JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

COSTE

Question de probabilité applicable aux décisions rendues par les jurés

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 169-183.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__169_0>

QUESTION DE PROBABILITÉ

APPLICABLE AUX DÉCISIONS RENDUES PAR LES JURÉS;

Par M. COSTE,

Capitaine d'artillerie.

Si, pour prendre une décision, résoudre une question, juger un criminel, on pouvait convoquer, en une seule assemblée, tous les membres d'une nation, ou tous ceux en qui on reconnaîtrait le plus de lumière, le plus d'impartialité ou le plus de sagesse, la décision rendue par cette assemblée, même à la simple majorité, pourrait être et devrait être regardée comme la vérité.

Dans l'impossibilité de former une pareille assemblée, on est forcé de ne convoquer qu'un certain nombre de personnes, et même, pour les affaires criminelles, on se contente de réunir douze jurés.

Quand les jurés ont rendu un jugement à une certaine majorité, si l'on connaît cette majorité, on peut se demander : quelle est la probabilité que la décision rendue par ces jurés est conforme à celle qui serait rendue par tous les jurés portés sur la liste générale, si l'on pouvait réunir tous ces jurés dans une seule assemblée.

En supposant que les jurés soient tirés au sort sur la liste générale, cette question est la même que la suivante :

Une urne renferme un très-grand nombre de boules blanches ou noires. On tire de cette urne un certain nombre de boules. Dans les boules sorties, le nombre des boules blanches surpasse celui des noires, et même le rapport du nombre des boules blanches au nombre des boules noires est donné ou connu ; on demande avec quelle probabilité on peut supposer que, dans l'urne, le nombre des boules blanches surpasse le nombre des boules noires.

Pour résoudre cette question, on doit d'abord supposer que, le nombre total des boules contenues dans l'urne soit connu d'avance, et que l'on ignore seulement le rapport du nombre des boules blanches au nombre des boules noires.

Représentons par m le nombre total des boules contenues dans l'urne, tant blanches que noires, et par n le nombre des boules noires. Le nombre des boules blanches renfermées dans l'urne sera donc $m - n$.

Supposons d'abord que l'on n'ait tiré que deux boules, et que ces deux boules soient blanches.

D'après le nombre des boules blanches et des boules noires contenues dans l'urne, si l'on ne tire que deux boules de l'urne, le nombre des chances qui donneront deux boules blanches sera exprimé par $\frac{(m-n-1)(m-n)}{2}$; $(m-n)\,n$ exprimera le nombre des chances qui donnent une boule noire et une boule blanche; et $\frac{n(n-1)}{2}$ désignera le nombre des chances de la sortie de deux boules noires.

Par hypothèse, on n'a tiré de l'urne que deux boules, et ces deux boules étant blanches, on est sûr que l'urne contient au moins deux boules blanches. Les différentes hypothèses, que l'on peut faire sur le nombre des boules noires contenues dans l'urne, sont comprises entre $n = 0$ et $n = m - 2$.

L'hypothèse de $m - 2$ boules noires pour la sortie de deux boules blanches donne.......... 1 chance;
L'hypothèse de $m - 3$ boules noires................. 3 chances;
L'hypothèse de $m - 4$......................... 6 chances;
....
....
L'hypothèse de $m - m$........................ $\frac{m(m-1)}{1.2}$.

En admettant toutes les hypothèses possibles sur le nombre des boules noires contenues dans l'urne, le nombre total des chances qui donneront deux boules blanches sera exprimé par la quantité

$$1 + 3 + 6 + 10 \ldots\ldots + \frac{m(m-1)}{1.2},$$

quantité qui est égale à

$$\frac{m(m-1)(m+1)}{1.2.3}.$$

En général, s'il n'est sorti de l'urne que t boules, et si ces t boules sont blanches, pour le nombre des chances qui donneront t boules blanches,

Dans l'hypothèse de $m-t$ boules noires, on aura.......... 1 chance;

Dans l'hypothèse de $m-t-1$ boules noires $t+1$ chances;

Dans l'hypothèse de $m-t-2$........... $\frac{(t+2)(t+1)}{1.2}$;

....

....

Dans l'hypothèse de $m-m$ boules noires... $\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-t+1)}{1.2.3\ldots t}$.

