JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ABEL TRANSON

Extrait d'une lettre adressée à M. Liouville

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 441-447.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__441_0>

EXTRAIT

D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. LIOUVILLE;

PAR M. ABEL TRANSON.

.... Je réunis ici quelques réflexions, 1° sur les courbes qui sont à elles-mêmes leurs propres caustiques et sur les surfaces qui sont à elles-mêmes une de leurs deux nappes focales, par analogie avec ce que M. Binet a donné dans le numéro de février dernier, sur la courbe qui est à elle-même sa propre développée et sur les surfaces qui sont à elles-mêmes une de leurs deux nappes de courbure; 2° sur une conséquence curieuse de la relation que M. Biot a établie entre deux distances zénithales réciproques.

I.

Je ferai remarquer premièrement que, non-seulement la *développée* d'une spirale logarithmique, mais aussi toute *développoïde* d'une telle spirale, est une autre spirale logarithmique de même angle et de même pôle que la proposée. De sorte que α étant l'angle que fait, dans la proposée, le rayon vecteur avec la normale, et par conséquent l'équation de la proposée étant

$$\rho = e^{\omega \tang \alpha},$$

l'équation de la développoïde relative à l'angle δ, sera

$$\rho' = \frac{\sin(\alpha + \delta)}{\cos \alpha} e^{\left(\omega' + \delta - \frac{\pi}{2}\right) \tang \alpha};$$

les angles ω' et ω étant comptés depuis la même origine. La circonstance $\delta = 0$ répond à la développée; mais si δ est supposé quelconque, l'équation ci-dessus peut être considérée comme celle de la caustique des rayons lumineux qui étant issus du pôle, auront été rompus à la rencontre de la spirale suivant une loi propre à procurer l'angle de réfraction δ quand celui d'incidence est α.

Il faut observer de plus que des rayons comme MP, M'P',..., issus sous un même angle δ des divers points d'une spirale logarithmique dont le pôle est O, rencontreront les spires de la courbe en des points P, P',... tels que les angles ξ, ξ',... avec les rayons vecteurs OP, OP',... (et, par suite, les angles avec les normales en ces points) seront constants; de sorte que, si ces rayons MP, M'P',... éprouvent, aux points de rencontre P, P',..., de nouvelles réflexions ou réfractions, ils auront pour enveloppes de nouvelles développoïdes de la proposée, c'est-à-dire toujours des spirales logarithmiques de même pôle et de même angle.

Pour s'assurer de cette constance des angles ξ, ξ',..., il suffit de remarquer que, dans le triangle OPM, on a la proportion

$$\mathrm{OP} : \mathrm{OM} :: \sin(\alpha + \delta) : \sin \xi,$$

c'est-à-dire en mettant pour les rayons vecteurs leurs valeurs respectives

$$e^{(\omega+\varepsilon+n\pi)\tang\alpha} : e^{\omega \tang \alpha},$$

ou encore

$$e^{(\varepsilon+n\pi)\tang\alpha} : 1 :: \sin(\alpha+\delta) : \sin\xi,$$

appelant ici ε l'angle en O du triangle OMP, et n le nombre de spires ou révolutions autour du pôle qu'il faut faire sur la courbe pour passer de M en P; nombre positif ou négatif selon que le point P est sur une spire extérieure ou intérieure à celle qui porte le point M. Enfin comme on a, entre les angles ε, α, δ et ξ, cette seconde relation

$$\alpha + \delta + \varepsilon + \xi = \pi,$$

il est manifeste que les angles ε et ξ sont constants quelque part que soit le point M, pourvu que l'angle δ et le nombre entier n demeurent les mêmes.

La propriété bien connue de la spirale logarithmique relativement à sa caustique ordinaire reçoit donc cette extension remarquable que, si des rayons issus du pôle ont subi sur la courbe un nombre quelconque de réflexions ou de réfractions, leur caustique sera toujours une spirale logarithmique de même angle et de même pôle que la proposée; résultat qui subsiste quand même les lois de réflexion et de réfraction seraient autres que les lois naturelles, et quand même ces lois changeraient à chaque rencontre nouvelle; enfin quel que soit le nombre des spires qui sépareraient deux rencontres successives... Toujours, en un mot, la caustique d'un ordre quelconque sera la spirale primitive qui aura seulement éprouvé autour de son pôle une certaine rotation.

