JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. CATALAN

Sur les surface réglées dont l'aire est un minimum

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 203-211.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__203_0>

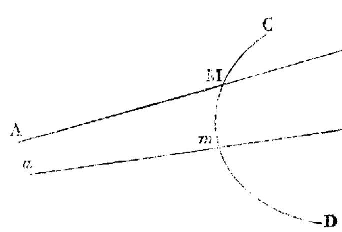
SUR

LES SURFACES RÉGLÉES DONT L'AIRE EST UN MINIMUM;

PAR E. CATALAN.

PROBLÈME. *Quelles sont, parmi les surfaces réglées, celles dont l'aire est un minimum, ou (ce qui revient au même) dont les deux rayons de courbure principaux sont, en chaque point, égaux entre eux et de signes contraires?*

1. Soit ab une position quelconque de la génératrice rectiligne. Me-



nons, par le point m, un plan perpendiculaire à ab: ce plan, normal à la surface, la coupera suivant une courbe CD.

La somme des courbures de deux sections normales perpendiculaires doit être nulle; par suite, le rayon de courbure de la section CD, au point m, doit être infini.

Nous chercherons donc la valeur du rayon de courbure pour un point quelconque M de CD, et nous exprimerons que ce rayon devient infini quand le point M coïncide avec m.

2. Soient X, Y, Z les coordonnées de M, et x, y, z celles de m. En

26..

désignant par R le rayon de courbure en M, on a généralement

$$R = \frac{(dX^2 + dY^2 + dZ^2)^{\frac{3}{2}}}{[(dX\,d^2Y - dY\,d^2X)^2 + (dY\,d^2Z - dZ\,d^2Y)^2 + (dZ\,d^2X - dX\,d^2Z)^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

Représentons par dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z ce que deviennent les quantités analogues quand on remplace, dans ces dernières, X, Y, Z par x, y, z. Il faudra, puisque R doit être infini au point m, que l'on ait

$$dx\,d^2y - dy\,d^2x = 0, \quad dy\,d^2z - dz\,d^2y = 0, \quad dz\,d^2x - dx\,d^2z = 0.$$

Dans ces trois équations, qui n'équivalent qu'à deux distinctes, les quantités affectées de la caractéristique d ne sont pas de véritables différentielles : ce sont des fonctions inconnues d'un certain paramètre. Par exemple, d^2x n'est en aucune manière la différentielle de dx.

3. Les équations d'une génératrice quelconque AB sont

$$X = AZ + P, \tag{1}$$

$$Y = BZ + Q; \tag{2}$$

A, B, P, Q étant des fonctions d'une variable indépendante T, qui prend une valeur t lorsque M coïncide avec m.

Les équations de ab sont donc

$$x = az + p, \tag{3}$$

$$y = bz + q; \tag{4}$$

en représentant, d'après les conventions précédentes, par a, b, p, q ce que deviennent A, B, P, Q lorsque $T = t$.

L'équation du plan perpendiculaire à ab, et passant par m, est

$$a(X - x) + b(Y - y) + Z - z = 0. \tag{5}$$

On doit, dans ces équations, regarder X, Y, Z comme des fonctions de T, et a, b, p, q, x, y, z et t comme des constantes.

En différentiant les équations (1), (2), (5), on obtient

$$dX = AdZ + dP, \qquad dY = BdZ + dQ,$$
$$d^2X = Ad^2Z + 2dA\,dZ + Zd^2A + d^2P,$$
$$d^2Y = Bd^2Z + 2dBdZ + Zd^2B + d^2Q,$$
$$adX + bdY + dZ = 0, \quad ad^2X + bd^2Y + d^2Z = 0.$$

4. Actuellement, donnons à T la valeur particulière t; nous aurons. pour déterminer les *inconnues* dx, dy, dz, d^2x, d^2y, d^2z :

$$(6) \qquad dx = adz + dp,$$
$$(7) \qquad dy = bdz + dq,$$
$$(8) \qquad d^2x = ad^2z + 2da\,dz + zd^2a + d^2p,$$
$$(9) \qquad d^2y = bd^2z + 2db\,dz + zd^2b + d^2q,$$
$$(10) \qquad adx + bdy + dz = 0,$$
$$(11) \qquad ad^2x + bd^2y + d^2z = 0.$$

