JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. CHASLES

Nouvelle solution du problème de l'attraction d'un ellipsoïde hétérogène sur un point extérieur

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 5 (1840), p. 465-488.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1840_1_5__465_0>

NOUVELLE SOLUTION

DU

PROBLÈME DE L'ATTRACTION D'UN ELLIPSOÏDE HÉTÉROGÈNE SUR UN POINT EXTÉRIEUR [*];

Par M. CHASLES.

1. J'ai donné une première solution de ce problème dans un Mémoire qui paraîtra dans le *Recueil des Savants étrangers* [**]. Dans ce Mémoire, j'ai eu pour objet principal de continuer la méthode synthétique de Maclaurin, et de généraliser, par cette méthode, les beaux résultats auxquels elle avait conduit le géomètre anglais. Cette généralisation qui, après avoir résisté long-temps aux efforts de l'analyse, maniée par D'Alembert et Lagrange [***], a été obtenue enfin par Legendre [****] et Laplace [*****], de deux manières très différentes,

[*] Cette solution est extraite des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, T. VI, p. 902, séance du 25 juin 1838. J'y ai fait quelques changements de rédaction, et j'ai ajouté, sous forme de Notes, quelques développements destinés à la rendre tout-à-fait élémentaire et indépendante de tous autres ouvrages.

[**] Voir le *Rapport* de M. Poinsot, *Comptes rendus*, etc. T. VI, p. 808, séance du 11 juin 1838.

[***] Voir *Opuscules mathématiques* de D'Alembert, T. VI et VII. — *Mémoires de l'Académie de Berlin*, années 1773, 1774, 1775 et 1795.

[****] *Recueil des Savants étrangers*, T. X, et *Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1788.

[*****] *Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1783, et *Mécanique céleste*, T. II, livre 3.

avait paru à d'illustres analystes, peu accessible à la synthèse [*]. La marche que j'ai suivie consiste à comparer de molécule à molécule les attractions des deux ellipsoïdes considérés dans le théorème de Maclaurin; ce qui montre, en quelque sorte, l'origine et la cause première de ce singulier et célèbre théorème. Cette solution est simple en elle-même; mais elle nécessite la connaissance de plusieurs propriétés nouvelles des surfaces de second degré; et la démonstration de celles-ci entraîne dans des considérations géométriques qui ne sont pas sans quelque difficulté, et qui peuvent faire regarder cette solution comme peu susceptible d'un usage pratique, du moins jusqu'à ce que les méthodes géométriques, fort négligées depuis un siècle, aient repris faveur. Dans la solution actuelle, j'évite ces considérations, en comparant, tout d'abord, de couche à couche, les attractions des deux ellipsoïdes de Maclaurin. De cette manière, une seule propriété de ces surfaces me suffit, et cette proposition n'est pas inconnue : c'est précisément celle sur laquelle repose le beau théorème de M. Ivory, sur l'attraction des ellipsoïdes.

Cette solution est *synthétique*, comme la première; elle conduit, sans calculs, à une expression géométrique de l'attraction qu'une couche ellipsoïdale infiniment mince comprise entre deux surfaces semblables, exerce sur un point extérieur quelconque.

Pour passer à l'attraction de l'ellipsoïde, on le considère comme

---

[*] M. Legendre, à la suite de sa solution pour le cas d'un point extérieur, s'exprime ainsi : « Ce problème est vraisemblablement un de ceux auxquels la méthode synthé- » tique *ne serait pas applicable*... » (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, année 1788, page 486.)

M. Poisson, après avoir exprimé l'opinion que l'analyse seule peut résoudre les problèmes un peu difficiles, et que la synthèse y est impuissante, dit que, néanmoins, le livre des *Principes mathématiques de la Philosophie naturelle* fait exception à cette règle, et ajoute ce qui suit :

« On peut encore citer les beaux théorèmes de Maclaurin sur l'attraction d'un ellip- » soïde; mais s'il est vrai que, dans cette question, la synthèse ait d'abord devancé » l'analyse, celle-ci a bientôt repris sa supériorité entre les mains de Lagrange, et la » question n'a été résolue complétement que par des transformations analytiques, que » l'on n'a pas tout de suite imaginées, et *auxquelles la synthèse n'aurait pu suppléer*. » (*Note sur le mouvement de rotation d'un corps solide*, lue à l'Académie des Sciences, le 26 mai 1834.)

composé de couches infiniment minces, comprises chacune entre deux surfaces semblables; et il suffit de placer l'expression trouvée pour l'attraction de l'une de ces couches, sous le signe d'intégration. Toutefois, il faut donner d'abord à cette formule une forme analytique convenable, en exprimant les différentes quantités qui y entrent en fonction d'une seule variable.

Le choix de cette variable est tel, qu'on peut supposer que, chaque couche étant homogène, la densité de l'ellipsoïde varie d'une couche à une autre, suivant une fonction quelconque d'un diamètre de la surface externe de la couche. On obtient ainsi l'expression de l'attraction exercée par un ellipsoïde hétérogène sur un point extérieur : ce qui comprend, comme on sait, le cas d'un point intérieur, et conséquemment la solution complète du problème.

2. La proposition de géométrie sur laquelle nous nous appuierons s'énonce ainsi :

Quand deux ellipsoïdes ont leurs sections principales décrites des mêmes foyers, si, sur le premier, on prend arbitrairement deux points S, m, *et, sur le second, les deux points* CORRESPONDANTS S′, m′, *les deux droites* Sm′, S′m, *seront égales* [*].

On sait que M. Ivory a appelé points *correspondants* deux points situés sur les deux ellipsoïdes, de manière que leurs coordonnées, dans le sens de chaque axe principal, soient entre elles comme les demi-diamètres des deux ellipsoïdes, dirigés suivant cet axe.

3. Concevons deux surfaces ellipsoïdales A, B, semblables entre elles, semblablement placées et concentriques; soient a, b, c, les trois demi-diamètres principaux de la première, et na, nb, nc, ceux de la seconde : les équations des deux surfaces seront

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=n^2.$$

Supposons qu'à chaque point m de l'espace, dont les coordonnées

[*] Voir la démonstration de ce théorème dans la Note I, à la suite de ce Mémoire.

sont x, y, z, *corresponde* un point m' dont les coordonnées x', y', z', aient avec celles du point m les relations

$$\frac{x}{x'} = \frac{a}{a'}, \quad \frac{y}{y'} = \frac{b}{b'}, \quad \frac{z}{z'} = \frac{c}{c'},$$

a', b', c', étant trois coefficients arbitraires.

