JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

J. BERTRAND

Note sur la vraie valeur des fractions qui prennent la forme $\frac{\infty}{\infty}$

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 6 (1841), p. 14-16.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1841_1_6__14_0>

NOTE

Sur la vraie valeur des fractions qui prennent la forme $\frac{\infty}{\infty}$;

PAR J. BERTRAND,

Élève de l'École Polytechnique.

On donne, dans les Traités de Calcul différentiel, une règle qui ramène la détermination de la vraie valeur du rapport $\frac{f(x)}{F(x)}$ de deux fonctions $f(x)$, $F(x)$, lorsque ces deux fonctions deviennent à la fois infinies, à la recherche de la limite du rapport de leurs dérivées. La méthode fort simple que l'on emploie consiste à écrire la fraction de telle sorte qu'au lieu de $\frac{\infty}{\infty}$ elle devienne $\frac{0}{0}$, et à appliquer alors la règle relative à ce dernier cas. On trouve ainsi

$$\lim.\ \frac{f(x)}{F(x)} = \lim.\ \left[\frac{f(x)}{F(x)}\right]^2 .\ \lim.\ \frac{F'(x)}{f'(x)};$$

et en supprimant le facteur $\lim.\ \frac{f(x)}{F(x)}$ il vient, comme on voulait le démontrer,

$$\lim.\ \frac{f(x)}{F(x)} = \lim.\ \frac{f'(x)}{F'(x)}.$$

Mais cette démonstration n'est rigoureuse qu'autant qu'on est assuré d'avance que la limite cherchée n'est ni nulle ni infinie. La règle n'est pourtant pas en défaut dans ce cas; c'est ce que je me propose de faire voir en en donnant une démonstration directe qui ne sera pas sujette à la même objection. Soit a la valeur pour laquelle on a $f(a) = \infty$, $F(a) = \infty$, et admettons, comme on le fait ordinairement, que pour les valeurs de x voisines de a, mais différentes de a, les fonctions $f(x)$, $F(x)$, soient continues; en d'autres termes admettons que si x varie depuis $a + \varepsilon$ jusqu'à a, ε étant un très petit nombre, les fonctions $f(x)$, $F(x)$, varieront elles-mêmes depuis $f(a+\varepsilon)$, $F(a+\varepsilon)$

jusqu'à $f(a)$, $F(a)$ ou ∞, en passant par toutes les valeurs intermédiaires. Cela posé, nous voulons trouver vers quelle limite tend la fraction

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)},$$

lorsque h tend vers zéro : au lieu de cette expression nous considérerons

$$\frac{f(a+h)-f(a+h')}{F(a+h)-F(a+h')},$$

h' étant une nouvelle quantité infiniment petite mais qui tendra vers zéro de manière à être constamment plus grande que h : on peut déterminer la loi du décroissement simultané de ces deux quantités de manière que les rapports $\frac{f(a+h')}{f(a+h)}$, $\frac{F(a+h')}{F(a+h)}$ tendent tous les deux vers zéro; car après avoir donné à h' une valeur très petite quelconque, on pourra ensuite trouver pour h une valeur telle que la somme des carrés des rapports dont il s'agit soit par exemple égale à h' et converge en conséquence vers la même limite zéro : c'est ce qu'on reconnaît en observant que si h varie depuis h' jusqu'à o, cette somme, d'abord égale à 2 et par suite $> h'$, passe évidemment par toutes les valeurs intermédiaires entre 2 et o. D'après cela les fractions

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}, \quad \frac{f(a+h)-f(a+h')}{F(a+h)-F(a+h')},$$

convergent vers la même limite, puisque les termes ajoutés dans la seconde, bien que croissant indéfiniment, sont infiniment petits par rapport à ceux qui étaient déjà dans la première.

Mais sous cette forme on a, d'après un théorème de M. Cauchy,

$$\frac{f(a+h)-f(a+h')}{F(a+h)-F(a+h')} = \frac{f'[a+\theta(h-h')]}{F'[a+\theta(h-h')]},$$

où θ désigne une quantité positive plus petite que 1; et l'on voit que la limite du second membre est celle du rapport des dérivées lorsque la variable indépendante tend vers la limite a.

Il y aurait quelques mots à changer si la valeur de x, qui rend les deux fonctions infinies, était elle-même infinie; il faudrait alors considérer

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{F(x) - F(x_1)},$$

et faire croître indéfiniment x et x_1 de manière à ce que les seconds termes soient infiniment petits par rapport aux premiers.

J'ajouterai qu'il est important d'observer que bien que la règle s'applique au cas où la limite cherchée est nulle ou infinie, il ne faudrait pas croire que dans un calcul où entre une expression de cette sorte on puisse la remplacer par le rapport des dérivées. Tout ce que nous savons c'est que ce second rapport s'annulle avec le premier et est infini avec lui; mais rien ne prouve que ce soient des infiniment petits ou des infiniment grands égaux. Ainsi, pour citer un exemple fort simple, si l'on considère la fraction $\frac{x^3}{x^4}$ pour $x = \infty$, on ne peut pas la remplacer par le rapport des dérivées $\frac{3x^2}{4x^3}$, bien que ce nouveau rapport devienne infini comme le premier; la même remarque s'applique aux fractions $\frac{0}{0}$.