JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BERTRAND

Note sur un théorème de mécanique

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 212-214.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__212_0>

NOTE

SUR UN

THÉORÈME DE MÉCANIQUE;

PAR J. BERTRAND,

Élève-Ingénieur des Mines.

On a remarqué, depuis longtemps, que le plus court chemin d'un point à un autre n'est pas celui qu'un mobile doit suivre pour faire le trajet dans le moins de temps possible sous l'influence de la pesanteur. Par conséquent, il ne peut exister aucune relation entre la longueur d'une courbe et le temps qu'un mobile pesant met à la parcourir. On trouve en effet, comme cela est évident par l'exemple de la cycloïde, que, pour les courbes qui tournent leur convexité dans le sens de la pesanteur, la descente peut être indifféremment plus ou moins rapide dans les courbes de plus grande longueur. Mais si l'on examine les courbes qui tournent leur convexité du côté opposé, on peut prouver que le temps du trajet, sous l'influence d'une même vitesse initiale, est d'autant plus grand que la courbe est plus longue; en d'autres termes, que, *deux courbes concaves dans le sens de la pesanteur, et terminées aux mêmes extrémités, étant parcourues par des points pesants animés de vitesses initiales égales, la courbe enveloppante donnera un trajet plus long que la courbe enveloppée.*

Pour démontrer ce théorème, prenons pour axe des x une horizontale telle que la distance du point de départ du mobile à cette droite soit la hauteur due à la vitesse initiale, en sorte que le point soit toujours animé d'une vitesse $\sqrt{2gy}$, lorsque son ordonnée sera égale à y.

Nous aurons

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2gy,$$

d'où

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{dx\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}};$$

si donc x_0 et x_1 sont les abscisses des deux points extrêmes, le temps du trajet sera représenté par l'intégrale

$$t = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{\sqrt{2g}} \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,dx.$$

Pour voir la manière dont il change lorsque l'on passe à une courbe voisine ayant les mêmes extrémités, il faut prendre la variation de cette intégrale en considérant les limites comme fixes ainsi que les valeurs de y qui y correspondent; on aura, en représentant par $\mathrm{F}dx$ la fonction sous le signe $\int$,

$$\delta t = \int_{x_0}^{x_1} \omega dx \left(\frac{d\mathrm{F}}{dy} - \frac{d}{dx}\frac{d\mathrm{F}}{dy'}\right),$$

ω représentant la variation de y; mais

$$\frac{d\mathrm{F}}{dy} = -\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{\frac{3}{2}}\sqrt{2g}},$$
$$\frac{d\mathrm{F}}{dy'} = \frac{y'}{\sqrt{2g}\sqrt{1+y'^2}\sqrt{y}},$$
$$\frac{d}{dx}\frac{d\mathrm{F}}{dy'} = \frac{y''}{\sqrt{2g}\sqrt{y}(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{y'^2}{2\sqrt{2g}y^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+y'^2}},$$

et en substituant,

$$\delta t = -\int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{2\sqrt{2g}}\,\omega dx\left[\frac{1+y'^2+2yy''}{y\sqrt{y}(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Or si nous passons d'une courbe à une autre qui l'enveloppe, il faut supposer ω négatif; le facteur entre parenthèses est évidemment négatif, puisque y'' est positive par hypothèse, et que, d'après la valeur initiale de la vitesse, le mobile devant toujours rester au-dessous de l'axe des x, son ordonnée est constamment positive. La valeur de $-\delta t$ se compose donc d'éléments tous négatifs; par conséquent le temps du trajet augmente lorsque l'on passe d'une courbe concave, dans le sens de la pesanteur, à une courbe infiniment voisine qui l'enveloppe. Le temps augmentant pour une variation infiniment petite des ordonnées, il augmentera à plus forte raison lorsque l'on passera à une courbe située à une distance finie de la première, pourvu que l'on puisse passer de l'une à l'autre d'une manière continue par des courbes concaves, c'est-à-dire pourvu que la seconde courbe soit concave comme la première. Si cette condition n'était pas remplie, le facteur de ωdx sous l'intégrale pourrait changer de signe, et l'on n'arriverait plus à une conclusion précise.

On pourrait vérifier, par un moyen semblable, qu'une courbe convexe est plus petite que celles qui l'enveloppent; il suffirait de chercher la variation de l'intégrale

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}\, dx\,;$$

cette variation est

$$-\int_{x_0}^{x_1} \frac{\omega y'' dx}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si donc y'' est, en tous les points, de signe contraire à ω, la courbe primitive sera plus petite que celle qui l'enveloppe : par conséquent si la courbe est concave vers l'axe des x et que, sans changer les extrémités, on augmente les ordonnées, elle augmentera; si, au contraire, elle est convexe, une augmentation des ordonnées diminuera sa longueur: il est évident que ces résultats correspondent aux théorèmes connus de géométrie.

On démontrerait, d'une manière analogue, que l'intégrale double qui représente l'aire d'une surface convexe a une variation négative lorsque l'on passe à une nouvelle surface de même contour et qui l'enveloppe de toute part.

Ces calculs sont d'une extrême simplicité et ne présentent par eux-mêmes aucun intérêt; j'ai cru cependant pouvoir les indiquer, à l'occasion du théorème de Mécanique qui fait l'objet de cette Note, comme exemples de l'application du calcul des variations à des questions autres que celles de *maximum* et de *minimum*.