Dans toutes les hypothèses que l'on peut faire sur le nombre de boules blanches ou de boules noires contenues dans l'urne, le nombre total des chances donnant t boules blanches sera donc

$$1+\frac{(t+1)}{1}+\frac{(t+2)(t+1)}{1.2}+\frac{(t+3)(t+2)(t+1)}{1.2.3}+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-t+1)}{1.2.3\ldots t},$$

ou

$$\frac{t(t-1)(t-2)\ldots1}{1.2.3\ldots t}+\frac{(t+1)t\ldots2}{1.2\ldots t}+\frac{(t+2)(t+1)\ldots3}{1.2\ldots t}+\ldots$$
$$+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-t+1)}{1.2.3\ldots t},$$

quantité que l'on sait être égale à

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-t+1)(m+1)}{1.2.3\ldots t.(t+1)}$$

En rapprochant ce dernier résultat du résultat qui donne le nombre total des chances de la sortie de t boules blanches dans l'hypothèse où toutes les boules contenues dans l'urne sont supposées blanches, on conclura que la quantité $\frac{t+1}{m+1}$ exprime la probabilité que toutes les boules de l'urne seront blanches, quand on n'aura tiré de l'urne que t boules, et que toutes ces boules seront blanches.

Ainsi, si une urne contient m boules blanches ou noires, après qu'il sera sorti de cette urne t boules, et que toutes ces t boules sorties seront blanches, si l'on parie que toutes les boules contenues dans l'urne sont blanches, on ne pourra parier que $t+1$ contre $m+1$.

Cette probabilité diminuera d'autant plus que le nombre des boules contenues dans l'urne sera plus considérable.

Le nombre des boules contenues dans l'urne étant $2m+1$, le nombre total des chances, pour la sortie de t boules blanches sans aucune noire, sera exprimé par

$$\frac{(2m+1)\,2m\,(2m-1)\ldots(2m+2-t)}{1.2.3\ldots\ldots t}\cdot\frac{(2m+2)}{(t+1)} = \mathrm{A}.$$

Dans les différentes hypothèses que l'on peut faire sur le nombre des boules blanches ou noires contenues dans l'urne, quand on suppose que, dans cette urne, le nombre des boules noires surpasse le nombre des boules blanches, on trouve, pour exprimer le nombre total des chances qui donne à la sortie t boules blanches sans mélange d'aucune noire, le nombre représenté par la quantité

$$\frac{m\,(m-1)(m-2)\ldots(m-t+1)}{1.2.3\ldots t}\cdot\frac{(m+1)}{(t+1)} = \mathrm{B}.$$

Ainsi quand d'une urne contenant $2m+1$ boules, tant blanches que noires, on aura tiré au hasard t boules seulement, et que toutes ces t boules seront blanches, pour exprimer la probabilité que le nombre total des boules blanches contenues dans l'urne surpasse le nombre des boules noires, on aura le rapport $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} - 1 : \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, rapport qui est équivalent à $\frac{\mathrm{A}-\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$.

Dans un pari, si celui qui parierait que le nombre des boules contenues dans l'urne serait plus considérable que le nombre des boules blanches, mettait la mise représentée par 1, pour rendre toutes les chances égales, celui qui parierait le contraire devrait mettre la mise représentée par la quantité

$$4\,\frac{(2m+1)(2m-1)}{(m-1)(m-2)}-1 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ quand } t=3;$$

la mise $$8\,\frac{(2m+1)(2m-1)}{(m-2)(m-3)}-1 \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ quand } t=4;$$

la mise $$8\,\frac{(2m+1)(2m-1)(2m-3)}{(m-2)(m-3)(m-4)}-1 \ldots\ldots \text{ quand } t=5;$$

la mise $$16\,\frac{(2m+1)(2m-1)(2m-3)}{(m-3)(m-4)(m-5)}-1 \ldots\ldots \text{ quand } t=6;$$

....

....

....

la mise $$2^{n'+1}\,\frac{(2m+1)(2m-1)\ldots(2m-2n'+1)}{(m-n')(m-n'-1)\ldots(m-2n')}-1 \text{ quand } t=2n'+1;$$

la mise $$2^{n'+1}\,\frac{(2m+1)(2m-1)\ldots(2m-2n'+1)}{(m-n')(m-n'-1)\ldots(m-2n'-1)}-1 \text{ quand } t=2n'.$$

Si le nombre des boules contenues dans l'urne est très-grand ou même infini, il faudra supposer dans les quantités précédentes m infini, et ces quantités se réduiront alors à

$$2^{t+1}-1.$$

Après la sortie de t boules blanches, sans aucun mélange de boules noires, la probabilité que le nombre des boules blanches contenues dans l'urne surpasse le nombre des boules noires, sera exprimée par la fraction

$$\frac{2^{t+1}-1}{2^{t+1}},$$

qui diffère très-peu de l'unité ou de la certitude, pour peu que t soit grand.