D'ailleurs la quantité de cette rotation, par rapport à une caustique de nature et d'ordre déterminés, dépendant essentiellement de l'angle α qui caractérise la spirale primitive; s'il arrive que cette rotation soit d'un nombre entier de circonférences, la spirale proposée sera donc à elle-même sa caustique de la nature et de l'ordre en question. Cette circonstance dépend d'une équation transcendante entre l'angle de la spirale et le nombre de tours que cette courbe est censée faire sur elle-même pour produire sa caustique, nombre qui demeure indéterminé dans la question ; de sorte qu'il y a, non pas une seule spirale, mais toute une classe de spirales logarithmiques qui sont à elles-mêmes leurs caustiques d'un ordre déterminé.

Supposons, par exemple, qu'on veuille déterminer la classe des spirales logarithmiques qui sont à elles-mêmes leurs caustiques du premier ordre par réflexion. Une telle caustique est une développoïde dans laquelle l'angle δ est égal à celui qui caractérise la spirale et que nous avons appelé α; son équation sera donc

$$\rho' = 2 \sin \alpha e^{\left(\omega' + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tang} \alpha};$$

et pour que cette nouvelle courbe coïncide avec la proposée à laquelle on aura fait accomplir un nombre entier n de révolutions sur elle-même, il faudra poser

$$2 \sin \alpha\, e^{\left(\omega' + \alpha - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tang} \alpha} = e^{(\omega' + 2n\pi) \operatorname{tang} \alpha},$$

c'est-à-dire

$$2 \sin \alpha = e^{\left[\left(2n + \frac{1}{2}\right) \pi - \alpha\right] \operatorname{tang} \alpha},$$

équation qui détermine la valeur de α. D'ailleurs, comme α est toujours moindre que $\frac{1}{2}\pi$, on démontre facilement, en développant le second membre, que cette équation ne peut pas subsister à moins que n soit négatif, c'est-à-dire que le point de la caustique relatif au point d'une spire quelconque ne peut être que sur quelqu'une des spires intérieures; ce qui est conforme à la nature de la courbe.

Pour étendre cette propriété aux surfaces, il faut rappeler que si un centre envoie des rayons lumineux sur une surface, tout rayon réfléchi ou réfracté (selon une loi quelconque) sera rencontré seulement par deux des rayons infiniment voisins; ce qui donne lieu, sur chaque rayon réfléchi ou réfracté, à deux foyers seulement; et, par suite, pour l'ensemble de tous les rayons réfléchis ou réfractés, à deux nappes focales. Pour les rayons qui auront subi deux rencontres il y aura deux nouvelles nappes focales, et ainsi de suite à l'infini.

Maintenant, si l'on fait pivoter sur son pôle, comme point fixe, le plan d'une des spirales qui sont à elles-mêmes leurs caustiques d'un ordre déterminé, ce plan roulant d'ailleurs sur une surface quelconque; cette spirale engendrera une surface qui sera à elle-même, par rapport au point fixe considéré comme centre rayonnant, l'une des deux nappes focales de ce même ordre. L'autre nappe focale sera le cône décrit par le plan même de la spirale dans son mouvement.

Ce résultat tient à ce fait plus général que si, considérant une courbe plane, on construit par rapport à un point quelconque de son plan toutes les caustiques successives à l'infini (par réflexion ou réfraction), la surface qui sera engendrée par cette courbe, lorsqu'on fera pivoter son plan sur le point rayonnant, aura, pour l'une de ses deux nappes focales d'un ordre quelconque, la surface engendrée par la caustique de ce même ordre; et l'autre nappe focale de ce même ordre, quel qu'il soit, sera toujours le cône qui enveloppe les diverses positions du plan mobile. Ce cône jouit de la propriété singulière d'être à la fois, par rapport à la surface ainsi engendrée, un lieu de rencontre des normales infiniment voisines, et aussi un lieu de rencontre de tous les rayons infiniment voisins qui, étant issus du point fixe, ont subi sur cette même surface un nombre quelconque de réflexions ou de réfractions.

II.

Si de deux stations M et M_1 on a observé au même instant les distances zénithales réciproques z et z_1, c'est-à-dire si z est l'angle que fait, avec la verticale de la première station, le rayon visuel dirigé vers la seconde; et z_1 la quantité analogue mesurée simultanément dans la seconde station, si r et r_1 sont les distances de chaque lieu au centre de la terre ou plus exactement au centre de la sphère qui est osculatrice entre les deux stations réciproquement visibles, de sorte que $r_1 - r$ soit la différence de niveau entre ces stations; ρ et ρ_1 étant les densités actuelles de l'air aux points M et M_1, et k le coefficient connu qui mesure le pouvoir réfringent de l'air atmosphérique à la température 0° et à la pression $0^m,76$; ces diverses quantités ont entre elles la relation très-simple

$$(A) \ldots \; r \sin z \sqrt{1 + 4k\rho} = r_1 \sin z_1 \sqrt{1 + 4k\rho_1},$$

que M. Biot établit par cette simple considération que « l'arc (de la » trajectoire) MM_1 étant parcouru par l'élément lumineux en vertu » d'une force centrale, les perpendiculaires menées du centre C (de la » sphère osculatrice) sur les deux tangentes sont réciproques aux vi- » tesses qui ont lieu aux points de tangence, conformément à la loi » des aires qui a lieu dans un tel mouvement. Or ces perpendiculaires » sont ici exprimées par $r_1 \sin z_1$ et $r \sin z$; et les vitesses qui y corres-