Aux deux surfaces proposées correspondront deux autres surfaces A′, B′, qui seront deux ellipsoïdes semblables entre eux et semblablement placés : le rapport de leurs diamètres homologues sera n.

Ces deux surfaces jouissent de cette propriété, que : *une partie quelconque du volume compris entre elles est à la partie correspondante du volume compris entre les deux premières, dans le rapport constant* $\frac{a'b'c'}{abc}$; car les relations entre les coordonnées de deux points *correspondants* donnent

$$dx'dy'dz' = \frac{a'b'c'}{abc}\, dx\,dy\,dz.$$

4. Prenons les coefficients indéterminés a', b', c', tels qu'ils aient avec les trois premiers a, b, c, les deux relations

$$a^2 - b^2 = a'^2 - b'^2,$$
$$a^2 - c^2 = a'^2 - c'^2;$$

les deux surfaces A, A′, auront leurs sections principales décrites des mêmes foyers; et il en sera de même des deux autres B, B′.

Supposons que les deux premières surfaces A, B, soient infiniment rapprochées l'une de l'autre, ce qui aura lieu si n diffère infiniment peu de l'unité; elles envelopperont une couche infiniment mince C, dont A sera la surface externe et B la surface interne. Les deux autres surfaces A′, B′, envelopperont pareillement une couche infiniment mince C′, dont A′ sera la paroi externe et B′ la paroi interne.

5. Remarquons que *les épaisseurs des deux couches, suivant un même axe principal, sont entre elles comme les demi-diamètres des surfaces externes dirigés suivant cet axe;* car a, a', étant ces deux demi-diamètres, ceux des deux surfaces internes seront na, na'; les

épaisseurs des deux couches sont donc

$$da = a - na, \quad da' = a' - na',$$

et leur rapport est

$$\frac{da}{da'} = \frac{a}{a'};$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

6. Soient S, S′, deux points fixes *correspondants* entre eux sur les deux surfaces externes A, A′; soient deux autres points *correspondants* m, m', sur ces mêmes surfaces, et soient dv, dv', les éléments de volume des deux couches en ces points m, m'; on aura, comme nous l'avons démontré ci-dessus,

$$\frac{dv}{dv'} = \frac{abc}{a'b'c'}.$$

Or on a

$$mS' = m'S \ (\text{n}^\text{o}\ \mathbf{2}):$$

donc

$$\frac{dv}{mS'} : \frac{dv'}{m'S} = \frac{abc}{a'b'c'};$$

et, étendant les expressions $\frac{dv}{mS'}$, $\frac{dv'}{m'S}$, à toutes les molécules des deux couches, on a

$$\sum \frac{dv}{mS'} : \sum \frac{dv'}{m'S} = \frac{abc}{a'b'c'} = \textit{le rapport des volumes des deux couches}\ [*].$$

Cette équation exprime une propriété géométrique des deux couches, qui va nous suffire, *seule*, pour résoudre toute la question de l'attraction des ellipsoïdes [**].

---

[*] Car $\frac{abc}{a'b'c'}$ exprime le rapport constant des volumes de deux molécules *correspondantes* quelconques (3); c'est donc aussi le rapport des volumes des deux couches elles-mêmes.

[**] Nous avons supposé que chacune des couches était comprise entre deux surfaces

7. On sait que les coefficients différentiels de la fonction $\sum \frac{dv}{mS'}$, pris par rapport aux coordonnées x, y, z, du point m, sont les composantes de l'attraction que la couche C exerce sur le point S' [*]. Or si nous supposons que, des deux couches C, C', la première soit

---

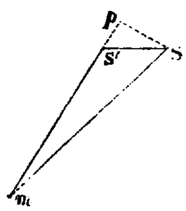
semblables et semblablement placées, parce que ce sont ces couches que nous allons considérer dans la suite; mais il est aisé de voir que le théorème a lieu pour deux couches infiniment minces dont les surfaces internes seraient de forme quelconque, pourvu qu'elles se correspondissent et que les deux surfaces externes fussent toujours deux ellipsoïdes décrits des mêmes foyers.

[*] En effet, l'attraction que la molécule dv, située en m, exerce sur le point S', a pour expression $\frac{dv}{\overline{mS'}^2}$, et sa composante parallèle à l'axe des x est

$$\frac{dv}{\overline{mS'}^2}\cos(S'm, x).$$

Supposons que le point S' soit déplacé de la quantité dx dans la direction de l'abscisse x; soit S la nouvelle position de ce point, et Sp la perpendiculaire abaissée de S sur mS', on aura dans le triangle rectangle SpS',

$$S'p = S'S\cos pS'S = -S'S\cos mS'S.$$



Or S'p est égal à la différence des deux rayons mS, mS'; c'est donc la différentielle de mS'. Mais S'S est égal à dx; on a donc

$$d.mS' = -dx.\cos(S'm, x);\quad \text{d'où}\quad \cos(S'm, x) = -\frac{d.mS'}{dx}.$$

La composante de l'attraction exercée par la molécule dv sur le point S' devient donc

$$-\frac{dv}{\overline{mS'}^2}.\frac{d.mS'}{dx},\quad \text{ou}\quad dv.\frac{d\frac{1}{mS'}}{dx}:$$

l'enveloppante, le point S′ sera situé dans l'intérieur de sa paroi interne; conséquemment, d'après le théorème de Newton [*], ce point n'éprouvera aucune action de la part de cette couche. Les coefficients différentiels de la somme $\sum \frac{dv}{mS'}$, seront donc nuls; c'est-à-dire que cette somme est constante pour toutes les positions du point S′ dans l'intérieur de la paroi interne de la couche C [**]. Donc, d'après l'équation ci-dessus, la somme $\sum \frac{dv'}{m'S}$ a aussi une valeur constante pour toutes les positions correspondantes du point S, c'est-à-dire pour tous les points de la surface A. D'où résulte ce théorème :

Quand on a une couche infiniment mince, comprise entre deux surfaces ellipsoïdales concentriques, semblables et semblablement placées, la somme des molécules de cette couche, divisées par leurs distances respectives à un point pris en dehors de la surface externe, est constante pour toutes les positions de ce point sur un ellipsoïde ayant ses sections principales décrites des mêmes foyers que celles de la surface externe de la couche.

