à angle droit l'une sur l'autre, tournent autour de l'origine, il existera évidemment une position de leur système, telle que les transversales réfléchies correspondantes seront aussi à angle droit. Il y a de l'avantage à employer cette position, dont la recherche ne présente aucune difficulté, quand la lumière incidente n'est pas polarisée. Car les transversales incidentes étant rectangulaires, on pourra supposer la lumière également partagée entre elles, et les intensités des portions réfléchies correspondantes se trouveront par les règles précédentes. Les transversales réfléchies étant aussi rectangulaires, la somme de ces intensités donnera l'intensité totale de la lumière réfléchie, et leur différence sera l'intensité de la lumière polarisée qui en fera partie. Cette partie sera polarisée dans un plan passant par la plus grande des deux transversales réfléchies.

La lumière commune sera complètement polarisée par la réflexion, quand les deux directions uniradiales, sur l'onde plane réfléchie, coïncideront l'une avec l'autre, c'est-à-dire quand cette onde plane et les deux plans polaires réfractés auront une intersection commune. En effet, dans cette circonstance, si la lumière incidente était polarisée, il est évident que la transversale réfléchie se coucherait sur cette intersection, quelle que fût la position de la transversale incidente; et c'est pourquoi, si la lumière incidente est commune, avec ses transversales dans toute direction possible, les transversales réfléchies n'auront qu'une seule et même direction. Ainsi la lumière réfléchie sera complètement polarisée dans un plan passant par l'intersection des plans polaires.

Puisque le rayon réfléchi est perpendiculaire à son onde plane, il suit de ce qui précède, qu'à l'angle de polarisation d'un cristal, le rayon réfléchi est perpendiculaire à l'intersection des plans polaires des deux rayons réfractés. La transversale réfléchie est, comme nous l'avons vu, cette même intersection; elle est inclinée, en général, sur

le plan d'incidence, et nous avons eu l'occasion de parler de cette inclinaison sous le nom de *dévi*ation. Si l'on suppose maintenant que la double réfraction diminue au point de disparaître, l'intersection des plans polaires coïncidera avec le rayon réfracté. Il n'y aura alors aucune déviation, et les rayons réfléchi et réfracté seront à angle droit l'un sur l'autre, conformément à la loi de Brewster sur l'angle de polarisation d'un milieu ordinaire.

La construction que nous avons donnée, pour déterminer le plan polaire d'un rayon, devient inutile quand le rayon OT est normal à la surface des ondes, car alors OP coïncide avec OT, et cette construction ne peut plus servir à trouver la transversale; mais dans ce cas le plan polaire est aisément déterminé, puisqu'il n'est autre que le plan de polarisation de Fresnel. Par exemple, s'il s'agit du rayon ordinaire dans un cristal à un axe, son plan polaire passe par ce rayon même et par l'axe du cristal; et pour un milieu uniaxé le plan polaire et le plan de polarisation sont identiques.

Il est convenable d'appliquer nos règles générales au cas de la réflexion et de la réfraction simples. Supposons qu'un rayon polarisé tombe sur la surface d'un milieu uniaxé; le plan mené par la transversale incidente et le rayon réfracté sera le plan de polarisation de ce rayon, et coupera l'onde plane réfléchie suivant sa transversale. La transversale réfractée sera la diagonale du parallélogramme ayant pour côtés les deux autres transversales; les grandeurs relatives des trois transversales étant ainsi connues, tout se trouve déterminé [*].

[*] Cette construction a été communiquée à l'Association britannique de Dublin (*Voyez les Rapports de cette Association, ou le London and Edinburg Phil. Mag.*, vol. VII, page 295). Voici un extrait du Mémoire que je lus à cette occasion.

« On verra que les formules de Fresnel sur le même sujet s'accordent exactement » avec notre construction pour les positions des plans de polarisation, et pour l'amplitude de la vibration réfléchie. Mais l'accord n'a plus lieu pour l'amplitude de la vibration réfractée, quoique la force vive du rayon réfracté soit la même dans les deux théories.

« Il est très-remarquable qu'il suffise d'altérer les hypothèses de Fresnel de manière à les mettre d'accord avec les principes précédents, pour déduire de ses équations de condition des formules qui s'accordent sous tous les rapports, même pour l'amplitude de l'onde réfractée, avec la construction que nous avons donnée en sui-

La raison de cette construction sera évidente, si l'on considère que, pour un milieu uniréfringent, le plan polaire est le même que le plan de polarisation; et, puisqu'il n'y a qu'un seul rayon réfracté, que les trois transversales sont dans le plan polaire de ce rayon, conformément à la remarque générale d'où nous sommes partis. Procédons mainte-

» vant une route différente (c'est-à-dire en nous servant de la relation entre les pres-
 » sions au lieu de la loi des forces vives). Les altérations nécessaires sont au nombre
 » de deux : 1° les vibrations doivent être supposées parallèles et non perpendicu-
 » laires au plan de polarisation; et 2° la densité de l'éther doit être supposée la même
 » dans les deux milieux; d'où il suit que les masses d'éther correspondantes, imagi-
 » nées par Fresnel, sont entre elles comme le sinus du double de l'angle d'incidence
 » est au sinus du double de l'angle de réfraction. En substituant dans les équations de
 » condition de Fresnel cette valeur du rapport des masses, on obtient des formules
 » que je suis porté à regarder comme exactes. »

Les équations dont il est parlé dans cet extrait sont celles qui dérivent du principe des forces vives, et de l'équivalence des vibrations parallèles à la surface de séparation des deux milieux. Mais il est bon d'observer que si les vibrations s'exécutent toutes dans la même direction, c'est-à-dire si la lumière est polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, les formules présentent une analogie remarquable avec celles d'Young pour deux boules élastiques, desquelles l'une choque directement l'autre supposée d'abord en repos; les masses des boules étant dans le même rapport que les masses d'éther citées plus haut. Il me semble que ce rapprochement conduit à l'explication la plus simple de la loi de Brewster, relative à l'angle de polarisation. En effet, s'il n'existe pas de mouvement réfléchi quand les boules sont égales, toute la vitesse du choc étant communiquée à la boule qui était d'abord en repos, de même il n'y a pas de vibration réfléchie quand les masses d'éther sont égales, c'est-à-dire quand le sinus du double de l'angle d'incidence est égal au sinus du double de l'angle de réfraction, ou quand les angles d'incidence et de réfraction font ensemble un angle droit. La totalité de la vibration incidente passe alors dans le rayon réfracté. En général, si i_1 et i_2 représentent les angles d'incidence et de réfraction, les masses des boules supposées seront entre elles comme $\sin 2i_1$ est à $\sin 2i_2$; et si la vitesse primitive est prise pour unité, la théorie du choc des corps donnera

$$(i) \quad \frac{\sin 2i_1 - \sin 2i_2}{\sin 2i_1 + \sin 2i_2} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{tang}(i_1 - i_2)}{\text{tang}(i_1 + i_2)},$$

pour la vitesse retenue par la boule choquante, et

$$(ii) \quad \frac{2 \sin 2i_1}{\sin 2i_1 + \sin 2i_2} \quad \text{ou} \quad \frac{\sin 2i_1}{\cos(i_1 + i_2) \cos(i_1 - i_2)},$$

nant à la démonstration du théorème avancé dans cette remarque, en prouvant qu'il résulte nécessairement de nos hypothèses; nous en déduirons ensuite quelques résultats facilement comparables aux expériences.

Supposons la direction de la transversale incidente, telle qu'il n'y

pour la vitesse communiquée à l'autre boule. Ces expressions (i) et (ii) sont les mêmes que les valeurs de τ_3 et τ_2 que nous déduirions des équations (1) et (2) du texte, en supposant $\tau_1 = 1$, et les angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, droits. La construction générale conduit aux mêmes résultats, si nous déduisons les rapports limites des transversales, de la supposition que leurs directions se rapprochent successivement l'une de l'autre, pour coïncider enfin sur une droite perpendiculaire au plan d'incidence.

Quand les transversales sont toutes dans le plan d'incidence, ou quand la lumière est polarisée dans ce plan, les transversales incidente, réfléchie, et réfractée, sont respectivement entre elles comme $\sin(i_1 + i_2)$, $\sin(i_1 - i_2)$, $\sin 2i_1$; car chaque transversale est proportionnelle au sinus de l'angle compris entre les deux autres, et dans le cas actuel l'angle compris entre les deux transversales est égal à l'angle compris entre les rayons correspondants. De là, prenant la transversale incidente pour unité, la transversale réfléchie est

$$(iii) \quad \frac{\sin(i_1 - i_2)}{\sin(i_1 + i_2)},$$

et la transversale réfractée

$$(iv) \quad \frac{\sin 2i_1}{\sin(i_1 + i_2)}.$$

On a déjà observé que notre théorie diffère de celle de Fresnel, eu égard à la grandeur des transversales réfractées. Les expressions (ii) et (iv) doivent, en effet, être multipliées chacune par $\frac{\sin i_2}{\sin i_1}$ pour produire les expressions correspondantes qui résultent des hypothèses de Fresnel. Mais les deux théories diffèrent aussi par les deux directions relatives des transversales incidente et réfléchie. Car, en supposant que la lumière tombe sur un milieu plus réfringent, ou que i_1 soit plus grand que i_2 , notre construction indique que ces transversales, quand l'angle d'incidence est petit, tendent vers la même direction, tandis que Fresnel conclut précisément le contraire. Cependant ce désaccord cesse quand on approche de l'incidence limite de 90° ; car les deux théories s'accordent à faire tendre les deux transversales, incidente et réfléchie, vers des directions opposées. Cette dernière conclusion est conforme à la conséquence que le professeur Lloyd a tirée de ses expériences sur l'interférence de la lumière directe et de la lumière réfléchie sous une incidence très-oblique (Voyez *Irish. Acad. Trans.*, vol. XVII, page 176).

ait qu'un seul rayon réfracté. Il est évident que les trois transversales doivent se trouver dans un même plan, puisque, par notre quatrième hypothèse, la vibration réfractée est la résultante des vibrations incidente et réfléchie; il suffit donc de prouver que ce plan des transversales n'est autre que le plan polaire du rayon réfracté. Soient τ_1, τ_2, τ_3 , les longueurs respectives des trois transversales, incidente, réfractée et réfléchie; $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, les angles qu'elles font avec le plan d'incidence (θ_2 étant connu par la théorie de Fresnel); i_1, i_2, i_3 , les inclinaisons des trois ondes planes sur la surface du cristal; enfin m_1, m_2, m_3 , les masses relatives d'éther mises en mouvement par ces ondes. Alors nos quatre hypothèses donneront les quatre équations suivantes :

$$\begin{aligned} (1) \quad & m_1 \tau_1^2 = m_2 \tau_2^2 + m_3 \tau_3^2, \\ (2) \quad & \tau_1 \sin \theta_1 + \tau_3 \sin \theta_3 = \tau_2 \sin \theta_2, \\ (3) \quad & \tau_1 \cos \theta_1 \cos i_1 + \tau_3 \cos \theta_3 \cos i_3 = \tau_2 \cos \theta_2 \cos i_2, \\ (4) \quad & \tau_1 \cos \theta_1 \sin i_1 + \tau_3 \cos \theta_3 \sin i_3 = \tau_2 \cos \theta_2 \sin i_2. \end{aligned}$$