Ce résultat est le même que celui trouvé pour le même cas par M. Poisson, dans ses *Recherches sur la probabilité des jugements*.

A présent, reprenons le cas général que nous nous sommes proposé au commencement de ce Mémoire. Supposons que parmi les boules sorties de l'urne, il se trouve quelques boules noires, et que l'on veuille trouver la probabilité avec laquelle on peut conclure que le nombre des boules blanches contenues dans l'urne surpasse le nombre des boules noires.

Prenons d'abord un cas particulier de ce problème: supposons que l'on ait tiré de l'urne trois boules, et que, parmi les trois boules sorties, il se trouve deux boules blanches et une boule noire.

Le nombre total des boules contenues dans l'urne étant m, l'urne ne pourra contenir au plus que $m-1$ boules blanches et $m-2$ boules noires. Le nombre des hypothèses que l'on pourra former sur le nombre des boules noires contenues dans l'urne sera renfermé entre les nombres 1 et $m-2$.

Si l'urne ne contient qu'une seule boule noire, on aura, pour la sortie de deux boules blanches et d'une boule noire, le nombre des chances exprimées par la quantité $\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}$.

Si l'urne renferme deux boules noires, les $m-2$ boules blanches contenues dans l'urne pourront former $\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}$ combinaisons, et comme chacune de ces combinaisons peut se rencontrer avec l'une des deux boules noires, le nombre total des chances qui, dans cette hypothèse, donnent deux boules blanches et une boule noire, sera exprimé par $\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}\,2$.

Si l'urne contient trois boules noires, les $m-3$ boules restantes se combineront deux à deux de $\frac{(m-3)(m-4)}{1.2}$ façons différentes, et chacune de ces combinaisons pouvant se trouver indifféremment avec chacune des trois boules noires, on aura, pour le nombre des chances qui donneront deux boules blanches et une noire, $\frac{(m-3)(m-4)}{1.2}\,3$.

Dans les différentes hypothèses que l'on peut former sur le nombre relatif des boules blanches et des boules noires contenues dans l'urne, le nombre total des chances qui donneront deux boules blanches et une boule noire sera exprimé par la suite

$$\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}1+\frac{(m-2)(m-3)}{1.2}2+\frac{(m-3)(m-4)}{1.2}3$$
$$+\frac{(m-4)(m-5)}{1.2}4+\ldots+\frac{2.1}{1.2}.(m-2),$$

suite dont la somme est égale à

$$\frac{(m-1)(m-2)m(m+1)}{1.2.3.4}.$$

On trouvera de même que, dans les différentes hypothèses que l'on peut former sur le nombre des boules noires contenues dans l'urne, le nombre total des chances qui donnent t boules blanches et une noire sera

$$\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-t)}{1.2\ldots t}1+\frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-t-1)}{1.2\ldots t}2$$
$$+\frac{(m-3)(m-4)\ldots(m-t-2)}{1.2\ldots t}3+\ldots+1(m-t),$$

quantité égale à

$$\frac{(m-1)(m-2)(m-1)\ldots(m-t)}{1.2.3\ldots t}.\frac{m(m+1)}{(t+1)(t+2)}.$$

Prenons l'hypothèse dans laquelle l'urne est supposée contenir $m-n$ boules blanches et n boules noires; les $m-n$ boules blanches pourront se combiner t à t de

$$\frac{(m-n)(m-n-1)(m-n-2)\ldots(m-4-t+1)}{1.2.3\ldots t}$$

façons différentes.

Les n boules noires pourront se combiner s à s de

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+1)}{1.2.3\ldots s}$$

façons différentes.