La valeur de cette somme a pour expression

$$\sum \frac{dv'}{m'S} = \frac{a'b'c'}{abc} \cdot \sum \frac{dv}{mS'}.$$

---

dv est indépendante de la coordonnée du point S′ sur laquelle porte la différentiation; on peut donc écrire

$$\frac{d.\frac{dv}{mS'}}{dx}.$$

La composante de l'attraction totale du corps est donc

$$\sum \left(\frac{d.\frac{dv}{mS'}}{dx} \right), \quad \text{ou} \quad \frac{d.\sum \frac{dv}{mS'}}{dx}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

[*] Voir la Note II, à la suite du Mémoire.
[**] Voir la Note III, *ibid.*

8. Concevons une autre couche C″ analogue à la couche C′, c'est-à-dire qui soit comprise entre deux surfaces A″, B″, semblables entre elles et ayant respectivement leurs sections principales décrites des mêmes foyers que celles des deux surfaces A, B; que cette couche soit aussi, comme C′, enveloppée par la première C. Soient a'', b'', c'', les demi-diamètres principaux de sa surface externe A″; et S″, m'', les points de cette surface qui *correspondent* aux points S et m de la surface A.

On aura

$$\sum \frac{dv''}{m''\mathrm{S}} = \frac{a''b''c''}{abc} \sum \frac{dv}{m\mathrm{S}''}.$$

Or nous avons dit que la fonction $\sum \frac{dv}{m\mathrm{S}'}$ est constante pour toutes les positions du point S′ dans l'intérieur de la paroi interne de la couche C; le point S″ est une de ces positions : on a donc

$$\sum \frac{dv}{m\mathrm{S}'} = \sum \frac{dv}{m\mathrm{S}''}.$$

Les deux équations ci-dessus donnent donc

$$\frac{\sum \frac{dv'}{m'\mathrm{S}}}{\sum \frac{dv''}{m''\mathrm{S}}} = \frac{a'b'c'}{a''b''c''};$$

ce qui exprime ce théorème :

Quand on a deux couches ellipsoïdales infiniment minces, comprises chacune entre deux surfaces semblables et semblablement placées, et dont les surfaces externes ont leurs sections principales décrites des mêmes foyers, ainsi que leurs surfaces internes, si l'on fait la somme des molécules de chaque couche, divisées par leurs distances respectives à un même point extérieur aux deux couches, ces deux sommes seront entre elles comme les volumes des deux couches.

9. Ce théorème et le précédent expriment de simples propriétés géométriques des couches ellipsoïdales que nous avons considérées. Mais ils sont susceptibles d'autres expressions qui vont devenir des propriétés relatives aux attractions exercées par ces couches sur un même

point extérieur. Le premier fera connaître la direction de ces attractions, et le second le rapport de leurs intensités; d'où l'on conclura aisément la valeur absolue de ces attractions, et, par suite, la solution complète du problème de l'attraction d'un ellipsoïde.

10. Nous avons vu (7) que la somme $\sum \frac{dv'}{m'S}$ a une valeur constante pour toutes les positions du point S sur la surface A; cela prouve, comme on sait, que cette surface est normale à la direction de l'attraction que la couche C′ exerce sur le point S [*]. Le théorème du n° 7 exprime donc que :

L'attraction qu'une couche infiniment mince comprise entre deux ellipsoïdes semblables, concentriques et semblablement placés, exerce sur un point extérieur, est dirigée suivant la normale à l'ellipsoïde mené par ce point, de manière que ses sections principales aient les mêmes foyers que celles de la surface externe de la couche [**];

---

[*] La raison de cette proposition est bien simple. Nous avons vu (art. 7, note 1re) que si l'on passe du point S à un point infiniment voisin s, l'expression $\frac{d.\sum \frac{dv'}{m'S}}{Ss}$ est la composante de l'attraction de la couche C′ sur le point S, estimée dans la direction de l'élément Ss. Or si cet élément est situé sur la surface A, on a

$$\sum \frac{dv'}{m'S} = \textit{constante}; \quad \text{d'où} \quad d.\sum \frac{dv'}{m'S} = 0;$$

par conséquent la composante de l'attraction suivant l'élément Ss est nulle. Cela a lieu pour toutes les directions de cet élément sur la surface A; il s'ensuit donc que l'attraction est dirigée suivant la normale à cette surface.

[**] M. Poisson a obtenu une autre expression de la direction de l'attraction de la couche, qu'il a trouvée coïncidante avec *l'axe du cône circonscrit à la couche, ayant son sommet au point attiré.* (Voir *Mémoires de l'Académie des Sciences*, T. XIII.) M. Steiner a donné de ce théorème une démonstration géométrique très simple, qui repose sur le théorème de Newton, c'est-à-dire sur la propriété dont jouit la couche, de n'exercer aucune action sur un point quelconque de l'espace compris dans sa paroi interne. (Voir *Journal de Mathématiques* de M. Crelle, T. XII, page 112, année 1834.)

Depuis j'ai démontré ce même théorème directement, c'est-à-dire sans faire usage de celui de Newton. Ma démonstration repose sur une proposition de Géométrie, démon-

Ou, en d'autres termes,

Les surfaces de niveau *relatives à l'attraction de la couche sont des ellipsoïdes ayant leurs sections principales décrites des mêmes foyers que celles de la surface externe de la couche.*

Il suit de là que cette surface externe est elle-même une *surface de niveau;* c'est-à-dire que *l'attraction que la couche exerce sur un point quelconque de sa surface externe est dirigée suivant la normale à cette surface.*

11. L'équation du n° **8** donne

$$\frac{d.\sum \frac{dv'}{m'S}}{dx} : \frac{d.\sum \frac{dv''}{m''S}}{dx} = \frac{a'b'c'}{a''b''c''}.$$

L'axe des x peut avoir ici une direction quelconque. Or les deux coefficients différentiels expriment, comme nous l'avons dit ci-dessus, les composantes, parallèles à cet axe, des attractions exercées par les deux couches C′ et C″ sur le point S; cette équation exprime donc le théorème suivant :

Quand deux couches ellipsoïdales infiniment minces, comprises chacune entre deux surfaces semblables, sont telles que leurs surfaces externes aient les mêmes foyers, ainsi que leurs surfaces internes, ces couches exercent sur un même point extérieur des attractions dont les composantes, suivant une même direction quelconque, sont entre elles comme les volumes des deux couches.