Les équations (6), (7) et (10) donnent d'abord

$$dz = -\frac{(ada + bdb)z + adp + bdq}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Afin de simplifier, posons

$$(ada + bdb)z + (adp + bdq) = U,$$
$$a^2 + b^2 + 1 = c;$$

nous aurons

$$(12) \qquad dz = -\frac{U}{c}.$$

L'équation (6) donne ensuite

$$(13) \qquad dx = \frac{c(zda + dp) - aU}{c^2}.$$

De la même manière, les équations (8), (9) et (11) fournissent celle-ci :

$$(a^2 + b^2 + 1)d^2z + 2(ada + bdb)dz + (ad^2a + bd^2b)z + ad^2p + bd^2q = 0.$$

Posons

$$(ad^2a + bd^2b)\,z + ad^2p + bd^2q = \mathrm{V},$$

et observons que $2(ada + bdb)$ peut être représenté par dc; l'équation précédente deviendra

$$cd^2z + dc\,dz + \mathrm{V} = 0;$$

d'où

$$(14) \qquad d^2z = \frac{\mathrm{U}dc - c\mathrm{V}}{c^2}.$$

L'équation (8) donne ensuite

$$(15) \qquad d^2x = \frac{a(\mathrm{U}dc - c\mathrm{V}) - 2c\mathrm{U}da + c^2(zd^2a + d^2p)}{c^2}.$$

5. A l'aide des valeurs (12), (13), (14) et (15), nous pouvons former la fonction $dzd^2x - dxd^2z$, laquelle doit être égalée à zéro. Nous trouvons ainsi

$$-\frac{a(\mathrm{U}dc - c\mathrm{V})\mathrm{U} - 2c\mathrm{U}^2da + c^2(zd^2a + d^2p)\mathrm{U}}{c^3}$$
$$-\frac{c(zda + dp)(\mathrm{U}dc - c\mathrm{V}) - a(\mathrm{U}dc - c\mathrm{V})\mathrm{U}}{c^3} = 0,$$

ou

$$(16) \qquad 2\mathrm{U}^2da - c(zd^2a + d^2p)\mathrm{U} - (zda + dp)(\mathrm{U}dc - c\mathrm{V}) = 0.$$

6. L'équation que l'on aurait obtenue en égalant à zéro la quantité $dzd^2y - dy\,d^2z$, ne doit différer de la précédente que par le changement de a en b et de p en q; donc, à cause de la symétrie des valeurs de U, V et c :

$$(17) \qquad 2\mathrm{U}^2db - c(zd^2b + d^2q)\mathrm{U} - (zdb + dq)(\mathrm{U}dc - c\mathrm{V}) = 0.$$

7. Si nous multiplions ces deux équations, la première par a, la seconde par b, et si nous ajoutons, il viendra

$$2\mathrm{U}^2(ada + bdb) - c[z(ad^2a + bd^2b) + ad^2p + bd^2q]\mathrm{U}$$
$$- [(ada + bdb)z + adp + bdq](\mathrm{U}dc - c\mathrm{V}) = 0,$$

ou

$$U^2 dc - cVU - U(Udc - cV) = 0.$$

Celle-ci n'est qu'une identité; par conséquent, les équations (16) et (17) n'équivalent qu'à une seule équation. Nous pouvons donc les remplacer par une de leurs combinaisons.

Nous choisirons la suivante, qui a l'avantage d'éliminer V.

Multiplions respectivement par $zdb + dq$, par $zda + dp$, et retranchons; il vient

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{c} 2U^2 [da\,dq - db\,dp] \\ -c \left[\begin{array}{c} (zd^2a + d^2p)(zdb + dq) \\ -(zd^2b + d^2q)(zda + dp) \end{array} \right] U = 0. \end{array} \right.$$

Si l'on suppose nul le facteur U, cette équation est satisfaite. En même temps, les équations (16) et (17) se réduisent à

$$(zda + dp)\,V = 0,$$
$$(zdb + dq)\,V = 0.$$

Il est facile de voir, d'après celles-ci, que l'hypothèse de $U = 0$ entraîne, soit

$$ada + bdb = 0, \quad adp + bdq = 0, \quad ad^2a + bd^2b = 0, \quad ad^2p + bd^2q = 0,$$

soit

$$da = 0, \quad db = 0, \quad dp = 0, \quad dq = 0.$$

Dans l'un ou l'autre cas, la surface représentée par $x = az + p$, $y = bz + q$, est un plan.