Dans cette hypothèse on aura donc, pour le nombre de chances qui donneront t boules blanches et s boules noires, la quantité

$$\frac{(m-n)(m-n-1)\ldots(m-n-t+1)}{1.2\ldots t}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-s+1)}{1.2.3\ldots s}.$$

Cela posé, dans les différentes hypothèses que l'on peut former sur le nombre des boules blanches et des boules noires contenues dans l'urne, on trouve que le nombre total des chances qui donnent t boules blanches et s boules noires est exprimé par la suite

$$(\mathrm{A})\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{(m-s)(m-s-1)\ldots(m-s-t+1)}{1.2\ldots t}\,1\\&+\frac{(m-s-1)(m-s-2)\ldots(m-s-t)}{1.2\ldots t}(s+1)\\&+\frac{(m-s-2)(m-s-3)\ldots(m-s-t-1)}{1.2\ldots t}\cdot\frac{(s+2)(s+1)}{1.2}+\ldots\\&+1\,\frac{(m-t)(m-t+1)\ldots(m-t-s+1)}{1.2\ldots s},\end{aligned}\right.$$

suite qui a pour somme la quantité

$$(\mathrm{B}')\quad\frac{(m-s)(m-s-1)\ldots(m-s-t+1)}{1.2\ldots t}\cdot\frac{(m-s+1)(m-s+2)\ldots(m+1)}{(t+1)(t+2)\ldots(t+s+1)}.$$

Pour résoudre complétement le problème, qui consiste à trouver la probabilité que le nombre des boules blanches contenues dans l'urne surpasse le nombre des boules noires, après qu'il est sorti de cette urne t boules blanches et s boules noires, supposons que le nombre total des boules contenues dans l'urne, tant blanches que noires, soit impair, et que ce nombre, au lieu d'être représenté par m, soit exprimé par $2m+1$.

Le nombre total des chances dans les différentes hypothèses possibles, sera alors, d'après ce qui précède,

$$(\mathrm{B})\quad\frac{(2m-s-t+2)(2m-s-t+3)(2m-s-t+4)\ldots(2m+2)}{1.2.3\ldots(s+t+1)}.$$

Le nombre total des chances, dans les différentes hypothèses où le nombre des boules noires surpasse le nombre des boules blanches, sera aussi exprimé par la quantité ou la suite

$$(a)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{m(m-1)\ldots(m-t+1)}{1.2\ldots t}\cdot\frac{(m+1)m\ldots(m-s+2)}{1.2\ldots s} \\ & + \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-t)}{1.2\ldots t}\cdot\frac{(m+2)(m+1)\ldots(m-s+3)}{1.2\ldots s} \\ & + \frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-t-1)}{1.2\ldots t}\cdot\frac{(m+3)(m+2)\ldots(m-s+4)}{1.2\ldots s} + \ldots \\ & + 1\,\frac{(2m-t+1)(2m-t)(2m-t-1)\ldots(2m-t-s+2)}{1.2.3\ldots s}. \end{aligned} \right.$$

Pour résoudre complétement ce problème, il reste à trouver la somme de cette dernière suite.

Le cas général de cette suite, qui peut se présenter très-souvent dans les applications, est

$$(b)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{m(m-1)\ldots(m-t+1)}{1.2\ldots t}\cdot\frac{n(n+1)\ldots(n+s-1)}{1.2\ldots s} \\ & + \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-t)}{1.2\ldots t}\cdot\frac{(n+1)(n+2)\ldots(n+s)}{1.2\ldots s} \\ & + \frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-t-1)}{1.2\ldots t}\cdot\frac{(n+2)(n+3)\ldots(n+s+1)}{1.2\ldots s} + \ldots \\ & + 1\,\frac{(n+m)(n+m+1)\ldots(n+m-s+1)}{1.2\ldots s}. \end{aligned} \right.$$

Pour trouver la somme de cette suite, prenons un cas particulier et supposons $s=4$; la série précédente se transformera alors dans la suivante

$$(c)\quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{m(m-1)\ldots(m-t+1)}{1.2\ldots t}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4} \\ & + \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-t)}{1.2\ldots t}\cdot\frac{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4} \\ & + \frac{(m-2)(m-3)\ldots(m-t-1)}{1.2\ldots t}\cdot\frac{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{1.2.3.4} + \ldots \\ & + 1\,\frac{(n+m)(n+m+1)(n+m+2)(n+m+3)}{1.2.3.4}. \end{aligned} \right.$$

Ce que nous dirons de la suite (c) s'appliquera facilement aux suites (b) et (a).