D'où il suit que :

Les attractions effectives des deux couches sur un même point extérieur ont la même direction et sont entre elles comme les masses des deux couches.

---

trée dans mon *Aperçu historique,* page 792. (Voir *Journal de l'École Polytechnique,* xxv^e cahier, page 269.)

Mais le théorème actuel a l'avantage de faire connaître les *surfaces de niveau* relatives à l'attraction de la couche, surfaces qu'on n'avait pas encore introduites dans la théorie de l'attraction, et dont la considération peut y être très utile. J'ai montré que ce théorème a aussi une application immédiate dans la théorie de l'électricité et dans celle de la chaleur, théories qui ont une grande analogie avec celle de l'attraction. (Voir *Journal de l'École Polytechnique,* xxv^e cahier.)

12. De ce théorème on passe, sans difficulté, au cas de deux couches d'épaisseur finie, ce qui comprend le cas de deux ellipsoïdes, et ce qui donne le théorème de Maclaurin dans toute sa généralité [*].

13. Il nous reste à déterminer l'attraction d'une couche sur un point extérieur. Nous connaissons, par le théorème du n° **10**, la direction de cette attraction : le calcul de son intensité se ramène, par le théorème précédent, au cas d'une autre couche dont la surface externe passerait par le point attiré.

Pour ce cas nous pourrions invoquer un théorème général de Laplace, qui consiste en ce que : *quand une couche infiniment mince, de forme quelconque, n'exerce aucune action sur les points situés dans l'intérieur de sa paroi interne, l'attraction de la couche sur un point* S *de*

---

[*] Soient A, A', deux ellipsoïdes dont les sections principales ont les mêmes foyers; considérons-les comme composés de couches infiniment minces, comprises chacune entre deux surfaces semblables. Soient a, b, c, et a', b', c', les demi-diamètres principaux de ces deux surfaces; les demi-diamètres de la surface externe d'une couche du premier ellipsoïde seront na, nb, nc, et ceux de la surface externe d'une couche du second ellipsoïde na', nb', nc'. Il est évident que si l'on suppose à la variable n la même valeur par rapport aux deux couches, celles-ci auront leurs sections principales décrites des mêmes foyers; leurs attractions sur un même point extérieur auront donc la même direction et seront entre elles dans le rapport constant $\frac{abc}{a'b'c'}$. Conséquemment les composantes de ces attractions, suivant un même axe, seront entre elles dans ce même rapport. Donc la somme des composantes des attractions d'un certain nombre de couches consécutives du premier ellipsoïde, sera à la somme des composantes des attractions des couches correspondantes du second ellipsoïde, dans ce même rapport; d'où l'on conclut que les attractions totales des volumes formés par les couches considérées dans les deux ellipsoïdes, ont la même direction et sont entre elles dans le rapport $\frac{abc}{a'b'c'}$. Or ces volumes ont pour parois internes des ellipsoïdes semblables aux deux proposés, et dont les demi-diamètres principaux ont leurs valeurs égales à na, nb, nc, et na', nb', nc'. Les épaisseurs de ces deux couches, suivant l'axe a, sont $a(1-n)$ et $a'(1-n)$, et elles ont pour rapport $\frac{a}{a'}$. Les volumes des deux couches sont entre eux dans le rapport $\frac{abc}{a'b'c'}$, puisque les volumes des couches élémentaires correspondantes sont eux-mêmes dans ce rapport. On conclut donc ce théorème :

Quand on a deux couches d'épaisseur finie, comprises chacune entre deux ellip-

sa surface externe est dirigée suivant la normale SA *en ce point, et a pour expression* $4\pi\rho\varepsilon$, ρ *étant la densité de la couche, et* ε *son épaisseur au point attiré* [*].

Mais le calcul direct de l'attraction d'une couche ellipsoïdale est tellement simple, que nous n'avons pas besoin de recourir à ce théorème général.

Concevons que le point S, situé sur la surface externe de la couche, soit le sommet d'un cône, et que ce cône intercepte sur une sphère décrite de son sommet comme centre, avec un rayon égal à l'unité, un élément superficiel σ ayant des dimensions infiniment petites par rapport à ε. Pour une sphère de rayon r la surface interceptée sera $r^2\sigma$: par suite la portion de couche comprise dans le cône en question peut être décomposée en une infinité d'éléments $r^2\sigma dr$, qui donnent lieu à des forces $\rho\sigma dr$ dont on obtiendra la somme ou la résultante en intégrant dr entre des limites convenables. Soient m, n, n', les points où l'une des arètes du cône rencontre les deux parois externe et interne de la couche. L'intégration effectuée depuis le point S jusqu'au point n, et depuis le point n' jusqu'au point m, donnera

$$\rho\sigma\,(Sn + mn'),$$

c'est-à-dire

$$2\rho . Sn . \sigma,$$

puisque dans l'ellipsoïde $mn' = Sn$.

Concevons la normale à la couche au point S; soit A le point où

---

soïdes semblables, si les ellipsoïdes qui forment les surfaces externes des deux couches ont les mêmes foyers, et si les épaisseurs des deux couches, suivant un même axe principal, sont entre elles dans le rapport des deux demi-diamètres des surfaces externes dirigés suivant cet axe (auquel cas les surfaces internes ont les mêmes foyers), les attractions que ces deux couches exerceront sur un même point extérieur auront la même direction et seront entre elles comme les masses des deux couches.

Le théorème de Maclaurin est un cas particulier de cette proposition générale.

