JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

MINDING

Sur le degré de l'équation finale qui résulte de l'élimination

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 412-418.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__412_0>

SUR

LE DEGRÉ DE L'ÉQUATION FINALE

QUI RÉSULTE DE L'ÉLIMINATION;

PAR M. MINDING [*].

(Cet article est traduit de l'allemand. Voir le Journal de M. Crelle, tome XXII.)

On connaît différentes méthodes pour déduire de deux équations algébriques entre deux inconnues, une nouvelle équation qui ne contienne plus qu'une seule inconnue; mais souvent on désire connaître seulement le degré de cette équation finale sans la former, et, si je ne me trompe, on n'a point encore donné de règle pour trouver facilement ce degré. On sait bien que si les deux équations sont respectivement des degrés h et k, c'est-à-dire si la plus grande somme des exposants des deux inconnues dans un terme est h pour l'une et k pour l'autre, le degré de l'équation finale est au plus égal au produit hk; mais on n'a ainsi qu'une limite que le degré souvent n'atteint pas. Pour déterminer ce degré exactement, il est nécessaire avant tout de bien établir la véritable forme de l'équation finale.

[*] Ce Mémoire de M. Minding, publié du reste avant le mien, en est pour ainsi dire le complément. Je me suis attaché de préférence au cas général, et M. Minding a traité les cas particuliers. Dans le cas général, où les équations en x et y sont complètes, B_i et A_i sont des polynomes de degré i; B_0 et A_0 sont de simples constantes; par suite le produit $f(x, y_1)\, f(x, y_2) \ldots f(x, y_n)$ est évidemment une fonction entière de x; enfin le premier terme du développement de chacune des racines y en série ordonnée suivant les puissances descendantes de x est de la forme ax. Mais dans certains cas particuliers tout cela change, et si l'on veut traiter directement ces cas particuliers, il faut avoir recours aux procédés de M. Minding. (*J. Liouville*.)

Soient les deux équations

$$(1)\ f(x,y) = A_0 y^m + A_1 y^{m-1} + A_2 y^{m-2} + \ldots\ldots + A_{m-1} y + A_m = 0,$$

$$(2)\ \varphi(x,y) = B_0 y^n + B_1 y^{n-1} + B_2 y^{n-2} + \ldots\ldots + B_{n-1} y + B_n = 0,$$

dans lesquelles les lettres A et B affectées d'indices représentent des polynomes quelconques entiers en x. Si l'on résout l'équation (2) par rapport à y, qu'on représente ses racines par $y_1, y_2, \ldots, y_n$, et qu'on forme le produit

$$(3) \qquad P = f(x, y_1) f(x, y_2) \ldots f(x, y_n),$$

B_0^m. P est une fonction entière de x ; de plus si l'on pose

$$(4) \qquad B_0^m . P = \psi(x),$$

l'équation finale demandée est

$$(5) \qquad \psi(x) = 0.$$

Pour voir que B_0^m. P est une fonction entière, il faut remarquer d'abord que P est une fonction rationnelle de x qui ne peut avoir pour dénominateur qu'une puissance de B_0, quand les fonctions symétriques de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ qui entrent dans P sont exprimées en x par le moyen de l'équation (2). En désignant une de ces fonctions symétriques par

$$S = y_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots y_n^{m_n} + \text{etc.},$$

où les termes se déduisent du premier en y permutant $y_1\ y_2 \ldots y_n$, aucun des exposants $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ne peut être plus grand que m. Si l'on pose

$$S_1 = \frac{1}{y_1{}^{m-m_1} y_2{}^{m-m_2} \ldots y_n{}^{m-m_n}} + \text{etc.},$$

on a

$$S = (y_1 y_2 \ldots y_n)^m . S_1 = (-1)^{mn} . \frac{B_n^m}{B_0^m} . S_1 ;$$

S_1 est une fonction entière et symétrique des inverses des racines de l'équation (2), et par conséquent la valeur de S_1 est une fraction rationnelle en x, qui ne peut avoir pour dénominateur qu'une puissance de B_n. On a donc