Laissons donc de côté cette solution évidente, et prenons l'équation (18) débarrassée du facteur U, savoir,

$$(19) \quad 2U[dadq - dbdp] - c \left[\begin{array}{l} z^2(d^2adb - d^2bda) + z(d^2adq - d^2bdp \\ + d^2bdp - d^2qda) + (d^2pdq - d^2qdp) \end{array} \right] = 0.$$

9. Jusqu'à présent nous avons supposé que a, b, p et q étaient des fonctions d'une variable indépendante t. Mais nous pouvons évidemment, dans les équations de la génératrice, prendre pour paramètre l'une de ces quantités, par exemple a, ce qui donnera $d^2a = 0$. En même temps, observons que la position du point m dépend seulement de a et de z, et que ces variables n'ont aucune dépendance entre elles. L'équation (19) devant avoir lieu pour tous les points de la surface, il faut que les coefficients des différentes puissances de z soient nuls. Par suite, après avoir remplacé U par la valeur, et avoir fait $d^2a = 0$, nous aurons les trois équations suivantes :

$$(20)\qquad d^2b = 0,$$

$$2(ada + bdb)(dadq - dbdp) - (a^2 + b^2 + 1)(d^2pdb - d^2pda) = 0,$$
$$2(adp + bdq)(dadq - dbdp) - (a^2 + b^2 + 1)(d^2pdq - d^2qdp) = 0.$$

Si l'on élimine successivement d^2q, d^2p entre ces deux dernières, on trouve

$$(21)\qquad (dadq - dbdp)[2b(dbdp - dadq) + (a^2 + b^2 + 1)d^2p] = 0,$$
$$(22)\qquad (dadq - dbdp)[2a(dadq - dbdp) + (a^2 + b^2 + 1)d^2q] = 0.$$

Le problème est ramené à l'intégration des équations (20), (21), (22).

10. L'équation (20) donne

$$b = ga + h,$$

g et h étant deux constantes arbitraires.

On satisfait aux équations (21) et (22) en posant

$$dadq - dbdp = 0.$$

Mais ici, comme dans le n° **8**, on reconnaît facilement que la surface cherchée se réduit à un plan. Supprimons donc le facteur $dadq - dbdp$, et réduisons les équations (21) et (22) à

$$2b(dbdp - dadq) + (a^2 + b^2 + 1)d^2p = 0,$$
$$2a(dbdp - dadq) - (a^2 + b^2 + 1)d^2q = 0.$$

11. Ces deux dernières sont du second ordre; mais on les ramène au premier en posant $\frac{dp}{da} = p'$, $\frac{dq}{db} = q'$. On a alors, en remplaçant $\frac{db}{da}$ par g,

$$2b(gp' - q') + (a^2 + b^2 + 1)\frac{dp'}{da} = 0,$$

$$2a(gp' - q') - (a^2 + b^2 + 1)\frac{dq'}{da} = 0.$$

12. Pour intégrer ces deux équations simultanées, prenons

$$(23)\qquad gp' - q' = \theta,$$

θ étant une variable auxiliaire. Nous aurons $\frac{dq'}{da} = g\frac{dp'}{da} - \frac{d\theta}{da}$; et ensuite

$$(24)\qquad \begin{aligned} &2b\theta + (a^2 + b^2 + 1)\frac{dp'}{da} = 0,\\ &2a\theta - (a^2 + b^2 + 1)\left(g\frac{dp'}{da} - \frac{d\theta}{da}\right) = 0. \end{aligned}$$

Ajoutons ces équations, après avoir multiplié la première par g; il viendra

$$2(bg + a)\theta + (a^2 + b^2 + 1)\frac{d\theta}{da} = 0.$$

Dans cette dernière les variables se séparent immédiatement, et l'on obtient, en observant que $bg\,da = db$ et en intégrant,

$$\theta = \frac{\mathrm{C}}{a^2 + b^2 + 1},$$

C étant une constante arbitraire.

L'équation (24) donne

$$dp' = -\mathrm{C}\frac{2b\,da}{(a^2 + b^2 + 1)^2},$$

ou

$$dp' = -\frac{2\mathrm{C}(ga + h)\,da}{[(1 + g^2)a^2 + 2gha + (1 + h^2)]^2}.$$

13. Posons, pour abréger,

$$m = 1 + g^2,\quad \alpha = -\frac{gh}{1 + g^2},\quad \beta^2 = \frac{1 + g^2 + h^2}{(1 + g^2)^2};$$

la formule à intégrer sera

$$dp' = -\frac{2\mathrm{C}}{m^2}\frac{(ga + h)\,da}{[(a - \alpha)^2 + \beta^2]^2}.$$

Sans effectuer l'intégration, on reconnaît que le résultat doit être de la forme

$$p' = \frac{\mathrm{M}a + \mathrm{N}}{(a-\alpha)^2 + \beta^2} + \mathrm{P} \operatorname{arc\,tang} \frac{a-\alpha}{\beta} + \mathrm{D},$$

M, N, P étant des coefficients inconnus, et D une constante arbitraire.