Réciproquement, on peut conclure de ce théorème, par le seul principe de la composition des forces, qu'il s'applique à deux couches telles que nous venons de les définir. (Voir le *Rapport* de M. Poinsot dans les *Comptes rendus de l'Académie*, T. VI, p. 810.)

[*] Voir le *Mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs*, par M. Poisson; *Mémoires de l'Institut*, année 1811, Ire partie, pages 5 et 31.

elle rencontre la surface interne : à cause de la petitesse de SA, on aura

$$SA = Sn.\cos nSA.$$

L'expression de l'attraction devient dès lors

$$2.\rho\frac{SA.\sigma}{\cos nSA};$$

et la composante de cette attraction, suivant la normale, est

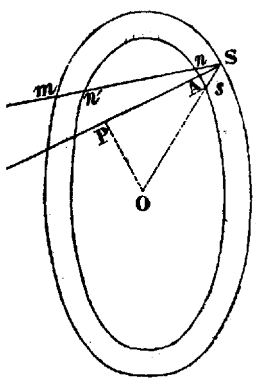
$$2\rho.SA.\sigma.$$

Pour avoir la composante de l'attraction totale de la couche, laquelle sera l'attraction effective, d'après le théorème du n° **10**, il faut prendre l'intégrale de cette expression par rapport à σ, étendue à la demi-sphère; cette intégrale est 2π. On a donc

$$4\pi\rho.SA$$

pour l'attraction totale exercée par la couche sur le point S; SA est l'épaisseur de la couche, ce qui s'accorde avec le théorème général de Laplace.

A cette épaisseur SA nous substituerons une autre expression plus commode.



Du centre O de la couche abaissons la perpendiculaire OP sur la normale SA; on aura, par la comparaison des deux triangles rectangles

SPO, SAs,

$$\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{PS}} = \frac{\mathrm{S}s}{\mathrm{SO}};$$

mais les deux surfaces de la couche étant semblables et semblablement placées, le rapport $\frac{\mathrm{S}s}{\mathrm{SO}}$ est constant, quel que soit le demi-diamètre OS; on a donc, en appelant a_1, b_1, c_1, les demi-diamètres principaux de la surface externe,

$$\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{SP}} = \frac{da_1}{a_1}.$$

L'expression de l'attraction de cette couche prend donc cette forme

$$4\pi\rho.\frac{da_1}{a_1}\,\mathrm{SP}.$$

14. Supposons qu'on ait une seconde couche infiniment mince, comprise, comme la première, entre deux surfaces semblables et semblablement placées, et ayant, respectivement, les mêmes foyers que les deux surfaces externe et interne de la première couche, comme dans le théorème du n° **7**, et supposons cette seconde couche intérieure à la première, pour que le point S soit en dehors. L'attraction exercée par cette seconde couche sur le point S aura la même direction que l'attraction exercée par la première; et ces attractions seront entre elles comme les deux produits abc, $a_1b_1c_1$; a, b, c, étant les trois demi-diamètres principaux de la nouvelle couche. L'attraction exercée par cette couche est donc

$$4\pi\rho\,\frac{da_1}{a_1}\,\frac{abc}{a_1b_1c_1}.\mathrm{SP}.$$

Mais on a, comme nous l'avons dit (n° **5**), $\frac{da_1}{a_1} = \frac{da}{a}$; il vient donc

$$4\pi\rho\,\frac{da}{a}\cdot\frac{abc}{a_1b_1c_1}.\mathrm{SP}.$$

Telle est l'expression de l'attraction qu'une couche ellipsoïdale infiniment mince, comprise entre deux surfaces semblables, concentriques et semblablement placées, exerce sur un point extérieur : a, b, c, sont les demi-diamètres principaux de la surface externe de la couche, et a_1, b_1, c_1, les demi-diamètres principaux d'un ellipsoïde auxiliaire mené par le point attiré et ayant les mêmes foyers que la surface externe de la couche.

15. Maintenant, pour calculer l'attraction d'un ellipsoïde, nous le considérerons comme composé de couches infiniment minces, comprises chacune entre deux surfaces semblables. Nous prendrons les composantes, suivant trois axes fixes, de l'attraction exercée sur le point S par l'une de ces couches; et les intégrales des expressions de ces composantes seront les composantes de l'attraction totale de l'ellipsoïde.

Prenons pour les trois axes fixes les axes principaux de l'ellipsoïde proposé, lesquels seront aussi les axes principaux de chacune des couches élémentaires. Soient x, y, z, les coordonnées du point attiré S, rapportées à ces trois axes. L'attraction exercée sur ce point par une couche dont a, b, c, sont les trois demi-diamètres de la surface externe, est l'expression ci-dessus. Cette attraction est dirigée suivant la normale en S à l'ellipsoïde auxiliaire dont a_1, b_1, c_1, sont les demi-diamètres. Pour avoir ses composantes parallèles aux trois axes coordonnés, il suffit donc de connaître les angles que cette normale fait avec ces axes. Or, le plan tangent à l'ellipsoïde auxiliaire, au point S, rencontre l'axe des x à une distance du centre qui est égale à $\frac{a_1^2}{x}$. La perpendiculaire abaissée du centre sur ce plan tangent est égale à la ligne SP; on a donc, en appelant e l'angle que cette perpendiculaire fait avec l'axe des x,

$$\mathrm{SP} = \frac{a_1^2}{x}\cos e; \quad \text{d'où} \quad \cos e = \frac{\mathrm{SP}.x}{a_1^2}.$$

Par conséquent la composante de l'attraction de la couche sur le point S, parallèle à l'axe des x, est

$$4\pi\rho.\frac{da}{a}.\frac{abc}{a_1b_1c_1}\frac{\overline{\mathrm{SP}}^2}{a_1^2}.x;$$

et la composante de l'attraction de l'ellipsoïde sera l'intégrale de cette expression, prise depuis $a = 0$ jusqu'à $a =$ le demi-axe majeur de l'ellipsoïde.

Or il faut observer qu'il n'y a que a de variable indépendante dans cette expression; car les autres quantités b, c, a_1, b_1, c_1 et SP, dépendent de la valeur de a; il faut donc exprimer toutes ces variables en fonction d'une seule.