Chaque terme de la suite (c) est composé du produit d'une factorielle fonction de m, et d'une factorielle fonction de n. En développant les numérateurs des factorielles fonction de n, on aura les différentes quantités

$$\begin{array}{l}
n^4 + 10n^3 + 35n^2 + 50n + 24,\\
n^4 + 14n^3 + 71n^2 + 154n + 120,\\
n^4 + 18n^3 + 119n^2 + 342n + 360,\\
n^4 + 22n^3 + 179n^2 + 638n + 840,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Si, de chacune de ces quantités, on retranche la même quantité $n^4 + 6n^3 + 11n^2 + 6n$, qui est le produit de $n(n+1)(n+2)(n+3)$, il restera les quantités

$$\begin{array}{l}
4n^3 + 24n^2 + 44n + 24,\\
8n^3 + 60n^2 + 148n + 120,\\
12n^3 + 108n^2 + 336n + 360,\\
16n^3 + 168n^2 + 632n + 840,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Si, de chacune de ces dernières quantités, on retranche respectivement, et suivant le rang qu'elles occupent, une des quantités suivantes

$$\begin{array}{l}
4\,(n^3 + 3n^2 + 2n),\\
8\,(n^3 + 3n^2 + 2n),\\
12\,(n^3 + 3n^2 + 2n),\\
16\,(n^3 + 3n^2 + 2n),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

dans lesquelles la quantité $n^3 + 3n^2 + 2n$ est le produit de $n(n+1)(n+2)$, et les nombres 4, 8, 12, 16 sont en progression arithmétique, on aura pour reste les quantités

$$\begin{array}{rcrcr} 12n^2 &+& 26n &+& 24, \\ 36n^2 &+& 132n &+& 120, \\ 72n^2 &+& 312n &+& 360, \\ 120n^2 &+& 600n &+& 840, \\ \ldots & & \ldots & & \ldots \\ \ldots & & \ldots & & \ldots \end{array}$$

Si, de chacun de ces derniers restes, on retranche la quantité n^2+n multipliée successivement par les nombres 12, 36, 72, 120, etc., nombres qui ne sont que la suite des nombres triangulaires multipliés par 12, on trouvera les restes

$$\begin{array}{rcr} 24n &+& 24, \\ 96n &+& 120, \\ 240n &+& 360, \\ 480n &+& 840, \\ \ldots & & \ldots \\ \ldots & & \ldots \end{array}$$

Les nombres 24, 96, 240, 480, etc., forment la suite des nombres pyramidaux triangulaires multipliés par 24; et les nombres 24, 120, 360, 480, etc., sont la suite des nombres figurés du 4^e ordre multipliés par 24.

De cette manière, la quantité (c) se trouvera transformée dans la quantité

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{m(m-1)\ldots(m-t+1)}{1.2\ldots t}+\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-t)}{1.2\ldots t}+\ldots+1\right]\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{1.2.3.4}\\
&+4\left[\begin{array}{l}\dfrac{m(m-1)\ldots(m-t+1)}{1.2\ldots t}\,1+\dfrac{(m-1)(m-2)\ldots(m-t)}{2.2\ldots t}\,2\\ +\dfrac{(m-2)\ldots(m-t-1)}{1\ldots t}\,3+\ldots+(m-t)\end{array}\right]\frac{n^3+3n^2+6n}{1.2.3.4}\\
&+4.3\left[\begin{array}{l}\dfrac{m(m-1)\ldots(m-t+1)}{1.2\ldots t}\,1+\dfrac{(m-1)(m-2)\ldots(m-t)}{1.2\ldots t}\,3\\ +\dfrac{(m-2)\ldots(m-t-1)}{1\ldots t}\,6+\ldots+\dfrac{(m-t)(m-t+1)}{1.2}\end{array}\right]\frac{n^2+n}{1.2.3.4}\\
&+4.3.2\left[\begin{array}{l}\dfrac{m(m-1)\ldots(m-t+1)}{1.2\ldots t}\,1+\dfrac{(m-1)(m-2)\ldots(m-t+2)}{1.2\ldots t}\,4+\ldots\\ +1\,\dfrac{(m-t)(m-t+1)(m-t+2)}{1.2.3}\end{array}\right]\frac{n}{1.2.3.4}\\
&+4.3.2.1\left[\frac{m(m-1)\ldots(m-t+1)}{1.2\ldots t}\,1+\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-t)}{1.2\ldots t}\,5\right]\frac{1}{1.2.3.4}.
\end{aligned}$$