La première équation est évidemment la traduction de la loi de conservation des forces vives; les trois autres équations sont données par le principe des vibrations équivalentes, en décomposant les vibrations, ou les transversales, sur trois directions rectangulaires. Dans la seconde équation les trois transversales sont projetées perpendiculairement au plan d'incidence, dans la quatrième perpendiculairement à la face du cristal, et dans la troisième parallèlement à l'intersection de ces deux plans. Quand les angles $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, commencent, les transversales sont dans le plan d'incidence, dans une telle position relative, que si leur système tournait dans ce plan d'un angle droit, elles se trouveraient chacune dans la direction vers laquelle marche son onde plane. Ces angles croissent, du même côté du plan d'incidence, de 0° à 360° . Les angles i_1, i_2, i_3 , sont ceux d'incidence, de réfraction et de réflexion; mais, pour plus de symétrie, ils désignent les angles que les normales aux ondes planes, menées par l'origine dans les directions de leurs mouvements, font avec la perpendiculaire à la surface, dirigée vers l'intérieur du cristal. Il arrive ainsi que i_3 est le supplément de i_1 ; d'après cette relation, les équations (3) et (4)

donnent

$$(5) \quad \begin{cases} \tau_1 \cos \theta_1 - \tau_3 \cos \theta_3 = \tau_2 \cos \theta_2 \frac{\cos i_2}{\cos i_1}, \\ \tau_1 \cos \theta_1 + \tau_3 \cos \theta_3 = \tau_2 \cos \theta_2 \frac{\sin i_2}{\sin i_1}, \end{cases}$$

et par addition et soustraction,

$$(6) \quad \tau_1 = \tau_2 \frac{\cos \theta_2 \sin(i_1 + i_2)}{\cos \theta_1 \sin 2i_1}, \quad \tau_3 = \tau_2 \frac{\cos \theta_2 \sin(i_2 - i_1)}{\cos \theta_3 \sin 2i_1}.$$

Si l'on substitue ces valeurs dans les équations (1) et (2), en observant que $m_3 = m_1$, comme cela est évident, on obtient

$$(7) \quad \frac{\sin^2(i_1 + i_2)}{\cos^2 \theta_1} - \frac{\sin^2(i_1 - i_2)}{\cos^2 \theta_3} = \frac{m_2}{m_1} \frac{\sin^2 2i_1}{\cos^2 \theta_2},$$

$$(8) \quad \sin(i_1 + i_2) \operatorname{tang} \theta_1 - \sin(i_1 - i_2) \operatorname{tang} \theta_3 = \sin 2i_1 \operatorname{tang} \theta_2.$$

Retranchant de l'équation (7) l'identité

$$\sin^2(i_1 + i_2) - \sin^2(i_1 - i_2) = \sin 2i_1 \sin 2i_2,$$

il reste

$$(9) \quad \begin{cases} \sin^2(i_1 + i_2) \operatorname{tang}^2 \theta_1 - \sin^2(i_1 - i_2) \operatorname{tang}^2 \theta_3 \\ = \frac{\sin^2 2i_1}{\cos^2 \theta_2} \left(\frac{m_2}{m_1} - \frac{\sin 2i_2}{\sin 2i_1} \cos^2 \theta_2 \right); \end{cases}$$

et cette équation, en posant

$$(10) \quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{\sin 2i_2 + 2h \sin^2 \theta_2}{\sin 2i_1},$$

devient

$$(11) \quad \begin{cases} \sin^2(i_1 + i_2) \operatorname{tang}^2 \theta_1 - \sin^2(i_1 - i_2) \operatorname{tang}^2 \theta_3 \\ = \sin 2i_1 (\sin 2i_2 + 2h) \operatorname{tang}^2 \theta_2, \end{cases}$$

et est divisible par l'équation (8), le quotient étant

$$(12) \quad \begin{cases} \sin(i_1 + i_2) \operatorname{tang} \theta_1 + \sin(i_1 - i_2) \operatorname{tang} \theta_3 \\ = (\sin 2i_2 + 2h) \operatorname{tang} \theta_2. \end{cases}$$

Alors, ajoutant et retranchant les équations (8) et (12), on obtient

$$(13) \quad \begin{cases} \operatorname{tang} \theta_1 = \cos(i_1 - i_2) \operatorname{tang} \theta_2 + \frac{h \operatorname{tang} \theta_2}{\sin(i_1 + i_2)}, \\ \operatorname{tang} \theta_3 = -\cos(i_1 + i_2) \operatorname{tang} \theta_2 + \frac{h \operatorname{tang} \theta_2}{\sin(i_1 - i_2)}. \end{cases}$$

Ces équations donnent les positions des transversales, incidente et réfléchie, quand h est connu.

Prenons pour axes des z , x , y , les directions choisies pour établir les équations (2), (3), (4); en sorte que l'origine étant O , le plan des xy soit le plan d'incidence, et l'axe des x sur la surface de cristal. Le rayon réfléchi étant placé dans l'angle fait par les directions positives des x et y , la condition initiale que nous avons donnée pour les angles θ_1 , θ_2 , θ_3 , sera satisfaite, si l'on suppose que, lors de la naissance de ces angles, les transversales τ_1 et τ_2 tombent entre les directions négatives de x et y , et la transversale τ_3 entre $+x$ et $-y$. Alors si θ_1 , θ_2 , θ_3 , sont comptés du côté de l'axe positif des z , de telle sorte que chacun d'eux puisse être de 90° , quand la transversale correspondante est parallèle à cet axe, les équations de la transversale τ_1 seront

$$(14) \quad \frac{z}{\operatorname{tang} \theta_1} = -\frac{x}{\cos i_1} = -\frac{y}{\sin i_1},$$

et celles de τ_3

$$(15) \quad \frac{z}{\operatorname{tang} \theta_3} = \frac{x}{\cos i_1} = -\frac{y}{\sin i_1}.$$

Soit l'équation

$$(16) \quad z + Ax + By = 0$$

celle du plan passant par les directions τ_1 , τ_2 et τ_3 . Pour déterminer A et B , il faut éliminer les variables de cette équation (16), successivement à l'aide des groupes (14) et (15); ce qui conduit aux deux équations de condition

$$(17) \quad \operatorname{tang} \theta_1 - A \cos i_1 - B \sin i_1 = 0, \quad \operatorname{tang} \theta_3 + A \cos i_1 - B \sin i_1 = 0,$$

qui, par addition et soustraction, donnent

$$(18) \quad B = \frac{\text{tang } \theta_1 + \text{tang } \theta_3}{2 \sin i_1}, \quad A = \frac{\text{tang } \theta_1 - \text{tang } \theta_3}{2 \cos i_1}.$$

Substituant dans ces valeurs les expressions (13) de $\text{tang } \theta_1, \text{tang } \theta_3$, on a

$$(19) \quad \begin{cases} B = \text{tang } \theta_2 \left(\sin i_2 + \frac{h \cos i_2}{\sin^2 i_1 - \sin^2 i_2} \right), \\ A = \text{tang } \theta_2 \left(\cos i_2 - \frac{h \sin i_2}{\sin^2 i_1 - \sin^2 i_2} \right); \end{cases}$$

d'où, en faisant

$$(20) \quad \text{tang } k = \frac{h}{\sin^2 i_1 - \sin^2 i_2},$$

on déduit

$$(21) \quad \frac{B}{A} = \frac{\text{tang } i_2 + \text{tang } k}{1 - \text{tang } k \text{ tang } i_2} = \text{tang } (i_2 + k).$$

Mais si $z = 0$, dans (16), on a

$$(22) \quad Ax + By = 0,$$

pour l'équation de la droite suivant laquelle le plan des transversales coupe le plan d'incidence. Cette droite est située entre les directions $+x$ et $-y$, comme la normale à l'onde réfractée; elle fait donc avec la direction des $-y$ un angle ν qui a évidemment pour tangente $\frac{B}{A}$; et, d'après l'expression (21), on a

$$(23) \quad \nu = i_2 + k.$$

Ce qui montre que l'intersection des deux plans est inclinée, sur la normale à l'onde réfractée, d'un angle k .

Il faut maintenant chercher la valeur de h , qui dépend des masses relatives d'éther mises en mouvement par les ondes incidente et réfractée. Concevons que les rayons incident et réfracté soient des faisceaux cylindriques, ayant une section commune sur le plan des xz , ou sur la surface du cristal; supposons que chaque pinceau soit coupé par

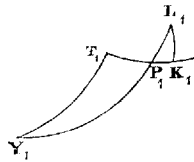
deux plans parallèles à son onde plane, et distants l'un de l'autre d'une longueur d'ondulation; alors les volumes des cylindres compris entre ces plans représenteront les masses d'éther correspondantes, puisque, par notre seconde hypothèse, la densité du fluide est la même dans les deux milieux. Ces volumes sont l'un à l'autre dans le rapport composé, de leurs hauteurs qui sont les longueurs d'ondulation, et des aires de leurs bases. Les hauteurs sont évidemment entre elles comme $\sin i_1$ est à $\sin i_2$. La première base est une section perpendiculaire du faisceau incident, la seconde une section oblique du faisceau réfracté, l'obliquité étant égale à l'angle ε compris entre la normale à l'onde plane réfractée et son rayon. Les sections perpendiculaires des deux faisceaux sont entre elles comme les cosinus des angles qu'elles font avec la section commune des deux cylindres, ou comme $\cos i_1$ est à $\cos i_{(2)}$; $i_{(2)}$ désignant l'angle compris entre le rayon réfracté et la direction négative des y . La seconde base est plus grande que la section perpendiculaire du faisceau réfracté dans la proportion de l'unité à $\cos \varepsilon$. Tous ces rapports combinés donnent

$$(24) \quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{\sin i_2 \cos i_{(2)}}{\sin i_1 \cos i_1 \cos \varepsilon}.$$

On peut obtenir directement le même résultat, en remarquant que, dans tout système d'ondes, les masses d'éther correspondantes sont proportionnelles aux ordonnées y des points où les rayons rencontrent leurs surfaces des ondes. J'appelle ici *système d'ondes* une onde incidente accompagnée de toutes les ondes qui en dérivent par réflexion et par réfraction, soit sur la même surface du cristal, soit sur des surfaces parallèles. Si au point où le rayon incident coupe son onde sphérique on mène un plan tangent à cette sphère, ce plan coupe le plan des xz suivant une droite parallèle à l'axe des z ; si par cette droite on mène d'autres plans tangents à la surface des ondes en quatre points, ces plans tangents seront les ondes dérivées de l'onde incidente; et les points de contact, y compris celui de la sphère, seront les points où les rayons rencontrent leurs surfaces des ondes. Alors les masses correspondantes seront représentées par des prismes, ayant une base rectangulaire commune située sur le plan

des xz ; un des côtés de ce rectangle est la distance qui sépare l'origine O de l'intersection commune des plans tangents; la face triangulaire de chaque prisme a pour base cette même distance, et pour sommet un point de contact. Ces prismes ayant une base commune, seront proportionnels à leurs hauteurs, lesquelles sont les ordonnées y des points de contact. Cette proportionnalité conduit aisément à l'expression (24).

Soient T_1, P_1, Y_1 , les points où OT, OP , et la direction négative des y , rencontrent l'onde sphérique de rayon OS ; et L_1 le point où cette onde est traversée par la droite d'intersection du plan des transversales et du plan d'incidence. Alors les points Y_1, P_1, L_1 , étant tous



dans le plan d'incidence, seront sur un même grand cercle $Y_1 P_1 L_1$; et menant les grands cercles $I_1 P_1, Y_1 T_1$, nous aurons $Y_1 P_1 = i_2$, $Y_1 T_1 = i_{(2)}$, $T_1 P_1 = \varepsilon$, et $Y_1 L_1 = \varphi = i_2 + k$, d'après (23); d'où $P_1 L_1 = k$.