Soient A, B, C, les trois demi-diamètres principaux de l'ellipsoïde proposé; la surface externe de la couche qu'on considère étant semblable à cet ellipsoïde, on a

$$b = a\frac{B}{A}, \quad c = a\frac{C}{A}.$$

L'ellipsoïde auxiliaire passe par le point S dont les coordonnées sont x, y, z; on a donc l'équation de condition

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1.$$

Or cet ellipsoïde a ses sections principales décrites des mêmes foyers que celles de la surface externe de la couche; on a donc les deux relations

$$b_1^2 - a_1^2 = b^2 - a^2, \quad c_1^2 - a_1^2 = c^2 - a^2,$$

ou

$$b_1^2 = a_1^2 + a^2\left(\frac{B^2}{A^2} - 1\right), \quad c_1^2 = a_1^2 + a^2\left(\frac{C^2}{A^2} - 1\right);$$

et la condition ci-dessus devient

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_1^2 + a^2\left(\frac{B^2}{A^2} - 1\right)} + \frac{z^2}{a_1^2 + a^2\left(\frac{C^2}{A^2} - 1\right)} = 1.$$

Cette équation établit la relation qui a lieu en a_1 et a.

Enfin la ligne SP est égale à la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en S à l'ellipsoïde auxiliaire; on a donc, comme on sait,

$$\frac{1}{\overline{SP}^2} = \frac{x^2}{a_1^4} + \frac{y^2}{b_1^4} + \frac{z^2}{c_1^4},$$

ou

$$\frac{1}{\overline{SP}^2} = \frac{x^2}{a_1^4} + \frac{y^2}{\left[a_1^2 + a^2\left(\frac{B^2}{A^2} - 1\right)\right]^2} + \frac{z^2}{\left[a_1^2 + a^2\left(\frac{C^2}{A^2} - 1\right)\right]^2}.$$

Ainsi nous connaissons les six relations qui ont lieu entre les sept variables a, b, c, a_1, b_1, c_1, SP.

Pour exprimer toutes ces variables en fonction d'une seule, nous prendrons pour celle-ci le rapport $\frac{a}{a_1}$: faisons donc $\frac{a}{a_1} = u$; la relation ci-dessus, entre a_1 et a, devient, par l'élimination de $a_1 = \frac{a}{u}$,

$$u^2x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{u^2} + \left(\frac{B^2}{A^2} - 1\right)} + \frac{z^2}{\frac{1}{u^2} + \left(\frac{C^2}{A^2} - 1\right)} = a^2.$$

Différentiant par rapport à u et à a, et mettant $\frac{1}{\overline{SP}^2}$ à la place de l'expression qui lui est égale, on a

$$\frac{a^3}{u^3}\frac{1}{\overline{SP}^2}\, du = da; \quad \text{d'où} \quad \frac{\overline{SP}^2}{a_1^2}\cdot\frac{da}{a} = \frac{du}{u}.$$

D'après cela, l'expression de la composante de l'attraction de la couche élémentaire devient

$$4\pi\rho x \cdot \frac{bc}{b_1 c_1}\, du,$$

ou, en mettant à la place de b, c, b_1, c_1, leurs valeurs données cidessus,

$$4\,\pi\rho\, x\, \mathrm{BC}\, \frac{u^2 du}{\sqrt{A^2 + u^2(B^2 - A^2)}\,\sqrt{A^2 + u^2(C^2 - A^2)}}.$$

C'est cette expression qu'il faut intégrer pour avoir la composante de l'attraction de l'ellipsoïde. Les limites de l'intégrale doivent répondre aux valeurs $a = 0$, $a = A$; or on a $u = \frac{a}{a_1}$: elles seront donc $u = 0$ et $u = \frac{A}{A_1}$, A_1 étant le demi-axe majeur de l'ellipsoïde décrit des mêmes foyers que l'ellipsoïde attirant et mené par le point attiré. Ce demi-axe A_1 sera déterminé par l'équation

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_1^2 + (B^2 - A^2)} + \frac{z^2}{A_1^2 + (C^2 - A^2)} = 1.$$

Ainsi la composante, parallèle à l'axe des x, de l'attraction de l'ellipsoïde, supposé homogène, est

$$4\pi\rho x \mathrm{BC}\int_0^{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}_1}} \frac{u^2 du}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + u^2(\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}^2)}\sqrt{\mathrm{A}^2 + u^2(\mathrm{C}^2 - \mathrm{A}^2)}}.$$

La valeur de A_1, d'où dépend la limite de l'intégrale, sera la plus grande racine de l'équation ci-dessus, parce que les deux autres racines seront les demi-axes majeurs des deux hyperboloïdes, à une et à deux nappes, qui passent par le point attiré et qui sont décrits des mêmes foyers que l'ellipsoïde mené par ce point, lesquels demi-axes sont évidemment plus petits que celui de l'ellipsoïde [*].

On aura des expressions semblables à la précédente pour les composantes de l'attraction de l'ellipsoïde, parallèles aux axes des y et des z : je les omets ici pour abréger.

16. Je passe au cas de l'ellipsoïde hétérogène, en supposant que chacune de ses couches élémentaires soit de même densité dans toute son étendue, et que cette densité soit une fonction du demi-axe majeur de la couche divisé par le demi-axe majeur de l'ellipsoïde; de sorte qu'on aura

$$\rho = \mathrm{F}\left(\frac{a}{\mathrm{A}}\right).$$

Or l'équation ci-dessus, d'où dépend la valeur particulière de u correspondante à la couche, donne l'expression suivante du rapport $\frac{a}{\mathrm{A}}$ en fonction de u,

$$\frac{a^2}{\mathrm{A}^2} = u^2\left[\frac{x^2}{\mathrm{A}^2} + \frac{y^2}{\mathrm{A}^2 + u^2(\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}^2)} + \frac{z^2}{\mathrm{A}^2 + u^2(\mathrm{C}^2 + \mathrm{A}^2)}\right];$$

---

[*] Car le plan diamétral qui contient l'axe majeur et l'axe imaginaire de l'hyperboloïde à une nappe, coupe l'ellipsoïde suivant une ellipse et les deux hyperboloïdes suivant deux hyperboles qui ont les mêmes foyers que l'ellipse; conséquemment les axes réels de ces deux courbes sont plus petits que celui de l'ellipse : or ces trois axes sont précisément ceux des trois surfaces; donc, etc.