En sommant les suites qui se trouvent entre parenthèses, la quantité précédente deviendra

$$\begin{aligned}
&\frac{m(m-1)\ldots(m-t+1)}{1.2\ldots t}\cdot\frac{m+1}{t+1}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}\\
&+4\,\frac{m(m-1)\ldots(m-t+1)}{1.2\ldots t}\cdot\frac{(m+1)(m+2)}{(t+1)(t+2)}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3.4}\\
&+4.3\,\frac{m(m-1)\ldots(m-t+1)}{1.2\ldots t}\cdot\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{(t+1)(t+2)(t+3)}\cdot\frac{n(n+1)}{1.2.3.4}+\ldots\\
&+4.3.2\,\frac{m(m-1)\ldots(m-t+1)}{1.2\ldots t}\cdot\frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)}{(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)}\cdot\frac{n}{1.2.3.4}\\
&+4.3.2.1\,\frac{m(m-1)\ldots(m-t+1)}{1.2\ldots t}\cdot\frac{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}{(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)(t+5)}\cdot\frac{1}{1.2.3.4}.
\end{aligned}$$

Cette expression peut encore se mettre sous la forme

$$(d)\quad \frac{m(m-1)\ldots(m-t+1)}{1.2\ldots t}\cdot\frac{(m+1)}{(t+1)}\left\{\begin{aligned}
&\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}\\
&+\frac{(m+2)}{(t+2)}\cdot\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\\
&+\frac{(m+2)(m+3)}{(t+2)(t+3)}\cdot\frac{n(n+1)}{1.2}\\
&+\frac{(m+2)(m+3)(m+4)}{(t+2)(t+3)(t+4)}\cdot\frac{n}{1}\\
&+\frac{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)}{(t+2)(t+3)(t+4)(t+5)}\,1
\end{aligned}\right\}.$$

Cette quantité, qui n'a plus que cinq termes différents entre parenthèses, est la somme de la suite (c), qui peut avoir un très-grand nombre de termes, quoique le nombre de ces termes soit limité.

La suite (b) aura pareillement pour somme la quantité

$$(e)\quad \frac{m(m-1)\ldots(m-t+1)}{1.2\ldots t}\cdot\frac{(m+t)}{(t+1)}\left\{\begin{aligned}
&\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+s-1)}{1.2.3\ldots s}\\
&+\frac{(m+2)}{(t+2)}\cdot\frac{n(n+1)\ldots(n+s-2)}{1.2\ldots(s-1)}\\
&+\frac{(m+2)(m+3)}{(t+2)(t+3)}\cdot\frac{n(n+1)\ldots(n+s-3)}{1.2.3\ldots(s-2)}+\ldots\\
&+\frac{(m+2)(m+3)\ldots(m+s+1)}{(t+2)(t+3)\ldots(t+s+1)}
\end{aligned}\right\}.$$

En désignant par $\left(\frac{u}{r}\right)^\nu$ la quantité

$$\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+\nu-1)}{(r+1)(r+2)(r+3)\ldots(r+\nu)},$$

la quantité précédente pourra se mettre sous la forme

$$(f) \qquad (m-t+1)^{t+1}\cdot\frac{(u)^{s+1}-\left(\frac{m+2}{t+2}\right)^{s+1}}{(u)^1-\left(\frac{m+2}{t+2}\right)^1},$$

forme symbolique qui met en évidence la loi de la quantité (e).

Si le nombre des boules contenues dans l'urne est infiniment grand ou du moins très-grand, m et n deviennent alors infinis ou très-grands, et la quantité (e) se réduit à

$$(g) \qquad \frac{m^{t+s+1}}{1.2\ldots(t+1)}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{1.2.3\ldots s}+\frac{1}{(t+2)}\cdot\frac{1}{1.2\ldots(s-1)} \\ +\frac{1}{(t+2)(t+3)}\,\frac{1}{1.2\ldots(s-2)} \\ +\frac{1}{(t+2)(t+3)(t+4)}\cdot\frac{1}{1.2\ldots(s-3)}+\ldots \\ +\frac{1}{(t+2)(t+3)\ldots(t+s+1)} \end{array}\right\}.$$

