JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. CATALAN

Problème de calcul intégral

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 340-344.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__340_0>

PROBLÈME

DE CALCUL INTÉGRAL,

PAR E. CATALAN.

Un cône du second degré à base elliptique étant donné, on le coupe par une sphère concentrique, et l'on demande de calculer la portion de la surface sphérique interceptée.

Soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2,$$

l'équation du cône; et soit

$$x^2+y^2+z^2=1,$$

l'équation de la sphère.

En représentant par A l'aire cherchée, on a

$$A=\int\int\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Les limites de l'intégration seront données par la projection, sur le plan des xy, de la courbe d'intersection des deux surfaces. Or cette projection a pour équation

$$x^2\left(1+\frac{1}{a^2}\right)+y^2\left(1+\frac{1}{b^2}\right)=1,$$

ou

$$\alpha^2x^2+\beta^2y^2=1.$$

Maintenant je pose

$$\alpha x = \rho\cos\omega,\quad \beta y = \rho\sin\omega,\quad \text{d'où}\quad dx\,dy = \frac{1}{\alpha\beta}\rho\,d\rho\,d\omega;$$

il en résultera

$$A = \frac{4}{\alpha\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \frac{\rho\,d\rho\,d\omega}{\sqrt{1-\rho^2\left(\frac{\cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2}\right)}}.$$

Intégrant par rapport à ρ, l'on a

$$\int\frac{\rho\,d\rho}{\sqrt{1-\rho^2\left(\frac{\cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2}\right)}}$$

$$= -\frac{1}{\frac{\cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2}}\sqrt{1-\rho^2\left(\frac{\cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2}\right)}+C,$$

et

$$\int_0^1 = \frac{1}{\frac{\cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2}}\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{\cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2}\right)}\right].$$

Donc

$$A = \frac{4}{\alpha\beta}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\omega}{\frac{\cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\omega\sqrt{1-\left(\frac{\cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2}\right)}}{\frac{\cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2}}\right].$$

Pour obtenir la première intégrale, je prends tang $\omega = u$, d'où

$$\cos^2\omega = \frac{1}{1+u^2},\quad \sin^2\omega = \frac{u^2}{1+u^2},\quad d\omega = \frac{du}{1+u^2};$$

ce qui donne

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\omega}{\frac{\cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2}} = \int_0^{\infty}\frac{du}{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{u^2}{\beta^2}} = \frac{1}{2}\pi\alpha\beta.$$

La seconde intégrale ne peut s'obtenir sous forme finie que dans le cas où $\alpha = \beta$, c'est-à-dire lorsque le cône est de révolution.

On a, pour ce cas particulier,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}}}{\frac{1}{\alpha^2}} = \frac{\pi}{2} \alpha \sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

Donc, en mettant pour α sa valeur,

$$A = \frac{2\pi}{\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}}} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} - \frac{1}{a} \right) = 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}} \right);$$

ce que l'on peut trouver par des considérations géométriques.

Dans le cas général, je pose $\tang \omega = p \tang \theta$, d'où

$$\sin^2 \omega = \frac{p^2 \tang^2 \theta}{1 + p^2 \tang^2 \theta}, \quad \cos^2 \omega = \frac{1}{1 + p^2 \tang^2 \theta}, \quad d\omega = \frac{p}{1 + p^2 \tang^2 \theta} \frac{d\theta}{\cos^2 \theta},$$

et

$$\sqrt{1 - \left(\frac{\cos^2 \omega}{\alpha^2} + \frac{\sin^2 \omega}{\beta^2} \right)} = \sqrt{1 - \frac{\frac{1}{\alpha^2} + \frac{p^2 \tang^2 \theta}{\beta^2}}{1 + p^2 \tang^2 \theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) + p^2 \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) \tang^2 \theta}{1 + p^2 \tang^2 \theta}}.$$