on aura donc

$$\rho = \mathrm{F}\left\{u\left[\frac{x^2}{\mathrm{A}^2} + \frac{y^2}{\mathrm{A}^2 + u^2(\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}^2)} + \frac{z^2}{\mathrm{A}^2 + u^2(\mathrm{C}^2 - \mathrm{A}^2)}\right]^{\frac{1}{2}}\right\};$$

et la composante de l'attraction de l'ellipsoïde, parallèle à l'axe des x, sera

$$4\pi \mathrm{BC}x \int_0^{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}_1}} \frac{\mathrm{F}\left\{u\left[\frac{x^2}{\mathrm{A}^2} + \frac{y^2}{\mathrm{A}^2 + u^2(\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}^2)} + \frac{z^2}{\mathrm{A}^2 + u^2(\mathrm{C}^2 - \mathrm{A}^2)}\right]^{\frac{1}{2}}\right\} u^2 du}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + u^2(\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}^2)}\sqrt{\mathrm{A}^2 + u^2(\mathrm{C}^2 - \mathrm{A}^2)}}.$$

Si l'on suppose la densité de chaque couche en raison inverse du rapport $\frac{a}{\mathrm{A}}$, hypothèse que plusieurs géomètres ont faite au sujet de la masse de la Terre, cette intégrale s'obtiendra en termes finis. Il en sera de même pour diverses autres suppositions sur la forme de la fonction F.

17. On voit que l'intégrale ne contenant le coefficient A_1 que dans la limite supérieure, et non dans la partie à intégrer, on aura immédiatement la formule relative à l'attraction d'une couche d'une épaisseur finie, comprise entre deux ellipsoïdes semblables et semblablement placés. Cette formule sera

$$4\pi \mathrm{BC}x \int_{\frac{a}{a_1}}^{\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}_1}} \frac{\mathrm{F}\left\{u\left[\frac{x^2}{\mathrm{A}^2} + \frac{y^2}{\mathrm{A}^2 + u^2(\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}^2)} + \frac{z^2}{\mathrm{A}^2 + u^2(\mathrm{C}^2 - \mathrm{A}^2)}\right]^{\frac{1}{2}}\right\} u^2 du}{\sqrt{\mathrm{A}^2 + u^2(\mathrm{B}^2 - \mathrm{A}^2)}\sqrt{\mathrm{A}^2 + u^2(\mathrm{C}^2 - \mathrm{A}^2)}}.$$

A_1 et a_1 sont les demi-axes majeurs des deux ellipsoïdes menés par le point attiré, dont le premier a les mêmes foyers que la surface externe de la couche, et dont le deuxième a les mêmes foyers que sa surface interne, celle-ci ayant son demi-axe majeur égal à a.

Pour donner à cette formule la forme sous laquelle on présente ordinairement l'attraction d'un ellipsoïde homogène, où le coefficient A_1 entre dans l'expression à intégrer, on fera $u = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}_1} v$, et il viendra

$$4\pi\frac{ABC}{A_1}x\int_{\frac{a}{a_1}\frac{A_1}{A}}^{1}\frac{F\left\{v\left[\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_1^2+v^2(B^2-A^2)}+\frac{z^2}{A_1^2+v^2(C^2-A^2)}\right]^{\frac{1}{2}}\right\}v^2dv}{\sqrt{A_1^2+v^2(B^2-A^2)}\sqrt{A_1^2+v^2(C^2-A^2)}}.$$

Dans mon premier Mémoire je suis entré dans d'autres détails qu'il est inutile de reproduire ici, la question de l'attraction d'un ellipsoïde hétérogène sur un point extérieur se trouvant résolue complétement.

NOTES.

NOTE PREMIÈRE.

Soient les équations des deux ellipsoïdes

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1$$

Soient x, y, z, et ξ, η, ζ, les coordonnées des deux points m et S, situés sur le premier ellipsoïde, et x', y', z', et ξ', η', ζ', celles des deux points *correspondants* m et S′ du second ellipsoïde, on aura

$$\frac{x}{x'}=\frac{a}{a'},\quad \frac{y}{y'}=\frac{b}{b'},\quad \frac{z}{z'}=\frac{c}{c'},$$
$$\frac{\xi}{\xi'}=\frac{a}{a'},\quad \frac{\eta}{\eta'}=\frac{b}{b'},\quad \frac{\zeta}{\zeta'}=\frac{c}{c'}.$$

Il faut prouver que $Sm'=S'm$.

Or on a

$$\overline{Sm'}^2=(\xi-x')^2+(\eta-y')^2+(\zeta-z')^2,$$
$$\overline{S'm}^2=(\xi'-x)^2+(\eta'-y)^2+(\zeta'-z)^2;$$

ou

$$\overline{Sm'}^2=\left(\xi-x\frac{a'}{a}\right)^2+\left(\eta-y\frac{b'}{b}\right)^2+\left(\zeta-z\frac{c'}{c}\right)^2,$$
$$\overline{S'm}^2=\left(\xi\frac{a'}{a}-x\right)^2+\left(\eta\frac{b'}{b}-y\right)^2+\left(\zeta\frac{c'}{c}-z\right)^2;$$

d'où

$$\overline{Sm'}^2-\overline{S'm}^2=\left(\frac{\xi^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2}\right)(a^2-a'^2)+\left(\frac{\eta^2}{b^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)(b^2-b'^2)+\left(\frac{\zeta^2}{c^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)(c^2-c'^2).$$

Mais on a

$$a^2-a'^2=b^2-b'^2=c^2-c'^2;$$

donc

$$\overline{Sm'}^2-\overline{S'm}^2=(a^2-a'^2)\left[\left(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}\right)-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\right].$$

Les deux points S et m étant situés sur la surface du premier ellipsoïde, on a

$$\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Donc

$$\overline{Sm'}^2-\overline{Sm}^2=0,$$

et

$$Sm' = S'm.$$

Ce qu'il fallait démontrer.