Comme la transversale τ_2 est perpendiculaire au plan OTP , ou au plan du grand cercle $T_1 P_1 Y_1$, le cosinus de l'angle sphérique $T_1 P_1 Y_1$ est le sinus de θ_2 , et le triangle $T_1 P_1 Y_1$ donne conséquemment

$$(25) \quad \cos i_{(2)} = \cos i_2 \cos \varepsilon + \sin i_2 \sin \varepsilon \sin \theta_2;$$

cette valeur, substituée dans l'équation (24), donne

$$(26) \quad \frac{m_2}{m_1} = \frac{\sin 2 i_2 + 2 \sin^2 i_2 \sin \theta_2 \operatorname{tang} \varepsilon}{\sin 2 i_1}.$$

Si l'on compare ce résultat avec l'expression (10), on trouve

$$(27) \quad h = \frac{\sin^2 i_2 \operatorname{tang} \varepsilon}{\sin \theta_2};$$

d'où il suit, d'après l'équation (20), que

$$(28) \quad \text{tang } k = \frac{\sin^2 i_2 \text{ tang } \varepsilon}{(\sin^2 i_1 - \sin^2 i_2) \sin \theta_2}.$$

Menons le grand cercle $L_1 K_1$ à angle droit sur $T_1 P_1$, et qui le rencontre en K_1 ; alors le plan de $L_1 K_1$ sera le plan des transversales, puisque ce dernier plan passe par L_1 et est perpendiculaire à $T_1 P_1$. Mais la tangente de $P_1 K_1$ est égale à la tangente de $P_1 L_1$ multipliée par le cosinus de l'angle P_1 ou par le sinus de θ_2 ; c'est pourquoi, désignant $P_1 K_1$ par ε_1 , et rappelant que $P_1 L_1 = K_1$, nous trouvons

$$(29) \quad \frac{\text{tang } \varepsilon_1}{\text{tang } \varepsilon} = \frac{\sin^2 i_2}{\sin^2 i_1 - \sin^2 i_2}.$$

Maintenant, nous avons vu que le rapport de OP à OS , ou de OS à OG , est l'indice de réfraction; en sorte que $\sin^2 i_1$ est à $\sin^2 i_2$ comme OP à OG . D'où il suit, d'après (29), que

$$(30) \quad \frac{\text{tang } \varepsilon_1}{\text{tang } \varepsilon} = \frac{OG}{OP - OG} = \frac{OG}{GP};$$

mais $OG : GP :: \text{tang } TPG : \text{tang } TOG$; et puisque $GOT = \varepsilon$, il s'ensuit que $\varepsilon_1 = TPG = KOP$. Conséquemment, OK rencontrera la surface de la sphère au point K_1 . Donc enfin, comme nous l'avons avancé, *quand il n'y a qu'un seul rayon réfracté, le plan des transversales est le plan polaire de ce rayon.*

Le signe de h est toujours le même que celui de l'angle sphérique $T_1 P_1 Y_1$. Mais, pour éloigner toute ambiguïté par rapport à ce signe, nous devons faire quelques conventions additionnelles. Supposons, comme nous l'avons fait jusqu'ici, que la lumière réfractée se meuve de O à T , et concevons une droite menée par l'origine, parallèle à GT , et dirigée de G vers T ; soit à chercher l'angle δ_2 que cette droite fait avec le plan d'incidence, et qui, comme θ_1, θ_2 , provient d'une position initiale comprise entre les directions négatives de x et y . Alors δ_2 sera toujours égal, ou à l'angle P_1 du triangle sphérique $T_1 P_1 Y_1$, ou à l'angle rentrant $(360^\circ - P_1)$, et $\cos \delta_2$ n'aura qu'une même valeur dans les deux cas. Conséquemment, si au lieu de (25)

nous nous servons de la formule trigonométrique

$$(31) \quad \cos i_{(2)} = \cos i_2 \cos \varepsilon + \sin i_2 \sin \varepsilon \cos \vartheta_2,$$

nous trouvons

$$(32) \quad h = \frac{\sin^2 i_2 \cos \varepsilon \cos \vartheta_2}{\sin^2 \theta_2},$$

valeur qui montre que le signe de h est toujours le même que celui de $\cos \vartheta_2$. Maintenant, comme θ_2 diffère de ϑ_2 d'un angle droit, nous supposerons

$$(33) \quad \theta_2 = \vartheta_2 + 90^\circ,$$

et nous aurons alors $\sin \theta_2 = \cos \vartheta_2$, algébriquement aussi bien que numériquement. Ainsi, en adoptant ces conventions, la valeur de h dans (27) aura le signe convenable. Substituant donc cette valeur de h dans les formules (13), on a

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{tang } \theta_1 = \cos(i_1 - i_2) \text{ tang } \theta_2 + \frac{\sin^2 i \text{ tang } \varepsilon}{\cos \theta_2 \sin(i_1 + i_2)}, \\ \text{tang } \theta_3 = -\cos(i_1 + i_2) \text{ tang } \theta_2 + \frac{\sin^2 i_2 \text{ tang } \varepsilon}{\cos \theta_2 \sin(i_1 - i_2)}. \end{array} \right.$$

Ces formules donnent les directions uniradiales, ou les positions des transversales incidente et réfléchie, quand le seul rayon réfracté est celui que nous avons considéré. Les directions semblables, quand l'autre rayon existe seul, sont données par les formules

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{tang } \theta'_1 = \cos(i_1 - i'_2) \text{ tang } \theta'_2 + \frac{\sin^2 i'_2 \text{ tang } \varepsilon'}{\cos \theta'_2 \sin(i_1 + i'_2)}, \\ \text{tang } \theta'_3 = -\cos(i_1 + i'_2) \text{ tang } \theta'_2 + \frac{\sin^2 i'_2 \text{ tang } \varepsilon'}{\cos \theta'_2 \sin(i_1 - i'_2)}, \end{array} \right.$$

où toutes les quantités, à l'exception de i_1 qui reste le même, sont marquées d'un accent, pour indiquer qu'elles appartiennent au second rayon réfracté.

Les directions uniradiales étant trouvées par ces équations, les grandeurs relatives des transversales uniradiales sont déterminées

par les équations (6). Quand la transversale incidente n'est pas uniradiale, il est évident, comme nous l'avons dit plus haut, qu'elle peut être décomposée sur les deux directions uniradiales [*]; que chaque transversale composante, comme si l'autre n'existait pas, fournira un des rayons réfractés, et une transversale réfléchie partielle sur une des directions uniradiales; enfin que la transversale réfléchie totale sera la résultante des deux transversales partielles.

[*] Il paraît très-évident que, si une transversale incidente est décomposée sur deux directions quelconques, les transversales réfractée et réfléchie, déduites directement de cette transversale incidente, seront les résultantes de celles qui se déduiraient des composantes traitées chacune séparément; supposer qu'il en pût être autrement, ce serait faire violence à nos idées sur la physique. Néanmoins il est nécessaire de prouver que ce principe n'est pas contraire à la loi des forces vives, car, bien que la force vive puisse être conservée pour chaque couple de composantes, comme cela a lieu, par exemple, quand elles sont uniradiales, nous ne pouvons cependant en conclure qu'elle sera nécessairement conservée par leurs résultantes. Là se trouve une preuve de la vérité de notre théorie; car nous sommes parvenus à démontrer que la loi des forces vives n'est pas enfreinte par l'adoption du principe en question. Quelles que puissent être les deux directions sur lesquelles la transversale incidente est décomposée, comme les transversales réfléchie et réfractée qui appartiennent à chaque composante peuvent être obtenues à l'aide d'une décomposition sur les directions uniradiales, il suffit de considérer le cas de cette dernière décomposition.

La transversale incidente étant désignée par T_1 , soit T_3 la transversale réfléchie déterminée par les règles données dans le texte; soient τ_1, τ'_1 , les composantes uniradiales de la première; τ_3, τ'_3 , celles de la seconde. Alors on aura

$$T_1^2 = \tau_1^2 + \tau_1'^2 + 2\tau_1\tau_1'\cos(\theta_1 - \theta_1'), \quad T_3^2 = \tau_3^2 + \tau_3'^2 + 2\tau_3\tau_3'\cos(\theta_3 - \theta_3'),$$

où $\theta_1, \theta_1', \theta_3, \theta_3'$, ont les mêmes significations que dans le texte. La force vive d'un rayon réfracté est $m_1(\tau_1^2 - \tau_3^2)$, et celle de l'autre $m(\tau_1'^2 - \tau_3'^2)$; la force vive des deux rayons réfractés est donc $m_1(\tau_1^2 + \tau_1'^2 - \tau_3^2 - \tau_3'^2)$, quantité qui doit être égale à $m_1(T_1^2 - T_3^2)$; c'est-à-dire que l'on doit avoir

$$(v) \quad \tau_1\tau_1'\cos(\theta_1 - \theta_1') = \tau_3\tau_3'\cos(\theta_3 - \theta_3'),$$

ou, à l'aide des expressions (6) pour τ_1, τ_3 , et de leurs semblables pour τ_1', τ_3' ,

$$(vi) \quad \begin{cases} \sin(i_1 + i_2)\sin(i_1 + i_2')(1 + \text{tang}\theta_1\text{tang}\theta_1') \\ \sin(i_1 - i_2)\sin(i_1 - i_2')(1 + \text{tang}\theta_3\text{tang}\theta_3') \end{cases}$$

Quand $\theta_3 = \theta'_3$, les transversales partielles réfléchies doivent coïncider, et leur résultante aura une direction fixe, indépendante de la direction de la transversale incidente. L'angle d'incidence correspondant à ce cas est l'angle de polarisation, et la valeur commune de θ_3 et θ'_3 est la déviation. Si, à l'angle de polarisation, les transversales partielles réfléchies sont égales en grandeur, et opposées en direction, leur résultante s'évanouit, et le rayon réfléchi disparaît. C'est ce qui arrive quand la transversale incidente est dans le plan des deux transversales réfractées, et située sur l'intersection de ce plan avec l'onde plane incidente; car lorsqu'il n'y a pas de rayon réfléchi, la transversale incidente seule doit être équivalente aux deux transversales réfractées.

Puisque la transversale réfléchie peut être annulée à l'angle de po-

ou enfin, par la substitution des valeurs (3) et de leurs semblables,

$$(vii) \quad \sin(i_2 + i'_2)[\cos(i_2 - i'_2) + \cotang \theta_2 \cotang \theta'_2] + h + h' = 0;$$

équation dans laquelle h' désigne pour un rayon réfracté ce que h désigne pour l'autre; la valeur de h étant donnée par la formule (27), et h' par la même formule avec des lettres accentuées. On peut observer que l'angle d'incidence a disparu de cette équation.

