JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ALFRED SERRET

Note sur les intégrales eulériennes de seconde espèce

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 7 (1842), p. 114-119.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1842_1_7__114_0>

NOTE
SUR LES INTÉGRALES EULÉRIENNES
DE SECONDE ESPÈCE;

PAR M. ALFRED SERRET,

Ancien Élève de l'École Polytechnique.

L'intégrale définie représentée par $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ est, comme on sait, égale à la racine carrée de la circonférence dont le diamètre est 1. On peut, par des considérations fort simples, parvenir à une représentation géométrique des fonctions $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$, $\Gamma\left(\frac{1}{8}\right) \ldots \Gamma\left(\frac{1}{2^n}\right), \ldots$, dans lesquelles le numérateur de l'argument est 1.

On a, par une formule connue,

$$(1) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x\, dx = \frac{1}{2} \mathrm{B}\left(\frac{m}{2}, \frac{n}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)},$$

et en faisant $n = m$, on en déduit

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} 2x\, d(2x) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^{m-1} x\, dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1} x\, dx = 2^{m-2}\frac{\Gamma^2\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma(m)}. \end{aligned} \right.$$

Cela posé, l'équation de la lemniscate, c'est-à-dire de la courbe telle que le produit des distances de l'un quelconque de ses points à deux points fixes est égal au carré de la demi-distance des deux points fixes, est en coordonnées polaires

$$r^2 = \frac{(2a)^2}{2}\cos 2t,$$

a étant la demi-distance des points fixes, ou ce que j'appellerai le paramètre de la courbe. Cette courbe est formée de deux boucles symétriques de part et d'autre de l'origine; on trouve pour longueur totale de son périmètre

$$2^{\frac{3}{2}} a \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{-\frac{1}{2}}\, dx,$$

ou, en vertu de l'équation (2),

$$a\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Si donc on appelle π_2 le périmètre de la lemniscate dont le paramètre est 1, on aura, en observant que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\pi_2}\,\sqrt[4]{\pi}.$$

Cette relation est digne de remarque, car π et π_2 sont pour le cas de $a = 1$ (c'est-à-dire en prenant pour unité le paramètre ou diamètre a) les périmètres de deux courbes dont les équations

$$r = \frac{2a}{2}\cos t, \quad r^2 = \frac{(2a)^2}{2}\cos 2t,$$

offrent une parfaite ressemblance.

Considérons l'équation générale

$$r^m = \frac{(2a)^m}{2}\cos mt;$$

ou plus simplement

$$r^m = 2^{m-1} \cos mt,$$

en prenant le paramètre a pour unité.

La courbe qu'elle représente est formée de m boucles fermées toutes égales entre elles; je désignerai par π_m le périmètre total de ces m boucles.

La moitié de l'une de ces boucles a pour longueur

$$2^{\frac{m-1}{m}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2m}} \cos^{\frac{1}{m}-1} mt\,dt = 2^{\frac{m-1}{m}} \cdot \frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{1}{m}-1} dx,$$

ou, en vertu de l'équation (2),

$$\frac{1}{2m} \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}.$$

Le périmètre total π_m étant égal à $2m$ fois cette expression, on en conclut que

$$(3) \qquad \Gamma\left(\frac{1}{2m}\right) = \sqrt{\pi_m}\sqrt{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}.$$

Si l'on remplace m successivement par les différentes puissances de 2 depuis la puissance 0, on aura la série de formules

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \sqrt{\pi_2}\,\sqrt[4]{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{8}\right) = \sqrt{\pi_4}\,\sqrt[4]{\pi_2}\,\sqrt[8]{\pi},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{16}\right) = \sqrt{\pi_8}\,\sqrt[4]{\pi_4}\,\sqrt[8]{\pi_2}\,\sqrt[16]{\pi},$$

. . . .

. . . .