$$S_1 = \frac{z}{B_n^\lambda},$$

z étant une fonction entière de x ou plutôt une fonction entière des polynomes $B_0, B_1, \ldots, B_n$, et λ un nombre entier positif. Il vient donc

$$S = (-1)^{mn} \cdot \frac{B_n^m \cdot z}{B_0^m \cdot B_n^\lambda}.$$

Mais comme S ne peut avoir pour dénominateur qu'une puissance de B_0, il faut que B_n^λ divise le numérateur de cette fraction; de sorte que $B_0^m \cdot S$ et par conséquent aussi $B_0^m\, P = \psi(x)$ est une fonction entière.

En désignant par $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m$ les racines de l'équation (1) résolue par rapport à y, posant

$$Q = \varphi(x, \eta_1)\,\varphi(x, \eta_2) \ldots \varphi(x, \eta_m),$$

et remarquant que

$$\varphi(x, \eta_1) = B_0(\eta_1 - y_1)(\eta_1 - y_2) \ldots (\eta_1 - y_n),$$
etc.,

on a

$$Q = B_0(\eta_1 - y_1) \ldots (\eta_1 - y_n) \times B_0(\eta_2 - y_1) \ldots (\eta_2 - y_n) \times \ldots \times B_0(\eta_m - y_1) \ldots (\eta_m - y_n);$$

et puisque

$$A_0(y_1 - \eta_1)(y_1 - \eta_2) \ldots (y_1 - \eta_m) = f(x, y_1),$$
etc.,

il s'ensuit que

$$A_0^n \cdot Q = (-1)^{mn} \cdot B_0^m \cdot P. \tag{6}$$

On conclut de là que $\psi(x) = 0$ est l'équation finale demandée. Car pour chaque valeur de x qui répond à la question, on a nécessairement $P = 0$ (et aussi $Q = 0$), par conséquent $\psi(x) = 0$. Si cette équation pouvait contenir un facteur superflu, on aurait pour ce facteur $\psi(x) = 0$ sans avoir en même temps $P = 0$, ni $Q = 0$; donc à cause des équations (4) et (6), A_0 et B_0 devraient s'évanouir en même temps, ce qui n'est pas possible en général. Si dans un cas particulier A_0 et B_0 ont un facteur commun, le polynome $\psi(x)$ est aussi divisible par ce facteur, parce qu'il est toujours, comme on le voit aisément, de la forme

$$\psi(x) = A_0 U + B_0 V,$$

où U et V sont des polynomes entiers; mais comme on peut exclure ce cas en changeant infiniment peu les coefficients sans changer leurs degrés, il s'ensuit que l'équation $\psi(x) = 0$ ne fournit jamais de racine étrangère à la question.

Le degré du polynome $\psi(x)$ s'obtient maintenant de la manière suivante. On a

$$\psi(x) = B_0^m f(x, y_1) . f(x, y_2) \ldots f(x, y_n).$$

Si l'on développe les racines $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de l'équation (2) suivant les puissances décroissantes de x, et qu'on substitue à la place de ces racines leurs développements en séries dans l'expression précédente, toutes les puissances fractionnaires et négatives de x devront se détruire mutuellement, et l'on devra retrouver le polynome $\psi(x)$. Comme on ne cherche que son degré, on remplacera chaque série par son premier terme, qui sera de la forme $c_1 x^{h_1}$ pour y_1, $c_2 x^{h_2}$ pour y_2, etc. On connaît suffisamment les moyens de former ces séries, et en particulier de trouver les plus hauts exposants $h_1, h_2, \ldots, h_n$. (Voyez, par exemple, le grand Traité de Lacroix, tome I, page 223.) On déterminera ensuite le plus haut exposant de x dans chacune des fonctions $f(x, c_1 x^{h_1})$, $f(x, c_2 x^{h_2})$, ..., ou *les degrés* des fonctions $f(x, y_1), f(x, y_2), \ldots$, que nous désignerons par $k_1, k_2, \ldots, k_n$. Ces degrés peuvent être entiers ou fractionnaires, mais ne sont pas négatifs, parce que A_n est au moins du degré zéro. Enfin, si l'on désigne par b le degré de B_0, la somme