Donc si les lois que nous avons obtenues sont réellement celles de la réflexion cristalline, cette dernière équation (vii) doit être satisfaite à l'aide des relations déduites des lois de la propagation; ou mieux, cette équation doit exprimer une propriété de la surface des ondes d'un cristal, quoiqu'il puisse paraître étrange que cette propriété puisse dériver des lois de la réflexion, lois qui paraîtraient au premier abord n'avoir aucun rapport avec la forme de la surface des ondes. Or nous avons trouvé que cette équation (vii) exprime une propriété rigoureusement vraie de la surface des ondes d'un cristal à deux axes découverte par Fresnel; fait très-curieux, qui prouve, non-seulement que les lois de la réflexion et celles de la réfraction sont parfaitement adaptées l'une à l'autre, mais aussi que ces deux espèces de lois ont leur source commune dans d'autres lois plus intimes, et non encore découvertes. En réalité les lois de la réflexion ne sont pas indépendantes par elles-mêmes, car les expressions (iii) et (iv) de la note précédente, sur la réflexion ordinaire, sont déduites du principe des vibrations équivalentes, et satisfont en outre à la loi des forces vives. Il y a lieu d'espérer que de nouveaux progrès dans l'optique physique conduiront à des principes plus élevés et plus élémentaires, qui établiront un lien naturel entre les lois de la réflexion et celles de la propagation, comme entre les parties d'un même système.

lumière incidente dans les points o et e ; soit la droite OA , coupant la sphère en A , la direction de l'axe du cristal; et soient menés les grands cercles Ao , Ae , AY . Les points i , e , o , i' , sont tous sur le cercle XV . Le point E , où le rayon extraordinaire OE prolongé en arrière rencontre la sphère, sera sur le cercle Ae ; et si, comme dans la figure, l'arc Ae est plus petit qu'un quadrans, le point e sera situé entre A et E . Le plan polaire du rayon ordinaire est évidemment le plan du cercle Ao ; mais la détermination du plan polaire de l'autre rayon exige la construction suivante : sur l'arc AeE , prenez la portion ef , telle que e puisse être situé entre E et f , et que $\text{tang } ef$ soit à $\text{tang } Ee$ comme $\sin^2 eY$ est à $(\sin^2 iY - \sin^2 eY)$. Par f menez le grand cercle ft , perpendiculaire au cercle AeE ; il est évident, d'après la formule (29), que le plan de ft est le plan polaire du rayon extraordinaire. Sur chaque circonférence Ao et ft , les points qui sont distants de 90° de i et de i' , en mesurant les distances par des arcs de grands cercles, sont les points où les transversales uniradiales, venant du centre O , coupent la sphère. Soient t le point d'intersection de Ao et de ft , et ti' l'arc de grand cercle qui unit le point t au point i' . Quand l'arc ti' est un quadrans, les deux transversales uniradiales, appartenant au rayon réfléchi, coïncident toutes les deux avec la droite Ot ; l'angle d'incidence est alors l'angle de polarisation, le plan de ti' est le plan de polarisation du rayon réfléchi, et l'angle $ti'Y$ est la déviation.

Pour trouver les équations propres aux cristaux à un axe, nous supposerons que les formules (34) appartiennent au rayon ordinaire, et les formules (35) au rayon extraordinaire. Alors $\varepsilon = 0$, et $\varepsilon' = \text{arc } Ee$. Désignant par θ et θ' les angles sphériques Aoi , Aei , on verra aisément que $\theta_2 = \theta + 180^\circ$, $\theta'_2 = \theta' + 90^\circ$, si l'on conçoit que le point A et l'axe positif des z soient en avant du plan XOY . Et si ω' désigne l'arc Ae , tandis que b et a désignent les réciproques des indices principaux, ordinaire et extraordinaire, la loi d'Huyghens, concernant la double réfraction des cristaux à un axe, donnera

$$(36) \quad \text{tang } \varepsilon' = \frac{a^2 - b^2}{S^2} \sin \omega' \cos \omega',$$

où

$$(37) \quad S^2 = \frac{\sin^2 i'_2}{\sin^2 i_1} = b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \omega'.$$

Pour toutes ces relations, on a, d'après les formules (34),

$$(38) \quad \text{tang } \theta_1 = \cos(i_1 - i_2) \text{ tang } \theta, \quad \text{tang } \theta_3 = -\cos(i_1 + i_2) \text{ tang } \theta,$$

pour le rayon ordinaire; et d'après les formules (35),

$$(39) \quad \begin{cases} \text{tang } \theta'_1 = -\cos(i_1 - i'_2) \text{ cotang } \theta' - (a^2 - b^2) \frac{\sin \omega' \cos \omega' \sin^2 i_1}{\sin \theta' \sin(i_1 + i'_2)}, \\ \text{tang } \theta'_3 = \cos(i_1 + i_2) \text{ cotang } \theta' - (a^2 - b^2) \frac{\sin \omega' \cos \omega' \sin^2 i_1}{\sin \theta' \sin(i_1 - i'_2)}, \end{cases}$$

pour le rayon extraordinaire.

Les quatre équations précédentes déterminent les directions uniraxiales; et l'équation suivante

$$(40) \quad \begin{cases} \cos(i_1 + i_2) \text{ tang } \theta + \cos(i_1 + i'_2) \text{ cotang } \theta' \\ - (a^2 - b^2) \frac{\sin \omega' \cos \omega' \sin^2 i_1}{\sin \theta' \sin(i_1 - i'_2)} = 0, \end{cases}$$

obtenue en posant $\text{tang } \theta_3 = \text{tang } \theta'_3$, est celle qui détermine l'angle de polarisation.

En faisant usage de cette dernière équation pour en déduire les lois de l'angle de polarisation dans différentes positions de l'axe du cristal, nous nous bornerons au cas où la réflexion a lieu dans l'air, parce que l'angle $(i_1 - i'_2)$ est alors considérable, tandis que les quantités $\cos(i_1 + i_2)$ et $\cos(i_1 + i'_2)$ sont petites, en sorte qu'il sera aisé d'arriver à des résultats approximatifs. Car nous aurons, en premier lieu,

$$(41) \quad \cos(i_1 + i'_2) = \cos(i_1 + i_2) - (i'_2 - i_2),$$

à très-peu près, puisque $(i_1 + i_2)$ ne diffère pas beaucoup de l'angle droit; et parce que

$$(42) \quad \sin i_2 = b \sin i_1, \quad \sin i'_2 = S \sin i_1,$$

nous aurons aussi, rigoureusement,

$$(43) \quad \sin^2 i'_2 - \sin^2 i_2 = (S^2 - b^2) \sin^2 i_1 = (a^2 - b^2) \sin^2 \omega' \sin^2 i_1,$$

ou

$$(44) \quad \sin(i'_2 - i_2) = (a^2 - b^2) \frac{\sin^2 \omega' \sin^2 i_1}{\sin^2(i'_2 + i_2)},$$

formule que l'on peut écrire ainsi

$$(45) \quad i_2' - i_2 = (a^2 - b^2) \frac{\sin^2 \omega' \sin^2 i_1}{\sin^2 i_2},$$

avec une exactitude suffisante. Cette valeur de $(i_2' - i_2)$ ayant été substituée dans (41), l'expression qui en résulte pour $\cos(i_1 + i_2')$ doit être substituée dans la formule (40), qui devient alors

$$(46) \quad \begin{cases} \cos(i_1 + i_2)(\tan \theta + \cot \theta) \\ -(a^2 - b^2) \sin^2 i_1 \sin \omega \left(\frac{\sin \omega \cot \theta}{\sin 2 i_2} + \frac{\cos \omega}{\sin \theta \cos 2 i_2} \right) = 0, \end{cases}$$

si, désignant l'arc Ao par ω , nous confondons ω' avec ω , θ' avec θ , et que nous écrivions $\cos 2 i_2$ au lieu de $\sin(i_1 - i_2')$. Multipliant tous les termes de (46) par $\sin \theta \cos \theta$, nous trouvons

$$(47) \quad \cos(i_1 + i_2) = (a^2 - b^2) \sin^2 i_1 \sin \omega \cos \theta \left(\frac{\sin \omega \cos \theta}{\sin 2 i_2} + \frac{\cos \omega}{\cos 2 i_2} \right).$$

De A menons l'arc AR coupant l'arc iY à angle droit au point R, et prenons $RY = p$, $AR = q$. Alors, à l'aide des valeurs

$$(48) \quad \cos \omega = \cos q \cos(p - i_2), \quad \sin \omega \cos \theta = \cos q \sin(p - i_2),$$

données par le triangle rectangle ARo, l'équation (47) prendra la forme

$$(49) \quad \cos(i_1 + i_2) = \frac{(a^2 - b^2) \sin^2 i_2}{\sin 2 i_2 \cos 2 i_2} \cos^2 q \sin(p - i_2) \sin(p + i_2),$$

ou

$$(50) \quad \cos(i_1 + i_2) = k \cos^2 q (\sin^2 p - \sin^2 i_2),$$

dans laquelle

$$(51) \quad k = \frac{(a^2 - b^2)(1 + b^2)}{2b(1 - b^2)},$$

en posant $\tan i_2 = \cotang i_1 = b$, ce qui est encore suffisamment exact.

Nous obtenons ainsi $(i_1 + i_2)$, ou la somme de l'angle de polarisation et de l'angle de réfraction ordinaire. Le premier angle lui-même peut être déduit de la formule (50) à l'aide de la relation

$\sin i_2 = b \sin i_1$. Pour cela, si nous posons ϖ , au lieu de i , pour distinguer l'angle de polarisation des autres angles d'incidence, et si nous prenons

$$(52) \quad K = \frac{k}{1+b^2} = \frac{a^2 - b^2}{2b(1-b^2)},$$

nous trouverons

$$\varpi_1 = \varpi - K \cos^2 q (\sin^2 p - \sin^2 i_2),$$

équation dans laquelle ϖ est l'angle dont la cotangente est b ; en d'autres termes, ϖ est l'angle de polarisation d'un milieu uniréfringent dont l'indice de réfraction serait égal à l'indice ordinaire du cristal.

Ce résultat rend compte d'un fait remarquable observé en 1819 par sir David Brewster, qui cherchait par l'expérience les lois de la réflexion cristalline. Il a trouvé que l'angle de polarisation reste le même quand on retourne le cristal de 180° , quoiqu'un des angles de réfraction change, et que la situation des rayons réfractés par rapport aux axes du cristal soit tout à fait différente. Cette circonstance, qui me surprit la première fois que j'en eus connaissance, est une conséquence immédiate de la formule (53); car l'effet d'une demi-révolution du cristal est de changer les signes de p et de q ; or la nature de la formule est telle que ces changements de signe n'altèrent pas la valeur de ϖ_1 . Cette valeur n'est pas non plus altérée lorsqu'on retourne le cristal jusqu'à ce que l'azimut, ou l'angle sphérique AVi , soit changé dans son supplément; car alors le signe de p est seul affecté.

Une autre remarque faite par le même observateur est encore une conséquence de la formule (53): il résulte de ses expériences que, pour une surface donnée du cristal, l'angle de polarisation surpasse un certain angle constant d'une quantité proportionnelle au carré du sinus de l'azimut AVi . Appelons cet azimut α , et désignons par λ l'angle aigu qui mesure l'inclinaison de l'axe du cristal sur sa surface, en sorte que λ soit le complément de l'arc AY ; nous aurons

$$(54) \quad \sin q = \cos \lambda \sin \alpha, \quad \text{tang } p = \cot \lambda \cos \alpha;$$

substituant ces valeurs dans la formule (53), après avoir changé $\sin i_2$

en $\cos \varpi$, elle devient

$$(55) \quad \varpi_1 = \varpi - K (\sin^2 \varpi - \sin^2 \lambda) + K \sin^2 \varpi \cos^2 \lambda \sin^2 \alpha,$$

et s'accorde avec la remarque de Brewster.

La déviation θ_3 ou θ'_3 se trouve par la seconde des formules (38), en posant $\frac{\text{tang } q}{\text{tang}(p - i_2)}$ à la place de $\text{tang } \theta$, et en substituant à $\cos(i_1 + i_2)$ la valeur (49) ou (50) qui correspond à l'angle de polarisation. On a ainsi

$$(56) \quad \theta_3 = \theta'_3 = -\frac{k}{2} \sin 2q \sin(p + i_2);$$

car l'arc θ_3 peut être pris pour sa tangente. Ce résultat se transforme aisément dans celui-ci

$$(57) \quad \theta_3 = \theta'_3 = -k \sin q \cos \varphi,$$

où φ désigne l'arc Ai , c'est-à-dire l'angle que le rayon incident fait avec l'axe du cristal; enfin cette dernière expression est équivalente à la suivante

$$(58) \quad \theta_3 = \theta'_3 = -k \cos \lambda \sin \alpha (\sin \lambda \cos \varpi + \cos \lambda \sin \varpi \cos \alpha),$$

qui donne la déviation en λ et α .