Ce radical se simplifiera si l'on prend

$$p^2 \left(1 - \frac{1}{\beta^2}\right) = 1 - \frac{1}{\alpha^2}.$$

Alors la formule à intégrer devient

$$\frac{p\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^2}}}{1+p^2\operatorname{tang}^2\theta}\times\frac{d\theta}{\cos^2\theta}\times\frac{1+p^2\operatorname{tang}^2\theta}{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{p^2\operatorname{tang}^2\theta}{\beta^2}}\times\frac{1}{\cos\theta}\times\frac{1}{\sqrt{1+p^2\operatorname{tang}^2\theta}}$$

$$=p\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^2}}\,\frac{d\theta}{\frac{\cos^2\theta}{\alpha^2}+\frac{p^2\sin^2\theta}{\beta^2}}\times\frac{1}{\sqrt{\cos^2\theta+p^2\sin^2\theta}}$$

$$=p\sqrt{1-\frac{1}{\alpha^2}}\,\frac{d\theta}{\frac{1}{\alpha^2}-\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{p^2}{\beta^2}\right)\sin^2\theta}\times\frac{1}{\sqrt{1-(1-p^2)\sin^2\theta}}.$$

On a

$$p=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\alpha^2}}{1-\frac{1}{\beta^2}}}=\frac{\beta}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha^2-1}{\beta^2-1}}=\frac{b}{a}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{b^2}}{1+\frac{1}{a^2}}}=\sqrt{\frac{1+b^2}{1+a^2}}:$$

comme on peut supposer $a>b$, p sera <1. Donc

$$1-p^2=\frac{a^2-b^2}{1+a^2}$$

sera une quantité positive <1, que l'on peut représenter par c^2.

Enfin, la quantité

$$1-\frac{\alpha^2p^2}{\beta^2}=1-\frac{\alpha^2-1}{\beta^2-1}=1-\frac{b^2}{a^2}$$

est pareillement positive, et moindre que l'unité : appelons-la n. Nous aurons, à la place de la seconde intégrale,

$$\frac{1}{a^2}\sqrt{1+b^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(1-n\sin^2\theta)\sqrt{1-c^2\sin^2\theta}}=\frac{1}{a^2}\sqrt{1+b^2}\,\Pi_1(c,n).$$

Cette fonction elliptique complète de troisième espèce peut s'exprimer par des fonctions de première et de seconde. Pour opérer la transformation, j'emploie une formule donnée par Legendre (*Exer-*

cices, tome I, page 141) :

$$\frac{c'^2 \sin\theta' \cos\theta'}{\sqrt{1-c'^2\sin^2\theta'}} [\Pi_1(n, c) - F_1(c)] = \frac{\pi}{2} + F_1(c) F(c', \theta')$$
$$- E_1(c) F(c', \theta') - F_1(c) E(c', \theta').$$

Dans cette formule

$$c'^2 = 1 - c^2 = \frac{1+b^2}{1+a^2},$$

et

$$\sin^2\theta' = \frac{1-n}{c'^2} = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{1+a^2}{1+b^2}.$$

Elle devient donc

$$\Pi_1(n, c) = F_1(c) + \frac{a\sqrt{1+a^2}}{b}\left(\frac{\pi}{2} + \text{etc.}\right).$$

Notre intégrale est par suite

$$\frac{1}{a^2}\sqrt{1+b^2}\, F_1(c) + \frac{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}}{ab}\left[\frac{\pi}{2} + F_1(c) F(c', \theta') - \text{etc.}\right].$$

Réunissant les deux résultats, on a

$$A = 2\pi - \frac{4b}{a\sqrt{1+a^2}} F_1(c) - 4\left[\frac{\pi}{2} + F_1(c)F(c',\theta') - E_1(c) F(c', \theta') - F_1(c) E(c', \theta')\right]$$
$$= 4\left[E_1(c) F(c', \theta') + F_1(c) E(c', \theta') - F_1(c) F(c', \theta') - \frac{b}{a\sqrt{1+a^2}} F_1(c)\right].$$

Remarque. On sait que la courbe d'intersection d'un cône à base elliptique et d'une sphère concentrique, est une *ellipse sphérique*. Il résulte donc des calculs précédents, que l'aire de l'ellipse sphérique s'exprime par une fonction elliptique de troisième espèce jointe à une quantité algébrique.

Le lecteur pourra consulter, relativement aux propriétés de l'ellipse sphérique, plusieurs Mémoires de *Fuss*, de M. *Chasles*. de M. *Gudermann*, etc.