$$mb + k_1 + k_2 + \ldots + k_n \tag{7}$$

est nécessairement un nombre entier qui exprime le plus haut exposant de x dans $\psi(x)$ ou le degré cherché de l'équation finale. Dans des cas particuliers, on peut encore considérer les valeurs de $c_1, c_2, \ldots, c_n$ pour voir si le coefficient du terme du plus haut degré dans l'un des facteurs

$f(x, y_1), f(x, y_2), \ldots$ de $\psi(x)$ et conséquemment dans $\psi(x)$ même devient nul, auquel cas il faudrait tenir compte des termes suivants des développements en séries de $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Sans pousser plus loin cette indication, il est clair qu'en général la formule (7) représente le véritable degré du polynome $\psi(x)$.

Soient, par exemple, les deux équations suivantes, où l'on représente par la notation (x^μ) un polynome en x du degré μ:

$$f(x, y) = (x^2)y^4 + (x^2)y^3 + (x^4)y^2 + (x^5)y + (x^5) = 0,$$
$$\varphi(x, y) = (x^8)y^5 + (x^6)y^4 + (x^9)y^3 + (x^4)y^2 + (x^3)y + (x^4) = 0.$$

Ces équations sont du sixième et du treizième degré. Le degré de l'équation finale ne peut donc surpasser $6.13 = 78$. Pour le trouver exactement, qu'on calcule les degrés des racines y de $\varphi(x, y) = 0$; on trouve

$$h_1 = h_2 = \tfrac{1}{2}, \quad h_3 = h_4 = h_5 = -\tfrac{5}{3}.$$

On conclut de là les degrés de $f(x, y_1), f(x, y_2), \ldots$, savoir :

$$k_1 = k_2 = \tfrac{11}{2}, \quad k^3 = k_4 = k_5 = 5.$$

D'ailleurs $B_0 = (x^8)$ donne $b = 8$ et $m = 4$. Donc le degré de l'équation finale est

$$mb + k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + k_5 = 4.8 + 11 + 15 = 58.$$

Si l'on ordonne les équations proposées par rapport à x au lieu de y, pour chercher le degré de l'équation finale en y d'après la règle précédente, on ne trouvera pas toujours pour ce degré la même valeur que pour celui de l'équation finale en x. Pour expliquer cette circonstance, il faut remarquer que l'équation finale en x donne seulement les valeurs *finies* de x propres à satisfaire aux deux équations proposées. Donc si l'équation finale en y est d'un degré plus élevé que celle en x, il y a nécessairement quelques racines de l'équation en y qui correspondent à des valeurs infinies de x. On pourra toujours mettre en évidence ces valeurs de x, en altérant infiniment peu les coefficients dans l'une des équations proposées, et par-là rendre égaux les degrés des deux équations finales. Soient les équations (1) et (2) ordonnées par rapport à x,

$$f(x,y) = \alpha_0 x^\mu + \alpha_1 x^{\mu-1} + \ldots + \alpha_\mu = 0,$$
$$\varphi(x,y) = \beta_0 x^\nu + \beta_1 x^{\nu-1} + \ldots + \beta_\nu = 0,$$

où $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \beta_0, \beta_1, \ldots$, sont des polynomes entiers en y. Si A_0 n'a pas de facteur commun avec B_0, ni α_0 avec β_0, on ne peut avoir ni une valeur infinie de y pour une valeur finie de x, ni une valeur infinie de x pour une valeur finie de y. Alors les degrés des équations finales en x et en y ne peuvent pas différer l'un de l'autre. Quand il y aura des facteurs communs entre A_0 et B_0 ou entre α_0 et β_0, on n'aura qu'à changer un coefficient dans A_0 ou dans α_0 pour ramener au même degré les équations finales, en x et y. Si l'on suppose ensuite ces changements nuls, on jugera, d'après les coefficients des termes les plus élevés des équations finales combien de valeurs de x et combien de valeurs de y sont devenues infinies, et combien les deux équations admettent de solutions finies. Cette marche de calcul n'est pourtant pas nécessaire, si l'on emploie convenablement la règle exposée plus haut. Soient, par exemple, les deux équations