Comme exemple d'application, nous ferons quelques calculs relatifs au spath d'Islande. Suivant M. Rudberg, l'indice ordinaire de ce cristal, pour un rayon situé dans la partie la plus brillante du spectre, à la limite de l'orangé et du jaune, est 1,66; et le plus petit indice extraordinaire pour le même rayon est 1,487; de là

$$\varpi = 58^\circ 56', \quad K = 0,1164 = 6^\circ 40', \quad k = 0,1587 = 9^\circ 5'.$$

Ayant ainsi déterminé les constantes, nous pouvons aisément calculer l'angle de polarisation et la déviation pour tout couple de valeurs données de λ et α .

D'abord voyons comment l'angle de polarisation varie suivant différentes faces du cristal.

1°. Quand $\lambda = 90^\circ$, la face du cristal est perpendiculaire à l'axe, et

ϖ_1 est indépendant de α . Dans ce cas la formule (55) donne

$$\varpi_1 = \varpi + k \cos^2 \varpi = 60^\circ 42'$$

pour la valeur maxima de l'angle de polarisation.

2°. Quand $\lambda = 0$, la face du cristal est parallèle à l'axe, et la formule (55) devenant

$$\varpi_1 = \varpi - k \sin^2 \varpi \cos^2 \alpha,$$

montre que $\varpi_1 = \varpi$ quand $\alpha = 90^\circ$ ou 270° . Mais quand α est 0° ou 180° , on obtient

$$\varpi_1 = \varpi - k \sin^2 \varpi = 54^\circ 2'$$

pour la valeur minima de l'angle de polarisation.

3°. Pour une face de clivage naturel du cristal la valeur de λ est de $45^\circ 23'$. De là, quand $\alpha = 0$, ou 180° ,

$$\varpi_1 = \varpi - k (\sin^2 \varpi - \sin^2 \lambda) = 57^\circ 2';$$

et quand $\alpha = 90^\circ$, ou 270° ,

$$\varpi_1 = \varpi + k \cos^2 \varpi \sin^2 \lambda = 59^\circ 50'.$$

Ces valeurs des angles de polarisation s'accordent très-bien avec les expériences de sir David Brewster, et mieux encore avec celle de M. Seebeck.

Si nous désirons connaître dans quel azimut ϖ_1 est égal à ϖ sur une surface donnée du cristal, il est évident d'après l'équation (55) que nous devons faire

$$\sin^2 \varpi - \sin^2 \lambda = \sin^2 \varpi \cos^2 \lambda \sin^2 \alpha,$$

ou plus simplement

$$(59) \quad \cos \alpha = \pm \frac{\text{tang } \lambda}{\text{tang } \varpi}.$$

Cette formule montre que la chose est impossible si λ est plus grand que ϖ ; et que, si λ est moindre que ϖ , quatre azimuts satisfont à la question. En effet, il y a généralement quatre valeurs de α qui correspondent à toute autre valeur particulière de l'angle de polarisation; α' étant le plus petit de ces azimuts, les autres seront

$$180^\circ - \alpha', \quad 180^\circ + \alpha', \quad 360^\circ - \alpha'.$$

Sur une face naturelle du cristal, la valeur de α' , répondant à la supposition $\varpi_1 = \varpi$, est $52^{\circ}22'$.

Indiquons ensuite les changements que la déviation éprouve dans quelques cas remarquables.

1°. Quand la face du cristal est perpendiculaire à l'axe, il n'y a évidemment pas de déviation;

2°. Quand la face du cristal est parallèle à l'axe, la déviation s'évanouit pour les azimuts 0° , 90° , 180° , 270° . Pour les azimuts qui surpassent de 45° chacun des précédents, la déviation est un maximum: car si nous posons $\lambda = 0$ dans la formule (58), le résultat sera

$$\theta_3 = -\frac{k}{2} \sin \varpi \sin 2\alpha;$$

et cette quantité, en négligeant son signe, est un maximum quand $\sin 2\alpha = \pm 1$. Le coefficient de $\sin 2\alpha$ est égal à $3^{\circ}54'$, et donne conséquemment la plus grande valeur de la déviation. Suivant les expériences de M. Seebeck, cette valeur maxima est $3^{\circ}57'$.

3°. Sur une surface de clivage naturel, la déviation s'évanouit pour les azimuts 0° et 180° , et aussi pour les azimuts tels que

$$\cos \alpha = \pm \frac{\text{tang } \lambda}{\text{tang } \varpi}, \quad \text{et } \varpi_1 = \varpi.$$

Pour l'azimut de 45° , la déviation est $-3^{\circ}35'$; pour l'azimut 90° , elle est $-2^{\circ}32'$; pour l'azimut $127^{\circ}38'$ elle s'évanouit; après quoi elle atteint un petit maximum avec un signe positif, et s'évanouit encore pour l'azimut 180° . Les valeurs calculées de la déviation s'accordent très-bien avec les observations de M. Seebeck.

Le signe de la déviation indique de quel côté du plan d'incidence se trouve le plan de polarisation. Mais la position de ce dernier plan est mieux indiquée par la transversale du rayon réfléchi. Si cette transversale et l'axe du cristal, menés par l'origine, du même côté du plan des xz , coupent la sphère aux points t et A , ces points se trouveront sur le même côté du grand cercle XY quand la déviation et le sinus de l'azimut n'auront pas le même signe algébrique; et ils seront sur des côtés opposés de ce cercle quand ces quantités auront le même signe. C'est pourquoi, si l'on suppose que le cristal tourne à partir de l'azimut zéro,

les points t et A resteront sur le même côté de XY jusqu'à ce que A atteigne la position A' où l'angle $A'Yi = 127^{\circ} 38'$; le point t passera alors du côté opposé, où il restera jusqu'à ce que A atteigne l'azimut $232^{\circ} 22'$; de là, jusqu'à la fin de la révolution, les deux points se trouveront du même côté de XY .

Nous avons vu que la déviation s'évanouit toujours quand l'axe du cristal est sur le plan d'incidence; on pouvait le prévoir, puisque ce plan partage alors le cristal en deux parties symétriques. Dans cette circonstance le problème de la réflexion est plus facile, car les directions uniradiales sont évidemment parallèles et perpendiculaires au plan d'incidence. Développons donc ce cas particulier.

1^o. En premier lieu, quand il n'y a que le seul rayon réfracté ordinaire, les trois transversales sont dans le plan d'incidence, et la transversale de chaque rayon est proportionnelle au sinus de l'angle compris entre les deux autres. De là les proportions :

$$(60) \quad \frac{\tau_1}{\sin(i_1 + i_2)} = \frac{\tau_2}{\sin 2i_1} = \frac{\tau_3}{\sin(i_1 - i_2)},$$

qui sont les mêmes que pour les milieux uniréfringents.

2^o. En second lieu, quand il n'y a que le seul rayon réfracté extraordinaire, les trois transversales sont perpendiculaires au plan d'incidence; et si l'on emploie des accents pour désigner les quantités relatives à ce rayon, on a les équations

$$(61) \quad \tau'_1 + \tau'_3 = \tau'_2, \quad m_1 \tau_1'^2 = m_2' \tau_2'^2 + m_3 \tau_3'^2,$$

qui donnent les proportions

$$(62) \quad \frac{\tau'_1}{m_1 + m_2'} = \frac{\tau'_2}{2m_1} = \frac{\tau'_3}{m_1 - m_2'},$$

d'où

$$(63) \quad \frac{m_2'}{m_1} = \frac{\sin 2i_2' \pm 2 \sin^2 i_2' \operatorname{tang} \varepsilon'}{\sin 2i_1},$$

d'après (26); le signe supérieur, ou inférieur, étant pris dans le numérateur de (63), quand le rayon réfracté, ou la normale de son onde plane, fait le plus petit angle avec une perpendiculaire à la face du cristal.

Pour trouver l'angle de polarisation, il suffit de faire $m_1 = m'_2$, car alors τ'_3 s'évanouira d'après (62); et si la lumière incidente est commune, tout le pinceau réfléchi sera polarisé dans le plan d'incidence. Supposant toujours le cristal négatif, concevons que le rayon réfracté soit placé dans l'angle aigu fait par l'axe du cristal avec une perpendiculaire à sa surface. Il faudra prendre alors le signe + dans le numérateur de (63), et l'angle de polarisation sera donné par cette condition

$$(64) \quad \sin 2 i_1 = \sin 2 i'_2 + 2 \sin^2 i'_2 \operatorname{tang} \varepsilon'.$$

Mais, d'après (36), on a en général

$$(65) \quad \sin^2 i'_2 \operatorname{tang} \varepsilon' = (a^2 - b^2) \sin \omega' \cos \omega' \sin^2 i_1,$$

et dans le cas actuel il est évident que $\omega' = 90^\circ - \lambda - i'_2$, où λ désigne comme ci-dessus l'angle que l'axe du cristal fait avec sa surface. Substituant ces valeurs dans (64), et multipliant tous les termes par $\operatorname{tang} i'_2$, on obtient

$$\sin^2 i'_2 = \cos i_1 \sin i_1 \operatorname{tang} i'_2 - (a^2 - b^2) \sin(\lambda + i'_2) \cos(\lambda + i'_2) \operatorname{tang} i'_2 \sin^2 i_1.$$

On a encore, d'après (37),

$$(66) \quad \sin^2 i'_2 = b^2 \sin^2 i_1 + (a^2 - b^2) \cos^2(\lambda + i'_2) \sin^2 i_1;$$

égalant ces deux expressions de $\sin^2 i'_2$, on trouvera

$$(67) \quad \operatorname{tang} i'_2 = \frac{a^2 \cos^2 \lambda + b^2 \sin^2 \lambda}{\cot i_1 + (a^2 - b^2) \sin \lambda \cos \lambda}.$$

Enfin si l'on substitue cette valeur de $\operatorname{tang} i'_2$ dans (66), après avoir divisé tous les termes par $\cos^2 i'_2$, on obtient la formule simple et rigoureuse

$$(68) \quad \sin^2 i_1 = \frac{1 - a^2 \cos^2 \lambda - b^2 \sin^2 \lambda}{1 - a^2 b^2} = \sin^2 \varpi_1,$$

pour déterminer l'angle de polarisation ϖ , quand l'axe du cristal est dans le plan d'incidence. Il est évident, d'après la nature de cette formule, que cet angle est le même pour les azimuts 0° et 180° , c'est-à-

dire quand la lumière tombe à droite ou à gauche de la perpendiculaire à la surface du cristal.

Cette formule se trouve plus vite, en rappelant que les masses correspondantes m_1 et m_2 sont proportionnelles aux ordonnées y , des points où le rayon incident et le rayon réfracté extraordinaire rencontrent leurs surfaces des ondes; d'où il suit que ces ordonnées doivent être égales pour l'angle de polarisation; ce qui réduit la question à un problème de géométrie. Car, comme les deux rayons sont dans le plan d'incidence, l'axe des x sera coupé en un seul et même point par les droites touchant les surfaces des ondes, ou leurs sections, aux extrémités des ordonnées. Or les sections dans le plan des xy sont un cercle et une ellipse, ayant leur centre commun à l'origine; le rayon du cercle est l'unité, et les demi-axes de l'ellipse sont a et b , le dernier étant incliné de λ sur l'axe OX; le problème se réduit donc à mener, parallèlement à l'axe des x , une droite qui coupe le cercle et l'ellipse, de telle manière que les tangentes à ces courbes, aux deux points d'intersection situés sur le même côté de l'axe des y , puissent se couper sur l'axe des x . L'angle que la tangente au cercle fait avec l'axe des x est alors l'angle de polarisation ϖ_1 ; et la solution de ce problème conduit directement et aisément à la formule (68). Par cette manière d'envisager la question, on voit pourquoi l'angle de polarisation est le même dans les azimuts 0° et 180° ; car si des tangentes sont appliquées aux deux autres points d'intersection, déterminés par la parallèle dont on vient de parler, il est évident que ces deux nouvelles tangentes se couperont aussi sur l'axe des x , puisque les tangentes menées aux extrémités d'une corde appartenant à un cercle, ou à une ellipse, coupent le diamètre parallèle à cette corde à égale distance du centre.