Autrement. Les relations entre les coordonnées des quatre points m, m', S et S', donnent

$$x'\xi = x\xi', \quad y'\eta = y\eta', \quad z'\zeta = z\zeta',$$

donc

$$x'\xi + y'\eta + z'\zeta = x\xi' + y\eta' + z\zeta';$$

ou, en appelant O le centre commun des deux ellipsoïdes,

$$OS.Om'.\cos SOm' = OS'.Om.\cos S'Om,$$

ou

$$\frac{Om.\cos mOS'}{Om'.\cos m'OS}=\frac{OS}{OS'}.$$

Le second membre est constant, quels que soient les deux points *correspondants* m, m'. Cette équation exprime donc une propriété générale de deux points correspondants quelconques S, S', sur les deux surfaces.

On a

$$\overline{Om}^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$
$$\overline{Om'}^2 = x^2\frac{a'^2}{a^2}+y^2\frac{b'^2}{b^2}+z^2\frac{c'^2}{c^2};$$

d'où

$$\overline{Om}^2-\overline{Om'}^2=\frac{x^2}{a^2}(a^2-a'^2)+\frac{y^2}{b^2}(b^2-b'^2)+\frac{z^2}{c^2}(c^2-c'^2),$$

ou

$$\overline{Om}^2-\overline{Om'}^2=\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)(a^2-a'^2)=a^2-a'^2.$$

C'est-à-dire que : *la différence des carrés de deux demi-diamètres correspondants est constante.*

On a dans les deux triangles SOm', S'Om,

$$\overline{Sm'}^2 = \overline{OS}^2+\overline{Om'}^2 - 2.OS.Om'\cos SOm',$$
$$\overline{S'm} = \overline{OS'}^2+\overline{Om}^2 - 2.OS'.Om.\cos S'Om;$$

d'où

$$\overline{Sm'}^2 - \overline{S'm}^2 = \left(\overline{OS}^2 - \overline{OS'}^2\right) - \left(\overline{Om}^2 - \overline{Om'}^2\right) - 2(OS.Om'\cos SOm' - OS'Om\cos S'Om).$$

Le second membre, d'après les deux propositions qui viennent d'être démontrées, est identiquement nul; on a donc

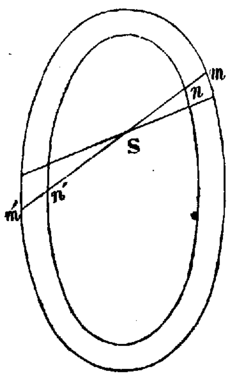
$$Sm' = S'm. \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Cette démonstration est peut-être un peu moins directe que la première, mais elle a l'avantage de faire connaître, en passant, deux propriétés générales des ellipsoïdes décrits des mêmes foyers.

NOTE DEUXIÈME.

Voici la démonstration du théorème de Newton :

Concevons un cône d'une ouverture infiniment petite, ayant son sommet au point attiré S. Il interceptera dans la couche ellipsoïdale deux portions de volume v, v', en m et m', où l'une de ses arètes rencontre la surface externe de la couche. Soient n et n' les points où cette même arète rencontre la surface interne. Concevons deux sphères décrites du point S comme centre avec les rayons Sm, Sn : le volume intercepté en m, par le petit cône, dans la couche formée par ces deux sphères, différera infiniment peu du volume v, et pourra être pris pour celui-ci. Appelons σ la surface que le petit cône intercepterait sur une surface sphérique décrite de son sommet comme centre, avec un rayon égal à l'unité, les surfaces qu'il intercepte sur les deux premières sphères seront égales respectivement à $\sigma\overline{Sm}^2$ et $\sigma\overline{Sn}^2$. Le volume compris dans le cône, entre ces deux surfaces, aura donc pour expression



$$\tfrac{1}{3}\left(\overline{Sm}^3 - \overline{Sn}^3\right)\sigma = \tfrac{1}{3}\sigma\left[\overline{Sm}^3 - (Sm - mn)^3\right] = \overline{Sm}^2.mn.\sigma,$$

en négligeant les infiniment petits du deuxième et du troisième ordre. Ainsi l'on a

$$v = \overline{Sm}^2.mn.\sigma.$$

L'attraction exercée par ce volume sur le point S a donc pour expression

$$\frac{v}{\overline{Sm}^2} = mn.\sigma.$$

L'attraction exercée sur le point S par le second volume v' a de même pour expression

$$\frac{v'}{\overline{Sm'}^2} = m'n'.\sigma.$$

Or les deux ellipsoïdes étant semblables, concentriques et semblablement placés, les deux lignes mn, $m'n'$, comprises sur une même sécante, sont égales. Les attractions exercées sur le point S par les deux volumes v, v', sont donc égales. Mais elles sont dirigées en sens contraire; elles se détruisent donc, c'est-à-dire que les deux volumes compris dans le petit cône n'exercent aucune action sur le point S. D'où l'on conclut que la couche entière comprise entre les deux ellipsoïdes n'exerce aucune attraction sur un point situé dans l'intérieur de sa paroi interne. C'est le théorème de Newton.

NOTE TROISIÈME.

On peut démontrer directement, sans s'appuyer sur le théorème de Newton, que l'expression $\sum \frac{dv}{mS'}$ est constante pour toutes les positions du point S' dans l'intérieur de la paroi interne de la couche.

Pour cela, concevons le petit cône, comme dans la Note précédente : on aura

$$\frac{dv}{\overline{S'm}^2} = \frac{dv'}{\overline{S'm'}^2}.$$

Mais si l'on suppose que le point S' soit déplacé et transporté dans une position infiniment voisine de S', on aura

$$d.S'm = - d\,S'm',$$

parce que chacune de ces deux expressions est la projection orthogonale, sur la corde mm', de l'élément rectiligne décrit par le point S', cette projection devant être prise avec le signe + dans un cas, et le signe — dans l'autre.

On a donc

$$d.\frac{dv}{S'm} + d.\frac{dv'}{S'm'} = 0,$$

ou

$$d\left(\frac{dv}{S'm} + \frac{dv'}{S'm'}\right) = 0.$$

Et conséquemment

$$d.\sum \frac{dv}{S'm} = 0, \quad \text{et} \quad \sum \frac{dv}{S'm} = \textit{constante}. \quad \text{C. Q. F. D.}$$