$$(a + bx^2)y^4 + (c + ex)y^2 + gx^3y + h + kx^2 + lx^3 = 0,$$
$$\beta x^5 y^2 + (\gamma + \delta x^2)y + \lambda + \mu x^4 = 0,$$

ou, en les ordonnant par rapport à x,

$$(l + gy)x^3 + (k + by^4)x^2 + ey^2x + h + cy^2 + ay^4 = 0,$$
$$\beta y^2 x^5 + \mu x^4 + \delta y x^2 + \lambda + \gamma y = 0.$$

On a ici

$$A_0 = a + bx^2, \quad B_0 = \beta x^5, \quad \alpha_0 = l + gy, \quad \beta_0 = \beta y^2.$$

Donc si a et l ne sont pas nuls, il n'y a pas de facteur commun entre A_0 et B_0, ni entre α_0 et β_0, et l'on trouvera les degrés des deux équations finales en x et y égaux au même nombre 26. Mais si l'on suppose a et l nuls en même temps, on trouve 25 pour le degré de l'équation finale en x, et 24 pour celle en y. Donc, par l'évanouissement de a et de l, deux racines de l'équation finale en y précédente, et une de celle en x, deviennent infinies; mais en même temps la nouvelle équation finale en x devient divisible par x^2, facteur commun de A_0 et B_0, et de même la nouvelle équation en y devient divisible par y, facteur commun de α_0 et β_0. Des 26 solutions finies qu'avaient les équations primitives, il en reste encore 23 quand a et l s'évanouissent; les trois autres deviennent

$$x_{24}=0,\quad y_{24}=\infty,\quad \mid\quad x_{25}=0,\quad y_{25}=\infty,\quad \mid\quad x_{26}=\infty,\quad y_{26}=0.$$

On voit comment on trouve le nombre *des solutions finies* par la double application de la règle établie et la comparaison des résultats.

P. S. Après avoir terminé cet article, j'ai eu connaissance d'un nouvel ouvrage intitulé : *Système d'Algèbre*, par le Dr Finck, professeur à Strasbourg, dans lequel se trouve, page 405, pour la détermination du degré de l'équation finale, une règle bien plus précise que celle que j'ai rappelée au commencement de ce Mémoire. En voici l'énoncé :

Si tous les coefficients $A_0, A_1, \ldots, A_m$, de l'équation (1) sont du degré m', et tous les coefficients $B_0, B_1, \ldots, B_n$ de l'équation (2) du degré n', le degré du polynome $\psi(x)$ (qui égalé à zéro donne l'équation finale) est $mn' + nm'$. La démonstration de ce théorème, qui occupe deux pages du livre, se déduit très-simplement de ce qui précède; car dans le cas actuel toutes les valeurs de y en x tirées de l'équation (2) sont du degré 0, de sorte que $h_1 = h_2 = \ldots = h_n = 0$: conséquemment $k_1 = k_2 = \ldots = m'$, en même temps $b = n'$, puisque B_0 est du degré n'. Donc le degré de l'équation finale

$$mb + k_1 + k_2 + \ldots + k_n = mn' + nm'. \qquad C.\ Q.\ F.\ D.$$

Si l'on applique cette règle aux cas où les coefficients sont de degrés inégaux, le résultat qu'elle donne n'est plus certain, parce qu'il suppose qu'on rende les degrés égaux, ce qui introduit des racines étrangères. Dans notre procédé pour trouver le degré de $\psi(x)$, on emploie au contraire les degrés des coefficients tels qu'ils sont donnés.