Supposons que la surface du cristal soit en contact avec un milieu fluide, dont l'indice principal de réfraction soit représenté par N; et soient B et A les indices des réfractons, ordinaire et extraordinaire, opérées du vide dans le cristal. Alors, substituant $\frac{N}{A}$ à a , et $\frac{N}{B}$ à b , dans la formule précédente, et faisant pour abrégier

$$L^2 = A^2 \sin^2 \lambda + B^2 \cos^2 \lambda,$$

on en déduit aisément

$$(69) \quad \text{tang}^2 \varpi_1 = \frac{A^2 B^2 - L^2 N^2}{N^2 (L^2 - N^2)}.$$

Cette formule fait voir que si $L^2 = AB$, c'est-à-dire si $\text{tang} \lambda = \sqrt{\frac{B}{A}}$ (auquel cas λ ne sera jamais beaucoup plus grand, ni beaucoup plus petit que 45°), la valeur de ϖ_1 sera toujours possible; car on aura alors

$$(70) \quad \text{tang}^2 \varpi_1 = \frac{AB}{N^2}.$$

Mais si λ diffère de cette valeur, la valeur de ϖ_1 peut devenir impossible pour certaines valeurs de N . En effet, il est clair que si N tombe entre les limites L et $\frac{AB}{L}$, le numérateur et le dénominateur de la fraction (69) seront de signes contraires, et $\text{tang} \varpi_1$ sera la racine carrée d'une quantité négative. Dans ce cas, si la lumière incidente est commune, « elle se refusera à être polarisée », comme l'exprime Brewster; en d'autres termes, il sera impossible de trouver un angle d'incidence pour lequel le faisceau réfléchi cesserait de contenir de la lumière polarisée perpendiculairement au plan d'incidence, ou pour lequel la transversale τ_3 s'évanouirait. Pour toutes les valeurs de N , autres que celles qui sont comprises entre les limites rapprochées L et $\frac{AB}{L}$, l'angle de polarisation est possible; il change rapidement, jusqu'à ce que N ait dépassé l'une ou l'autre de ces limites d'une quantité considérable comparée à l'intervalle qui les sépare.

La formule (68) donne $\varpi_1 = \lambda$, quand $a = 1$, ou $N = A$; et aussi $\varpi_1 = 90^\circ - \lambda$, quand $b = 1$, ou $N = B$. Dans le dernier cas, il faut remarquer qu'il n'y a pas de lumière réfléchie, lorsque de la lumière commune tombe sur le cristal sous l'incidence $90^\circ - \lambda$. Car alors on a $\tau' = 0$, et parce que $\tau_1 = \tau_2$, on a pareillement $\tau_3 = 0$; aucune lumière ne peut donc entrer dans le faisceau réfléchi. Mais ce cas mérite d'être étudié plus complètement, sans le restreindre par la supposition que l'axe du cristal soit situé dans le plan d'incidence.

Supposons donc que $N = B$, ou que l'indice de réfraction du fluide qui couvre la surface réfléchissante soit égal à l'indice ordinaire du

cristal. On peut observer que, dans ce cas, tout angle d'incidence, pour quelque azimut que ce soit, peut être regardé comme un angle de polarisation. En effet, la lumière commune ne peut subir de réflexion à la surface de séparation du cristal et du fluide sans devenir complètement polarisée. Car si la lumière incidente est polarisée, et si τ_3 et τ'_3 sont les deux transversales uniradiales réfléchies appartenant respectivement aux rayons ordinaire et extraordinaire, la première transversale doit nécessairement s'évanouir, par la même raison qu'aucune réflexion ne peut avoir lieu à la surface de séparation de deux milieux uniréfringents dont les indices de réfraction sont égaux; ainsi la transversale réfléchie actuelle coïncidera toujours avec la direction τ'_3 , quelle que soit la direction de la transversale incidente. Conséquemment, si la lumière incidente est commune, tout le faisceau réfléchi sera polarisé dans le plan passant par τ'_3 , et faisant avec le plan d'incidence un angle θ'_3 déterminé par la seconde des formules (39). En posant $i_2 = i_1$ dans cette formule, et employant l'expression (44), on obtient d'abord

$$\begin{aligned} \operatorname{tang} \theta'_3 &= \frac{\cos(i_1 + i'_2) \cos \theta' \operatorname{tang} \omega' + \sin(i_1 + i'_2)}{\sin \theta' \operatorname{tang} \omega'} \\ &= \frac{\cos(i_1 + i'_2) \operatorname{tang}(p - i'_2) + \sin(i_1 + i'_2)}{\sin \theta' \operatorname{tang} \omega'}, \end{aligned}$$

d'où

$$\operatorname{tang} \theta'_3 = \frac{\sin(p + i_1)}{\sin \theta' \operatorname{tang} \omega' \cos(p - i'_2)} = \frac{\sin(p + i_1) \cos \omega'}{\sin q \cos(p - i'_2)},$$

et enfin

$$(71) \quad \operatorname{tang} \theta'_3 = \sin(p + i_1) \operatorname{cotang} q;$$

résultat qui montre que le plan de polarisation du rayon réfléchi est perpendiculaire au plan mené par ce rayon même, et par l'axe du cristal.

De plus, on déduit de la première des formules (39), en procédant de la même manière,

$$(72) \quad \operatorname{tang} \theta'_1 = -\sin(p - i_1) \operatorname{cotang} q \leftarrow -\operatorname{cotang} \theta;$$

et d'après (38) il est évident que $\theta_1 = \theta$. Tout ce qui concerne le cas

que nous considérons peut donc se résumer de la manière suivante.

Lorsque $N = B$, et que la lumière incidente est polarisée dans un plan passant par l'axe, la marche de la lumière n'est pas altérée, il n'y a aucune réflexion ni réfraction. Quand la lumière incidente est polarisée dans un plan perpendiculaire, toute la lumière qui pénètre dans le cristal suit le rayon extraordinaire. Quelle que soit la lumière réfléchie, elle est totalement polarisée dans un plan qui coupe à angle droit celui qui passe par le rayon réfléchi et par l'axe du cristal; et cela a toujours lieu, que la lumière incidente soit, ou non, polarisée.

Nous limiterons ici les conséquences de la théorie générale proposée dans ce Mémoire. Plusieurs autres questions restent à discuter, telles que la réflexion de la lumière commune à la première surface [*], et la réflexion intérieure [**] à la seconde surface du cristal; nous réserverons

[*] La manière de traiter le cas dans lequel la lumière incidente est commune est exposée page 229.

[**] Depuis la lecture de ce Mémoire, nous avons trouvé que le problème de la réflexion à la seconde surface peut être réduit à celui de la réflexion à la première surface, à l'aide d'une règle très-simple. Supposons que les deux faces du cristal soient parallèles; et soit un rayon R_1 , polarisé uniralement, et incident sur la première surface, donnant le rayon R_3 par réflexion, et le seul rayon R_2 par réfraction. Soit ainsi R_2 le rayon qui subit la réflexion intérieure à la seconde surface, donnant deux rayons réfléchis R_{11} , R'_{11} , et le seul rayon $R_{(1)}$ émergent du cristal dans une direction parallèle à R_1 . Désignons par τ_1 , τ_3 , τ_2 , τ_{11} , τ'_{11} , $\tau_{(1)}$, les transversales de tous ces rayons, en suivant l'ordre dans lequel ils ont été nommés. Comme la transversale τ_2 est supposée donnée en grandeur, les longueurs et les directions de τ_1 et τ_3 pourront être obtenues par la construction générale (page 227).

Maintenant, la direction de τ_2 étant changée, et sa grandeur conservée, supposons que la lumière du rayon R_3 , rebroussant chemin, devienne, au contraire, incidente sur le cristal, et subisse une réflexion et une double réfraction à la première surface. Alors les deux rayons réfractés, qui en résulteront, seront parallèles à R_{11} et à R'_{11} , et leurs transversales seront égales et parallèles à τ_{11} et τ'_{11} ; le rayon réfléchi coïncidera avec R_1 , et la transversale réfléchie composera avec τ_1 une résultante égale et parallèle à la transversale émergente $\tau_{(1)}$.

Ainsi les constructions qui ont été données pour la première surface peuvent être utilisées pour la seconde, et toute question relative à la réflexion cristalline peut être résolue par le moyen des plans polaires.

La règle précédente n'a pas été, à proprement parler, déduite de la théorie. Je me

vons ces cas pour en faire l'objet d'un nouveau Mémoire. Il nous serait aisé cependant d'écrire ici les solutions algébriques de ces problèmes particuliers, telles qu'elles résultent de notre théorie; mais ces solutions ne nous satisfont pas, comme étant encore trop compliquées, et je parviendrai sans doute à les réduire sous une forme plus simple. C'est le caractère de toutes les vraies théories, que plus elles sont étudiées, et plus simples elles paraissent; et l'on peut ajouter

formai d'abord une idée claire de ce que devait être cette règle, je la vérifiai pour le cas de la réfraction simple, et enfin je la démontrai pour le cas des cristaux biréfringents. La vérité de la règle pour ces cristaux dépend de la réalité des trois équations suivantes :

$$(viii) \quad \begin{cases} \sin(i'' + i'_n) [\cos(i'' - i'_n) + \cot \theta'' \cot \theta'_n] + h'' + h'_n = 0, \\ \sin(i_2 - i''_n) [\cos(i_2 + i''_n) - \cot \theta_2 \cot \theta''_n] + h_2 - h''_n = 0, \\ \sin(i_2 - i'_n) [\cos(i_2 + i'_n) - \cot \theta_2 \cot \theta'_n] + h_2 - h'_n = 0, \end{cases}$$

dont la notation se comprendra facilement. La première est la même que l'équation (vii) déjà signalée; les deux autres n'en diffèrent qu'en apparence, la différence des signes étant occasionnée par un changement dans la position relative des rayons.

Dans le cas de la réflexion totale, je suppose, en imitant Fresnel, que l'expression algébrique générale de chaque transversale réfléchie devient alors imaginaire, et, la mettant sous la forme

$$T (\cos \varphi + \sqrt{-1} \sin \varphi),$$

j'obtiens T pour la transversale réfléchie, et φ pour le changement de phase.

D'après la nature des règles que nous avons données, pour traiter la question de la réflexion sur les deux faces du cristal, il résulte que l'équation finale qui sert à déterminer la position d'une transversale est toujours du premier degré, quoique l'équation des forces vives soit du second degré. Ce résultat confirme pleinement notre théorie; mais il montre en même temps que la loi des forces vives ne doit pas être regardée comme un principe final, mais plutôt comme une conséquence de quelque loi élémentaire non encore découverte.

On voit maintenant que les conjectures avancées dans la note de la page 222 étaient hasardées, et qu'il y avait quelque erreur dans les calculs qui m'y ont conduit. Il est nécessaire de dire que la feuille, dans laquelle cette note se trouve, était imprimée avant que j'eusse obtenu le résultat annoncé dans la note postérieure de la page 240. Divers retards sont survenus tandis que mon Mémoire s'imprimait, et j'en ai profité pour lui donner plus de valeur, en y joignant des notes, sur quelques questions que j'avais dédaignées ou oubliées lors de mes premières recherches sur le sujet.

qu'un examen approfondi de ces théories trouve sa récompense dans les conséquences inattendues [*] qui se présentent d'elles-mêmes. Les lois de la double réfraction ont été énoncées par Fresnel de la manière la plus simple, et cependant les propriétés de la surface des ondes continuent toujours à fournir aux géomètres des relations nouvelles et curieuses. Nous pouvons donc espérer qu'un peu plus de temps, consacré aux lois de la réflexion, ne sera pas dépensé inutilement. Ces lois promettent de fournir beaucoup d'autres théorèmes qui ne seront pas indignes de fixer l'attention, quoiqu'ils ne soient peut-être pas aussi simples, ni aussi faciles à comprendre que ceux déjà connus.