» pondent sont $\sqrt{1 + 4k\rho_1}$, et $\sqrt{1 + 4k\rho}$... » (*Additions à la Connaissance des Temps*, 1842.)

Cette formule remarquable suppose seulement que les couches d'égal pouvoir réfringent sont sphériques; mais à cela près elle subsiste quelle que soit la succession des densités dans la hauteur qui sépare les deux stations; et il en résulte, au moins en théorie, « un moyen d'assigner » rigoureusement les différences de niveau de deux points dont les » distances zénithales réciproques ont été observées simultanément. » (*Ibid.*) Mais, dans la pratique, cette même formule exige plusieurs restrictions importantes, parce qu'elle a « l'inconvénient de prendre le » rayon terrestre pour unique élément linéaire, ce qui donne une très- » grande influence à la configuration accidentelle des couches d'égal » pouvoir réfringent que la théorie suppose sphériques, ainsi qu'aux » erreurs que l'on peut commettre dans la mesure des distances zéni- » thales, et dans l'appréciation des densités de l'air aux points ex- » trêmes de la trajectoire lumineuse; erreurs dont l'effet combiné de- » vient surtout excessif quand l'angle compris entre les verticales des » deux stations est fort petit.... » (*Ibid.*) M. Biot parvient à restreindre l'influence de ces diverses erreurs en supposant connu l'angle compris, au centre de la sphère osculatrice, entre les verticales des deux points visibles l'un de l'autre. Ce que je veux faire remarquer ici, c'est que la propriété des trajectoires lumineuses exprimées par l'équation (A) est susceptible d'une autre forme dans laquelle, non-seulement tout élément linéaire, mais même les circonstances atmosphériques de chaque station, ont entièrement disparu. Il suffit pour cela de concevoir une troisième station M_3 qui soit visible des points M_1 et M_2; et supposer qu'on ait au même instant mesuré, en chacun de ces trois points, les distances zénithales des deux autres, en tout *six distances*. Pour la symétrie des formules, je distinguerai les distances observées en chaque point par les lettres Z et ζ; j'affecterai les majuscules romaines aux distances qu'on observerait en parcourant le triangle $M_1 M_2 M_3$ dans un sens, et les lettres grecques à celles qu'on obtiendrait en le parcourant de suite en sens inverse. Alors l'équation, marquée ci-dessus (A), prendra la forme

$$(1)\ldots r_1 \sin Z_1 \sqrt{1 + 4k\rho_1} = r_2 \sin \zeta_2 \sqrt{1 + 4k\rho_2},$$

et aura lieu conjointement avec les suivantes

$$(2) \ldots r_2 \sin Z_2 \sqrt{1 + 4k\rho_2} = r_3 \sin \zeta_3 \sqrt{1 + 4k\rho_3},$$

$$(3) \ldots r_3 \sin Z_3 \sqrt{1 + 4k\rho_3} = r_1 \sin \zeta_1 \sqrt{1 + 4k\rho_1};$$

de sorte que par leur mutuelle combinaison on obtient la relation

$$(4) \ldots \sin Z_1 \sin Z_2 \sin Z_3 = \sin \zeta_1 \sin \zeta_2 \sin \zeta_3,$$

qui est, comme on voit, indépendante de toute circonstance atmosphérique et identiquement la même qu'on observerait dans un milieu homogène où les trajectoires lumineuses seraient des lignes droites.

Cette relation (4) ne peut pas à la vérité servir directement à mesurer les différences de niveau; mais, son avantage est d'être à l'abri des causes d'erreurs signalées par M. Biot dans sa formule fondamentale (A). Elle offrira donc un moyen facile de vérifier l'hypothèse des couches concentriques quand cette hypothèse sera douteuse; ou bien, lorsqu'on admettra cette forme pour les couches atmosphériques, on trouvera dans la relation (4) un moyen de répartir, entre les six distances zénithales du triangle $M_1 M_2 M_3$, les petites erreurs de l'observation; moyen en quelque sorte analogue à ceux qu'on possède pour redresser les erreurs commises dans la mesure des trois angles d'un triangle plan ou géodésique.