On peut encore exprimer au moyen des périmètres π_m l'intégrale eulérienne $\Gamma\left(\frac{p}{2^n}\right)$, p étant un entier; mais la relation générale à laquelle on est conduit paraît trop compliquée pour mériter d'être transcrite ici. Bornons-nous à quelques cas particuliers.

La fonction $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$ s'obtient immédiatement au moyen de la relation connue

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

d'où l'on déduit

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \sqrt{2}\,.\,\pi_2^{-\frac{1}{2}}.\pi^{\frac{5}{4}}.$$

On obtiendrait de la même manière $\Gamma\left(\frac{3}{8}\right)$, $\Gamma\left(\frac{5}{8}\right)$, $\Gamma\left(\frac{7}{8}\right)$, au moyen des deux équations connues

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi},$$

$$2^{2a-1}\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) = \pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(2a),$$

et de l'équation (3).

Je ferai remarquer en passant que la dernière de ces deux relations, qui exprime une des propriétés fondamentales des intégrales d'Euler, peut être facilement déduite des équations (1) et (2). Il suffit en effet, pour l'obtenir, de faire $n=1$ dans l'équation (1), et d'égaler ensuite les deux valeurs de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{m-1} x\,dx$ fournies par l'équation (2) et l'équation (1).

On obtiendrait encore $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)$ et $\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)$ au moyen des deux relations que nous venons de rappeler et de l'équation (3); on pourrait même en général passer de là aux intégrales de la forme $\Gamma\left(\frac{1}{3.2^n}\right)$, mais les formules auxquelles on parviendrait ainsi présentent peu d'intérêt.

Si m est un nombre fractionnaire ou irrationnel, la formule

$$\pi_m = \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2m}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}$$

subsiste toujours; seulement π_m représente non plus le périmètre total de la courbe dont l'équation est

$$r^m = 2^{m-1} \cos mt,$$

mais bien le produit par $2m$ de l'arc de courbe dont les points correspondent aux valeurs de t comprises entre o et $\frac{\pi}{2m}$.

Outre le cercle et la lemniscate dont nous avons parlé, l'équation précédente renferme comme cas particulier correspondant à $m = \frac{1}{2}$, celle de l'épicycloïde extérieure de module 1. Cette courbe jouit, comme on sait, de la propriété d'être semblable à toutes ses développées. Cette considération m'a porté à rechercher si parmi les courbes représentées généralement par l'équation précédente, il ne s'en trouverait pas qui jouissent de cette même propriété, qui jusqu'ici n'a été reconnue qu'aux épicycloïdes (comprenant la cycloïde) et à la spirale logarithmique; mais je ne suis arrivé à aucun résultat satisfaisant.

Il est bon toutefois de signaler une propriété géométrique assez curieuse de ces courbes : c'est que la projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur est à ce rayon vecteur dans un rapport constant, ou, en d'autres termes, que la projection du centre de courbure sur le rayon vecteur engendre une courbe semblable à la première.

On trouve en effet cette expression du rayon de courbure,

$$R = \frac{2^{\frac{m-1}{m}}}{m+1} (\cos mt)^{\frac{1}{m}-1};$$

de plus pour déterminer l'inclinaison i de la normale sur le rayon vecteur, on obtient la formule

$$\tang i = - \tang mt;$$

et la valeur qui en résulte pour la projection du rayon de courbure sur le rayon vecteur est

$$\frac{2^{\frac{m-1}{m}}}{1+m}(\cos mt)^{\frac{1}{m}} \quad \text{ou} \quad \frac{r}{1+m}.$$

Quant à l'équation de la courbe décrite par la projection du centre de courbure sur le rayon vecteur, elle sera évidemment

$$r^m = \frac{\left(\frac{2m}{1+m}\right)^m}{2}\cos mt;$$

elle se déduira donc de l'équation générale

$$r^m = \frac{(2a)^m}{2}\cos mt,$$

en faisant

$$a = \frac{m}{1+m}.$$