Si l'on nous demandait d'appuyer, par quelques raisons, les hypothèses sur lesquelles se fonde la théorie qui précède, nous serions

[*] Comme preuve de cette vérité, on peut dire que la conclusion à laquelle conduit la note de la page 240, était totalement inattendue. En vérifiant l'équation (vii), j'ai découvert un théorème utile, car il m'a servi à trouver une expression traitable pour la tangente de l'angle ϵ , que la normale à l'onde fait avec le rayon. Cette expression manque pour appliquer les formules (34) et (35) aux cristaux à deux axes, et c'est un motif plus que suffisant pour l'introduire ici.

Ayant décrit une sphère concentrique à la surface de l'onde, prolongeons la normale à l'onde plane OP, et les deux axes optiques, qui sont les diamètres nodaux de la surface des indices, depuis le centre O jusqu'à la rencontre de la sphère aux points P₁, A, A₁, formant ainsi les sommets du triangle sphérique P₁AA₁. La même normale d'onde peut appartenir à deux rayons différents; et si nous choisissons un de ces rayons, sa transversale doit être située dans un plan mené par la normale à l'onde plane et coupant en deux parties égales l'angle sphérique AP₁A₁, ou son supplémentaire. En prolongeant l'un ou l'autre des axes optiques, on peut toujours faire en sorte que ce plan (appelé par Fresnel le plan de polarisation) opère la bissection de l'angle intérieur. Supposons que cette condition soit satisfaite pour le rayon choisi; représentons par ω et ω_1 les côtés P₁A et P₁A₁ du triangle sphérique, et par ψ l'angle compris AP₁A₁. Soit S la longueur de la normale d'onde, comprise entre le centre et le point où elle coupe le plan tangent à l'extrémité du rayon; enfin soient a et c le plus grand et le plus petit des demi-axes de l'ellipsoïde qui engendre la surface des ondes. Nous aurons alors

$$(ix) \quad \text{tang } \epsilon = \frac{a^2 - c^2}{2S^2} \sin(\omega - \omega_1) \sin \frac{1}{2} \psi.$$

loin de pouvoir donner une réponse satisfaisante. Nous sommes obligés d'avouer que, à l'exception de la loi des forces vives, ces hypothèses ne sont que des conjectures heureuses. Ces conjectures sont très-probablement justes, puisqu'elles ont conduit à des lois élégantes, qui sont complètement vérifiées par l'expérience; mais c'est là tout ce que nous pouvons dire sur elles. Il est certain que la lumière est produite par des ondulations, qui se propagent par vibrations transversales, à travers un éther très-élastique; mais la constitution de cet éther, et les lois de son action sur les particules des corps, s'il en existe une, sont tout à fait inconnues. Le mécanisme particulier de la lumière est un secret que nous ne sommes pas encore capables de pénétrer. Cet état d'imperfection de la science paraît évident quand on observe que plusieurs phénomènes des plus simples et des plus familiers n'ont jamais été étudiés. Pour ne pas parler de la dispersion, sur laquelle on a tant écrit inutilement, nous pouvons remarquer que la vraie cause de la réfraction ordinaire, ou du retard que la lumière éprouve en pénétrant dans un milieu transparent, n'est pas

Et si ε_1 est l'angle que fait avec l'autre rayon la même normale d'onde, et S_1 la longueur de cette normale, on aura pareillement

$$(x) \quad \text{tang } \varepsilon_1 = \frac{a^2 - c^2}{2S_1^2} \sin(\omega + \omega_1) \cos \frac{1}{2} \psi.$$

Si l'on se donne la direction d'un rayon, il y a deux normales qui lui correspondent; et alors les angles ε et ε_1 que cette direction fait avec les deux normales sont donnés par les formules

$$(xi) \quad \begin{cases} \text{tang } \varepsilon = \frac{r^2}{2} \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right) \sin(\omega - \omega_1) \sin \frac{1}{2} \psi, \\ \text{tang } \varepsilon_1 = \frac{r_1^2}{2} \left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2} \right) \sin(\omega + \omega_1) \cos \frac{1}{2} \psi; \end{cases}$$

où r et r_1 représentent les deux rayons de la surface des ondes qui se trouvent sur la direction donnée; mais le triangle sphérique P_1AA_1 , dont les côtés et l'angle compris sont encore exprimés par les mêmes lettres que ci-dessus, se forme maintenant en prolongeant la direction donnée, et les deux diamètres nodaux de la surface des ondes, jusqu'à ce qu'ils coupent la sphère aux points P_1, A, A_1 .

du tout connue. Encore moins peut-on dire que la double réfraction a été rigoureusement expliquée ; seulement ses lois ont été clairement développées par Fresnel. Bref, la totalité de nos connaissances, eu égard à la propagation de la lumière, se réduit aux lois du phénomène ; à peine quelques pas ont-ils été faits dans la théorie mécanique de ces lois. Et si le cas de la propagation non interrompue de la lumière à travers un milieu continu présente de telles difficultés, il serait inutile de songer à se rendre compte des lois qui subsistent aux confins de deux milieux, où la continuité n'existe plus.

Mais peut-être pourra-t-on faire quelques pas dans une autre direction, en regardant ces lois vérifiées comme rigoureusement exactes, et essayant de s'élever par elles à des principes plus généraux. Sous ce point de vue notre seconde hypothèse est extrêmement remarquable ; car elle semble contraire, en quelque sorte, à l'idée que les molécules d'éther sont fortement attirées ou repoussées par les particules des corps pondérables. Quoi qu'il en soit, il paraîtrait qu'une vraie théorie doit s'accorder avec cette hypothèse, et que des idées mécaniques, qui feraient varier la densité moyenne de l'éther d'un milieu à un autre, ne peuvent être admises pour représenter les faits naturels. On ne saurait objecter contre l'hypothèse en question, qu'elle augmente la difficulté de rendre compte de la réfraction ; car, comme l'évidence est positivement en faveur de cette hypothèse, il faut plutôt conclure que l'opinion commune qui attribue la réfraction à un changement de densité de l'éther, est tout à fait erronée.

On peut remarquer ensuite que notre quatrième hypothèse, concernant la direction des vibrations de la lumière polarisée, sera utile pour éprouver toute théorie qui sera proposée par la suite ; car il semble maintenant certain que les vibrations sont parallèles, et non perpendiculaires au plan de polarisation comme Fresnel le supposait, cette direction des vibrations devant être regardée comme prouvée par les vérifications de notre théorie.

La troisième hypothèse, ou le principe de la conservation des forces vives, est la plus naturelle qu'on puisse imaginer, d'autant plus qu'elle exprime seulement que la lumière incidente est égale à la somme des lumières réfléchies et réfractées. Il est encore probable que ce principe même, comme la loi des forces vives dans les machines, n'est

que le résultat d'autres lois plus simples, et que cette relation deviendra manifeste aussitôt que le vrai mécanisme de la lumière sera découvert.

La quatrième hypothèse est très-importante, car sur elle repose toute la théorie; c'est pour cela qu'au commencement de ce Mémoire, nous avons détaillé les recherches qui l'ont suggérée. Si nous voulions donner une raison à l'appui de cette hypothèse, nous pourrions dire que le mouvement d'une particule d'éther, à la surface commune de deux milieux, doit être le même, quel que soit celui des deux milieux auquel on admette que la particule appartienne; et comme les vibrations incidente et réfléchie sont supposées dans un des milieux, et les vibrations réfractées dans l'autre, on peut en conclure que la résultante des premières vibrations doit être la même, en grandeur et en direction, que la résultante des dernières. Au premier abord ce raisonnement paraît suffisamment exact; mais il ne supporte pas un examen approfondi. Car l'argument étant général, il prouverait que le principe de l'équivalence des vibrations est aussi vrai pour les métaux [*], que pour les milieux cristallisés, ce qui n'est certainement

[*] Peu de jours après la lecture de ce Mémoire, j'ai été conduit à démontrer, en quelque sorte, que dans les métaux les vibrations parallèles à la surface sont équivalentes, mais qu'il n'en est pas de même de celles qui lui sont perpendiculaires; et que pour les métaux, comme pour les substances cristallisées, la force vive est conservée. Cette démonstration est fondée sur un système de formules que j'ai trouvées, pour exprimer les lois de la réflexion et de la réfraction métalliques, et qui semblent représenter d'une manière très-satisfaisante les expériences de Brewster (*Phil. Trans.* 1830). Comme les réflexions métallique et cristalline sont de même famille, et seront ramenées un jour à une même théorie, quelque distinctes qu'elles paraissent maintenant, il ne sera pas hors de place d'insérer ici les formules relatives aux métaux. Je ne propose pas ces formules comme absolument vraies, mais seulement comme vraisemblables; on verra qu'elles expliquent, au moins d'une manière générale, toutes les circonstances, regardées jusqu'ici comme des anomalies, que présente l'action des métaux sur la lumière.

Je suppose que, pour chaque métal, il existe deux constantes M et ψ , desquelles la première est un nombre plus grand que l'unité, et la seconde un angle compris entre 0° et 90° . J'appelle le nombre M le *module*, et l'angle ψ la *caractéristique* du métal. M et ψ varient tous deux avec la couleur de la lumière, et le rapport $\frac{M}{\cos \psi}$ est probablement

pas. Il n'est pas aisé de voir pourquoi le principe embrasserait l'un des cas et non l'autre; l'obstacle provient sans doute de la cause inconnue qui produit un changement de phase dans la réflexion métallique.

Il sera convenable de terminer ce Mémoire par un résumé succinct des recherches faites par sir David Brewster, et par M. Seebeck, les seuls physiciens qui se soient occupés de la réflexion cristalline.

Dès 1819, sir D. Brewster publia, dans les *Transactions philoso-*

l'indice de réfraction. Il paraît résulter des expériences de Brewster que M diminue du rouge au violet; et c'est pourquoi nous supposons que $\cos \psi$ diminue dans une plus grande proportion, pour que l'indice de réfraction puisse croître comme dans les substances transparentes.

Soient i_1 l'angle d'incidence, i_2 celui de réfraction, d'où

$$(xii) \quad \frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \frac{M}{\cos \psi};$$

et soit μ une variable déterminée par la condition

$$(xiii) \quad \mu = \frac{\cos i_1}{\cos i_2};$$

ces deux relations combinées donneront

$$(xiv) \quad \frac{1}{\mu^2} = 1 + \left(1 - \frac{\cos^2 \psi}{M^2}\right) \tan^2 i_1;$$

formule qui montre que μ est égal à l'unité pour l'incidence perpendiculaire, et s'évanouit pour une incidence de 90° , en décroissant toujours dans l'intervalle.