Multipliant par da, et intégrant une seconde fois, on aura

$$(25)\quad p = (\mathrm{P}a + \mathrm{K}) \operatorname{arc\,tang} \frac{a-\alpha}{\beta} + \mathrm{L} \log\left[(a-\alpha)^2 + \beta^2\right] + \mathrm{D}a + \mathrm{E}.$$

Pour déterminer les constantes P, K, L, je prends la seconde dérivée de cette équation ; savoir

$$\frac{d^2p}{da^2} = 2\,\frac{(\mathrm{P}\beta - \mathrm{L})\left[(a-\alpha)^2 + \beta^2\right] - (\mathrm{P}a + \mathrm{K})(a-\alpha)\beta + 2\beta^2\mathrm{L}}{\left[(a-\alpha)^2 + \beta^2\right]^2}.$$

Le second membre doit être identique avec la valeur de $\frac{dp'}{da}$, donnée par la formule ci-dessus. En égalant les coefficients des mêmes puissances de a, nous aurons

$$\mathrm{L} = 0, \quad \mathrm{K}\beta + \mathrm{P}\alpha\beta = \frac{\mathrm{C}g}{m^2}, \quad \mathrm{P}\beta(\alpha^2 + \beta^2) + \mathrm{K}\alpha\beta = -\frac{\mathrm{C}h}{m^2}.$$

Ces deux dernières équations donneront

$$\mathrm{P} = -\frac{\mathrm{C}}{m^2\beta^3}(g\alpha + h), \qquad \mathrm{K} = \frac{\mathrm{C}}{m^2\beta^3}\left[g(\alpha^2 + \beta^2) + h\alpha\right].$$

Ainsi l'équation (25) devient

$$p = \frac{\mathrm{C}}{m^2\beta^3}\left[g(\alpha^2 + \beta^2) + h\alpha - (g\alpha + h)\,a\right] \operatorname{arc\,tang} \frac{a-\alpha}{\beta} + \mathrm{D}a + \mathrm{E}.$$

L'équation (23) donne ensuite $q = gp - \int \theta\, da$, ou bien

$$q = gp - \frac{\mathrm{C}}{m\beta} \operatorname{arc\,tang} \frac{a-\alpha}{\beta} + \mathrm{F}.$$

14. Maintenant que nous avons déterminé b, p et q en fonction de a, reprenons les équations (3) et (4),

$$x = az + p, \quad y = bz + q;$$

ou

$$x = az + p, \quad y = (ga + h)z + q.$$

La dernière peut être remplacée par

$$y - gx = hz + q - gp.$$

Par suite, la génératrice, dans une quelconque de ses positions, sera représentée par

$$(26) \quad x - az = \frac{C}{m^2\beta^3}[g(\alpha^2+\beta^2) + h\alpha - (g\alpha + h)a] \operatorname{arc\,tang}\frac{a-\alpha}{\beta} + Da + E,$$

$$(27) \quad y - gx - hz = -\frac{C}{m\beta} \operatorname{arc\,tang}\frac{a-\alpha}{\beta} + F.$$

15. Il reste à reconnaître la nature de la surface réglée. Or, l'équation (27) représente un plan parallèle à celui dont l'équation est

$$y - gx - hz = 0.$$

Ainsi, *toutes les génératrices sont parallèles à un même plan directeur*. Prenons ce plan pour celui des xz : les constantes g et h devront être nulles, d'après l'équation précédente. En même temps, nous pouvons déplacer l'origine de manière à faire évanouir les constantes arbitraires D, E et F. Les équations (26) et (27) deviendront donc, à cause de

$$m = 1, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1 :$$
$$x - az = 0, \quad y = -C \operatorname{arc\,tang} a;$$

d'où

$$y = -C \operatorname{arc\,tang}\frac{x}{z}.$$

16. Cette dernière équation représente un héliçoïde à plan directeur. Ainsi : *L'héliçoïde gauche à plan directeur est la seule surface réglée qui ait, en chaque point, ses deux rayons principaux, égaux et de signes contraires.*