La quantité (B) exprime le nombre total des chances donnant la sortie de t boules blanches et de s boules noires, dans les différentes hypothèses que l'on peut faire sur le nombre des boules blanches et le nombre des boules noires contenues dans l'urne. Dans cette même hypothèse de m et n infinis, cette quantité (B) se réduit à

$$(h) \qquad \frac{(2m)^{t+s+1}}{1.2.3\ldots(t+s+1)}.$$

Le rapport de la quantité (h) à la quantité (g), après avoir fait toutes les réductions, est exprimé par la quantité

$$(i) \quad \frac{2^{t+s+1}}{1+\frac{t+s+1}{2}+\frac{(t+s)(t+s+1)}{1.2}+\ldots+\frac{(t+s+1)(t+s)(t+s-1)\ldots(t+3)(t+2)}{1.2.3\ldots s}}=p.$$

Ainsi, si, d'une urne contenant un nombre infini de boules blanches et noires, on ne tire au hasard qu'un nombre total de boules égal à $t+s$, et que sur ce nombre total il se trouve t boules blanches et s boules noires, on pourra supposer avec une probabilité égale à $\frac{p-1}{p}$, que le nombre des boules blanches dans l'urne surpasse le nombre de boules noires, ou, ce qui revient au même, on pourra parier contre un adversaire qui prétendrait qu'il y a dans l'urne moins de boules blanches que de boules noires, avec une mise égale à $p-1$, tandis que celle de cet adversaire serait représentée par l'unité.

Quand $t=s$, on trouve la probabilité un contre un, c'est-à-dire qu'il y a autant à parier pour que contre, que le nombre des boules blanches dans l'urne surpasse le nombre des boules noires.

Pour appliquer cette formule (i) aux décisions rendues par les jurés, il faut supposer que le nombre de boules sorties de l'urne est égal à 12. On trouvera

	Valeurs de p.	Valeurs de $p-1$.
A 7 blanches contre 5 noires.............	$\frac{8192}{2380}$	2,442016806
8 blanches contre 4 noires.............	$\frac{8192}{1093}$	6,4949679780 5
9 blanches contre 3 noires.	$\frac{8192}{378}$	20,6719576719
10 blanches contre 2 noires.............	$\frac{8192}{92}$	88,04747826
11 blanches contre 1 noire.............	$\frac{8192}{14}$	584,1428571
12 blanches.......................	$\frac{8192}{1}$	8191

Ainsi, à la majorité de 7 voix contre 5, il y a 2,442019806 à parier contre 1, que la décision rendue est conforme à celle que l'on obtiendrait si l'on pouvait réunir en une seule assemblée tous les jurés portés sur la liste générale.

Quand on ignore à quelle majorité une condamnation a eu lieu, mais que l'on sait seulement qu'il a suffi pour faire prononcer cette condamnation de 7 voix contre 5, pour avoir la probabilité de la vérité du jugement, il faut faire la somme de toutes les probabilités données par les majorités qui ont pu entraîner une condamnation, et en prendre la moyenne.

Dans le cas où une condamnation a pu avoir lieu avec une majorité de 7 voix contre 5, on aura

$$\frac{6.8192}{1+14+92+378+1093+2280} - 1 = 11,41839817,$$

c'est-à-dire qu'il y a 11,41839817 à parier contre 1, que la décision est conforme à celle que l'on obtiendrait en réunissant tous les jurés.

Si l'on ignore toujours à quelle majorité une décision a été rendue, mais s'il a suffi pour faire prononcer une condamnation d'une majorité de 8 voix contre 4, on aura la probabilité

$$25,27376428;$$

s'il a suffi d'une majorité de 9 voix contre 3, on aura la probabilité

$$66,5628866.$$

De même, pour un acquittement, il faut prendre la moyenne de toutes les probabilités données par toutes les décisions qui ont pu entraîner cet acquittement.

S'il faut 7 voix contre 5 pour faire prononcer une condamnation, la probabilité de la vérité d'un acquittement sera

$$\frac{7.8192}{1+14+92+398+1093+2380+4096} - 1 = 6,1199404229.$$

Avec 8 voix contre 4, la probabilité de la vérité d'un acquittement sera

$$5,2814409.$$

Enfin, avec 9 voix contre 3 pour une condamnation, la probabilité d'un acquittement sera

$$5,33210412.$$