Maintenant, si une onde plane de lumière polarisée tombe sur le métal, on doit distinguer deux cas principaux, suivant que la lumière est polarisée dans le plan d'incidence, ou dans le plan perpendiculaire. Dans le premier cas, désignant les transversales réfléchi et réfracté par τ_3 et τ_2 , représentons par Δ_3 le changement de phase du rayon réfléchi, et par Δ_2 celui du rayon réfracté; les mêmes symboles, marqués avec des accents, ayant les mêmes significations pour le second cas. Alors, si la transversale incidente est prise pour unité, on aura les formules suivantes : 1° Si la transversale incidente est dans le plan d'incidence,

$$(xv) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau_3 = \frac{M^2 + \mu^2 - 2M\mu \cos \psi}{M^2 + \mu^2 + 2M\mu \cos \psi}, \quad \tau_2 = \frac{4M^2\mu^2}{M^2 + \mu^2 + 2M\mu \cos \psi}, \\ \text{tang } \Delta_3 = \frac{2M\mu \sin \psi}{M^2 - \mu^2}, \quad \text{tang } \Delta_2 = \frac{\mu \sin \psi}{M + \mu \cos \psi}; \end{array} \right.$$

phiques (*Phil. Trans.*, 1819, p. 145), un Mémoire concernant « l'action des surfaces cristallisées sur la lumière ». Dans ce Mémoire, l'auteur décrit des expériences nombreuses et variées sur la polarisation par réflexion à la surface du spath d'Islande. Il donne les mesures des angles de polarisation pour différents azimuts, quand la réflexion a lieu dans l'air; mais il n'indique pas les déviations qui les accompagnent, probablement parce qu'elles étaient trop petites pour attirer son attention. Dans d'autres occasions, cependant, il a obtenu de très-grandes déviations. Il conçut l'idée de poursuivre ses expériences dans un cas

2° Si la transversale incidente est perpendiculaire au plan d'incidence,

$$(xvi) \left\{ \begin{array}{l} \tau_3' = \frac{1 + M^2 \mu^2 - 2M\mu \cos \psi}{1 + M^2 \mu^2 + 2M\mu \cos \psi}, \quad \tau_2' = \frac{4M^2 \mu^2}{1 + M^2 \mu^2 + 2M\mu \cos \psi}, \\ \text{tang } \Delta_3' = \frac{2M\mu \sin \psi}{M^2 \mu^2 - 1}, \quad \text{tang } \Delta_2' = \frac{\sin \psi}{M\mu + \cos \psi}. \end{array} \right.$$

Quand $\psi=0$, il n'y a pas de changement de phase, et les formules deviennent identiques avec celles données dans la note de la page 229. Quand $\psi=90^\circ$, il y a réflexion totale pour toutes les incidences. Le cas de l'argent pur approche de celui-ci. Pour un bon miroir métallique ψ est environ 70° . La valeur de M est comprise entre $2\frac{1}{2}$ et 5 pour différents métaux.

Quand la transversale incidente est inclinée sur le plan d'incidence, ses composantes, parallèle et perpendiculaire à ce plan, donnent deux transversales réfléchies, avec une différence de phase égale à $\Delta_3' - \Delta_3$. La vibration réfléchie sera alors elliptique; la position et la grandeur relative des axes de l'ellipse décrite pourra se déduire des formules précédentes. Les conséquences de ces formules sont simples et élégantes, mais je ne puis les développer ici. Il suffit d'observer que chaque angle d'incidence a un autre angle qui lui correspond, et que j'appelle son conjugué; la valeur de $(\Delta_3' - \Delta_3)$ pour un de ces angles est le supplément de sa valeur pour l'autre, tandis que le rapport $\frac{\tau_2'}{\tau_3'}$ est le même pour les deux. Il suit de là, entre autres conséquences, que les vibrations elliptiques, réfléchies aux angles conjugués, sont semblables l'une à l'autre, et ont leurs axes homologues également inclinés au plan d'incidence, mais sur des côtés opposés. Quand $(\Delta_3' - \Delta_3) = 90^\circ$, ou $M\mu = 1$, la valeur de τ_3' est un minimum et égale à $\text{tang } \frac{1}{2} \psi$.

Les formules précédentes ne diffèrent que de très-peu de celles que j'ai données dans les *Irish. Acad. Trans.* La quantité ψ' , qu'on rencontre dans ces dernières, a été négligée à dessein, sa présence s'opposant à la simplicité des expressions.

extrême, en masquant la réfraction ordinaire, et laissant la réfraction extraordinaire se développer en toute liberté. Il y parvint en versant sur la surface réfléchissante un peu d'huile de cassia, fluide dont l'indice de réfraction est presque égal à l'indice ordinaire du spath d'Islande. Quand de la lumière commune, tombant à 45° , était réfléchi à la surface de séparation de l'huile et du spath, le faisceau réfléchi se trouvait partiellement, et quelquefois totalement polarisé dans des plans diversement inclinés sur le plan d'incidence, l'inclinaison passant par toutes les grandeurs comprises entre 0° et 180° , lorsqu'on faisait tourner le cristal. La théorie indique aussi ce résultat général, lorsqu'on suppose que l'angle d'incidence est presque égal à l'un des angles de réfraction; mais pour comparer complètement les résultats théoriques avec ceux de l'expérience, il eût fallu faire de longs calculs que je n'ai pas eu le temps d'entreprendre. Néanmoins, pour faire voir clairement que, d'après la théorie, le champ des déviations est illimité, j'ai considéré le cas simple dans lequel $N = B$, ou dans lequel l'indice de réfraction du fluide est *exactement* égal à l'indice ordinaire du cristal. Ce cas est en outre remarquable par lui-même, et mériterait qu'on le vérifiât par des expériences directes. Il faudrait se procurer un fluide dont l'indice de réfraction, pour un certain rayon défini dans le spectre, fût égal à l'indice ordinaire du cristal pour le même rayon; il faudrait en outre que la lumière commune, quels que fussent d'ailleurs l'angle d'incidence et son azimut, fût réfléchi à la surface même de séparation du fluide et du cristal. Alors, si la théorie est exacte, cette lumière définie serait, comme nous l'avons vu, complètement polarisée par réflexion, et le plan de polarisation serait toujours perpendiculaire au plan mené par la direction du rayon réfléchi et par l'axe du cristal. Ce serait soumettre notre théorie à une épreuve élégante, que de l'appliquer ainsi à des cas extrêmes; et si cette épreuve réussissait, il n'y aurait plus de doute [*] à émettre sur l'exactitude rigoureuse des lois géométriques de la réflexion.

[*] Je doutais à cette époque que les phénomènes observés avec l'huile de cassia pussent se concilier avec la théorie, et quand j'écrivis la note de la page 222, j'étais convaincu de cette discordance. Mais, depuis, je pense en avoir trouvé la cause :

Les expériences faites avec l'huile de cassia doivent être très-difficiles, à raison de la grande faiblesse de la lumière réfléchie; néanmoins sir David Brewster les a reprises à différentes époques, et il a présenté une série nombreuse de leurs résultats, à la section de physique de l'Association britannique, lors de la dernière séance à Bristol.

Ce ne fut qu'à la fin de novembre 1836 que j'eus connaissance des recherches de M. Seebeck, qui ont beaucoup contribué aux progrès de la question. Ce physicien a fait des expériences très-soignées sur la lumière réfléchie dans l'air par le spath d'Islande. Il a découvert la déviation, malgré sa petitesse, et l'a mesurée avec soin. Il a ainsi fait

Quelques-unes des expériences de Brewster ont été faites sur les surfaces naturelles du spath, d'autres sur des surfaces polies artificiellement. A en juger par quelques essais, je crois que la première classe d'expériences sera parfaitement d'accord avec la théorie; mais je suis certain que la dernière classe ne pouvait l'être, ou que l'on ne devait pas l'espérer. Car le procédé du polissage artificiel doit nécessairement occasionner de petites inégalités, qui exposent de petits rhomboïdes élémentaires avec leurs faces inclinées sur la surface générale; et l'action de ces faces peut produire les effets anormaux que Brewster signale comme extraordinaires (Sixième Rapport de *Brit. Assoc., Transactions des sections*, page 16); je ne sais vraiment à quelle autre cause on pourrait attribuer ces effets. Il paraît évident, d'après une ancienne observation de Brewster (*Phil. Trans.*, 1819), que le poli imparfait produit un défaut de symétrie dans les phénomènes: car de la lumière commune se réfléchissant entre l'huile de cassia, et une surface perpendiculaire à l'axe, mais mal polie, Brewster trouva que le rayon réfléchi était polarisé, non dans le plan d'incidence, non dans le plan perpendiculaire, mais dans l'azimut de 75° . La même surface, quand la lumière se réfléchissait dans l'air, donnait un angle de polarisation plus grand de 2° que sa valeur connue.

Pour prouver que, sous d'autres rapports, le caractère général des phénomènes est d'accord avec la théorie, on peut observer que si $N = B$, $\lambda = 0^\circ$ ou 90° , et si la lumière commune tombe sur le cristal sous l'incidence de 45° , dans le plan de la section principale, la totalité de la lumière réfléchie sera polarisée perpendiculairement à ce plan. Si donc N est presque égal à B , toutes choses égales d'ailleurs, le faisceau réfléchi contiendra un peu de lumière non polarisée, ou ne sera pas totalement polarisé perpendiculairement au plan d'incidence; en sorte que, comme Brewster l'a trouvé par l'expérience, le cristal produira par réflexion le même effet qu'un milieu uniaxé. C'est ce qui n'arrivera pas, comme Brewster l'a pareillement trouvé, quand λ et l'angle d'incidence seront chacun de 45° , parce qu'alors la lumière tombe sous l'angle de polarisation.

le premier pas dans la théorie physique de la réflexion cristalline ; et la formule remarquable (68), qui donne l'angle de polarisation quand l'axe est parallèle au plan d'incidence, lui est due. Les hypothèses qu'il a employées diffèrent peu de celles de Fresnel ; elles l'ont mis à même de résoudre le problème de la réflexion dans ce cas particulier, mais non de l'aborder en général. Ses premiers Mémoires datent de 1831 (*Poggendorff Ann.*, t. XXI, p. 290 ; t. XXII, p. 126) ; mais il ne publia ses expériences sur la déviation que dans une occasion plus récente (*ibid.*, t. XXXVIII, p. 280), quand il fut conduit à les comparer avec la théorie que j'avais donnée dans ma lettre à sir David Brewster. J'ai déjà établi la correction [*], nécessitée par ses expériences, qui m'a conduit à la forme simple que ma théorie possède actuellement.

[*] Deux ou trois mois après que cette correction fut publiée dans le *Phil. Mag.*, un extrait en fut inséré dans les *Annales de Poggendorff* (v. XL, page 462). Avant ce temps, je crois que rien n'avait été publié en Allemagne sur la théorie générale de la réflexion cristalline ; au moins l'auteur de l'extrait (qui, je pense, est M. Seebeck) ne semble pas avoir entendu parler d'aucune autre théorie, d'aucuns principes analogues. Mais dans le numéro suivant (*Pogg. Ann.*, vol. XL, page 497), il parut une lettre de M. Neumann, dans laquelle l'auteur parle d'une théorie qui lui appartiendrait, fondée sur des principes exactement les mêmes que les miens ; il rappelle un Mémoire qu'il avait communiqué sur ce sujet à l'Académie de Berlin. Le Mémoire a été imprimé dans les Actes de cette Académie, pour 1835 ; par l'obligeance de l'auteur, j'ai reçu une copie de ce Mémoire assez à temps pour le reconnaître ici. En jetant les yeux sur ce travail, je reconnais plusieurs équations qui me sont familières ; entre autres les formules (vii), (viii), (ix), (x), que j'ai trouvées de mon côté en novembre dernier. Le Mémoire de M. Neumann est très-élaboré [**], et me fait abandonner, en grande partie, le dessein que j'avais formé de consacrer mes loisirs à traiter le sujet plus complètement ; maintenant je ne puis mieux faire que de le recommander à ceux qui désirent suivre les investigations dans tous leurs détails.

[**] Quoique le Mémoire de M. Neumann soit fort long, nous espérons en donner bientôt la traduction complète, dont M. Cabart, répétiteur à l'École Polytechnique, a bien voulu se charger.

J. LIOUVILLE.