

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

E. CATALAN

**Addition à la note sur une équation aux différences finies,
insérée dans le volume précédent, page 508**

Journal de mathématiques pures et appliquées 1^{re} série, tome 4 (1839), p. 95-99.

http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4_95_0

 gallica

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>

et catalogué par Mathdoc
dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
<http://www.numdam.org/journals/JMPA>

Addition à la note sur une équation aux différences finies, insérée dans le volume précédent, page 508.

PAR E. CATALAN (*).

VIII.

Si l'on désigne par $C_{2n,n}$ le nombre des combinaisons de $2n$ lettres, prises n à n , on aura

$$C_{2n,n} + C_{2n-2,n-1} \times C_{2,1} + C_{2n-4,n-2} \times C_{4,2} + \dots + C_{2n,n} = 2^{2n}. \quad (30)$$

Pour démontrer ce théorème, je considère l'équation

$$P_n + P_{n-1}P_1 + P_{n-2}P_2 + \dots + P_1P_{n-1} + P_n = a^n; \quad (31)$$

dans laquelle a est une constante donnée, et P_n une fonction inconnue du nombre entier n , assujettie seulement à cette condition, que $P_0 = 1$.

Conformément à la méthode très élégante employée par M. Binet dans un cas semblable (voyez page 82), je prends la fonction génératrice de P_n , savoir

$$Z = 1 + P_1z + P_2z^2 + \dots + P_nz^n + \dots, \quad (32)$$

z étant une indéterminée.

En élevant au carré, il vient en vertu de l'équation (31),

$$Z^2 = 1 + az + a^2z^2 + a^3z^3 + \dots + a^n z^n + \dots \quad (33)$$

Or, quel que soit a , on peut toujours supposer z assez petite, pour

(*) On continuera dans cette *Addition* l'ordre des n^{os} de la note citée.

que la série qui forme le second membre soit convergente, et égale à $\frac{1}{1-az}$. Alors nous aurons

$$Z = (1 - az)^{-\frac{1}{2}};$$

ou, en développant

$$Z = 1 + \frac{1}{2}az + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}a^2z^2 + \dots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot a^n z^n + \dots \quad (35)$$

Le coefficient de z^n peut facilement se mettre sous la forme,

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots 2n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left(\frac{a}{4}\right)^n = \left(\frac{a}{4}\right)^n \cdot C_{2n, n}.$$

On a donc, en comparant les équations (32) et (35):

$$P_n = \left(\frac{a}{4}\right)^n \cdot C_{2n, n}. \quad (36)$$

Ce qui démontre le théorème énoncé.

IX.

On a $C_{2n, n} = \frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1) \cdot \Gamma(n+1)}$: l'équation (30) peut par conséquent se mettre sous la forme

$$\sum_0^n \frac{\Gamma(2n-2i+1)}{\Gamma(n-i+1) \cdot \Gamma(n-i+1)} \cdot \frac{\Gamma(2i+1)}{\Gamma(i+1) \cdot \Gamma(i+1)} = 2^{2n}, \quad (37)$$

ou bien

$$\sum_0^n \frac{\Gamma(2n-2i)}{\Gamma(n-i) \cdot \Gamma(n-i+1)} \cdot \frac{\Gamma(2i)}{\Gamma(i) \Gamma(i+1)} = 2^{2n-1}.$$

Cette dernière équation se transforme facilement en

$$\sum_0^n \frac{\Gamma(n-i+\frac{1}{2})}{\Gamma(n-i+1)} \cdot \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+1)} = \pi. \quad (38)$$

On obtient ainsi une propriété des fonctions Γ , analogue à celle exprimée par l'équation (20).

X.

Prenons les deux identités :

$$\int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta - \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta = \int_0^1 \theta^{n-i+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta,$$

$$\int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta - \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta = \int_0^1 \theta^{i+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta.$$

En les multipliant membre à membre, donnant à i les valeurs 0, 1, 2, ... n , et ajoutant, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} & \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \\ & - \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \\ & - \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \\ & + \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \\ & = \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta. \end{aligned}$$

Le second produit et le troisième deviennent identiques, quand on change i en $n-i$: les sommes de ces produits, prises de $i=0$ à $i=n$ seront donc égales, et nous pourrions écrire en les confondant en une seule que nous doublerons :

$$\begin{aligned} & \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \\ & - 2 \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \\ & + \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \\ & = \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i+\frac{1}{2}}(1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta. \end{aligned}$$

Or, l'équation (38), ainsi qu'on le voit aisément, équivaut à celle-ci :

$$\sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta = \pi^n. \quad (39)$$

D'un autre côté, l'équation (17) donne

$$\sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta = 2\pi \int_0^1 \theta^{n+\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta;$$

l'équation ci-dessus devient alors

$$\begin{aligned} \pi^n + 2\pi \int_0^1 \theta^{n+\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta - 2 \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \dots \\ \dots \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta = \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i+\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i+\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta. \end{aligned}$$

Le second membre peut s'écrire

$$\begin{aligned} & \sum_0^n \int_0^1 \theta^{(n+2)-(i+1)-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{(i+1)-\frac{1}{2}} d\theta \\ &= \sum_1^{n'+1} \int_0^1 \theta^{n'-i'-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i'-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \\ &= \sum_0^{n'} \int_0^1 \theta^{n'-i'-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i'-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \\ &= 2 \int_0^1 \theta^{n'-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta, \end{aligned}$$

en posant

$$n+2 = n', \quad i+1 = i'.$$

La première partie du nouveau second membre est égale à π^n , en vertu de (39); donc

$$\begin{aligned} & \sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \\ &= \pi \int_0^1 \theta^{n+\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta + \pi \int_0^1 \theta^{n+\frac{3}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta, \end{aligned}$$

à cause de

$$\int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1)} = \pi.$$

Enfin, en remplaçant

$$\int_0^1 \theta^{n+\frac{3}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta \text{ par } \int_0^1 \theta^{n+\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta - \int_0^1 \theta^{n+\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta,$$

il vient

$$\sum_0^n \int_0^1 \theta^{n-i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{\frac{1}{2}} d\theta \times \int_0^1 \theta^{i-\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta = \pi \int_0^1 \theta^{n+\frac{1}{2}} (1-\theta)^{-\frac{1}{2}} d\theta, \quad (40)$$

ou bien,

$$\sum_0^n \frac{\Gamma(n-i+\frac{1}{2})}{\Gamma(n-i+2)} \cdot \frac{\Gamma(i+\frac{1}{2})}{\Gamma(i+1)} = 2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma(n+\frac{3}{2})}{\Gamma(n+2)}, \quad (41)$$

ou encore

$$\sum_0^n \frac{1.3.5\dots(2n-2i-1)}{1.2.3\dots(n-i+1)} \cdot \frac{1.3.5\dots(2i-1)}{1.2.3\dots i} = \frac{1.3.5\dots(2n+1)}{1.2.3\dots(n+1)}; \quad (42)$$

la quantité sous le signe Σ doit être réduite à son second ou à son premier facteur, suivant que i égale 0 ou n .

(Novembre 1838.)