JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

CH.-IGN. GIULIO

Sur le centre de gravité d'une portion quelconque de surface sphérique, et de quelques autres surfaces

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 386-389.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__386_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

Sur le centre de gravité d'une portion quelconque de surface sphérique, et de quelques autres surfaces;

PAR CH.-IGN. GIULIO,

Professeur à l'Université de Turin.

I. Une surface étant rapportée à trois plans rectangulaires de coordonnées x, y, z, le centre de gravité d'une portion quelconque de la surface se trouve à une hauteur Z au-dessus du plan des x et des y, dont l'expression générale est

$$Z = \frac{\iint z \cdot dx \cdot dy \cdot \sqrt{1+p^2+q^2}}{\iint dx \cdot dy \cdot \sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad (a)$$

en écrivant, pour abréger, p et q au lieu de $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ et de $\left(\frac{dz}{dy}\right)$, et en étendant les intégrations à tous les points de la portion donnée de surface. Si celle-ci appartient à une sphère de rayon égal à l'unité et ayant son centre à l'origine des coordonnées, on aura $p = -\frac{x}{z}$, $q = -\frac{y}{z}$, et par suite

$$Z = \frac{\iint dx\, dy}{\iint dx \cdot dy \cdot \sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Or, il est évident qu'entre les limites données le dénominateur de cette valeur de Z exprime l'aire de la portion donnée de surface, tandis que le numérateur exprime l'aire de la projection de cette même portion, faite sur le plan des x et des y. Ainsi :

« La hauteur du centre de gravité d'une portion quelconque de
» la surface d'une sphère, au-dessus du plan d'un de ses grands cer-
» cles, est quatrième proportionnelle après l'aire de la portion
» même, celle de sa projection sur ce plan, et le rayon. »

L'analogie est évidente entre cette proposition et celle qui détermine la position du centre de gravité d'un arc de cercle ou d'un segment de la surface d'un cylindre droit; ce qui tient à ce que la propriété exprimée par l'équation aux différences partielles..... $z\sqrt{1+p^2+q^2}=1$ n'est point particulière à la sphère, et appartient tout aussi bien au cylindre et à la classe entière des surfaces engendrées par le mouvement d'une sphère de rayon égal à l'unité, et dont le centre décrit une courbe plane tracée arbitrairement dans le plan des x et des y. On étendra donc la proposition précédente à toutes ces surfaces en l'énonçant ainsi :

« Sur une surface quelconque, engendrée par le mouvement d'une » sphère dont le centre ne quitte point un plan donné, soit tracé » un périmètre quelconque fermé, qui embrasse la portion S de » surface, et soit A la projection de S sur le plan donné; la hauteur » du centre de gravité de S au-dessus de ce plan sera quatrième » proportionnelle après S, A, et le rayon de la sphère génératrice. »

En appliquant cette proposition aux surfaces des *voûtes d'arète* et des *voûtes en arc de cloître* de plein cintre sur base carrée, on voit que le centre de gravité des premières est à la moitié de la hauteur, et celui des secondes aux sept onzièmes environ.

II. Dans tout triangle sphérique, en nommant a, b, c les côtés opposés aux angles A, B, C, les distances du centre de gravité du triangle à chacun des plans des côtés a, b, c, sont

$$Z_a=\frac{1}{2}\cdot\frac{a-b\cos C-c\cos B}{A+B+C-180},\quad Z_b=\frac{1}{2}\cdot\frac{b-c\cos A-a\cos C}{A+B+C-180},\quad Z_c=\frac{1}{2}\cdot\frac{c-a\cos B-b\cos A}{A+B+C-180},$$

les côtés et les angles étant exprimés en degrés. En effet,..... $\frac{\pi}{180}(A+B+C-180)$ est l'aire du triangle, et celle de sa projection sur le plan du côté c, par exemple, est égale au secteur $\frac{\pi c}{360}$ construit sur l'angle au centre C, moins les projections des deux secteurs $\frac{\pi a}{360}$, $\frac{\pi b}{360}$, dont les plans font les angles B et A avec celui du premier secteur, sur lequel on les projette.

On peut aussi déterminer la position du centre de gravité d'un triangle sphérique, moyennant ses distances aux plans des grands cercles perpendiculaires aux arètes de la pyramide sphérique correspondante. Si l'on nomme D_A, D_B, D_C, ces distances, on trouve

$$D_A = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sin B\sin c}{A+B+C-180}, \quad D_B = \frac{1}{2}\cdot\frac{b.\sin C\sin a}{A+B+C-180}, \quad D_C = \frac{1}{2}\cdot\frac{c.\sin A\sin b}{A+B+C-180},$$

en observant que la projection du triangle sur le plan du grand cercle perpendiculaire au rayon conduit au sommet de l'angle A, est identiquement la même que la projection faite sur le même plan, du secteur compris entre le côté a du triangle et les deux rayons conduits à ses deux extrémités; or, le plan de ce secteur fait avec celui de projection un angle dont le cosinus est égal à $\sin B \sin c$.

Enfin, si l'on veut fixer la position du centre de gravité du triangle au moyen de trois coordonnées rectangulaires x, y, z, on prendra le plan du côté c pour plan des x et des y, et le rayon conduit au sommet de l'angle A pour axe des x, et l'on aura d'abord, d'après ce qui précède,

$$x = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sin B\sin c}{A+B+C-180}, \quad z = \frac{c - b\cos A - a\cos B}{A+B+C-180};$$

on trouvera ensuite sans peine, $y = \frac{1}{2}\cdot\frac{b\sin A - a\sin B.\cos c}{A+B+C-180}$.

Pour un triangle rectangle en A ces formules donnent

$$x = \frac{1}{2}\cdot\frac{a\sin B\sin c}{B+C-90}, \quad y = \frac{1}{2}\cdot\frac{b - a\cos C}{B+C-90}, \quad z = \frac{1}{2}\cdot\frac{c - a\cos B}{B+C-90}.$$

Si le triangle était isoscèle, en supposant que les côtés égaux soient a et b, on prendrait le plan du côté inégal c pour plan des x, y, et le rayon qui divise ce même côté en parties égales pour axe des x, et l'on aurait

$$x = \frac{a\sin A.\sin\frac{1}{2}c}{A+B+C-180}, \quad y = 0, \quad z = \frac{1}{2}\,\frac{c - 2a\cos A}{A+B+C-180};$$

enfin dans le triangle birectangle il viendra

$$x = \frac{90.\sin\frac{1}{2}c}{C}, \quad y = 0, \quad z = \frac{1}{2}.$$

III. La formule générale (a) nous fournit la proposition suivante :

« Sur la surface [A], engendrée par la révolution de la courbe » d'équilibre d'une chaînette homogène autour de la verticale qui » passe par son point le plus bas, traçons arbitrairement un périmètre » fermé qui embrasse la portion S de surface; projetons ce périmètre » sur un plan horizontal qui coupe l'axe de révolution en un point » situé au-dessous de la surface, et à une distance c de son point le » plus bas égale à la tension horizontale de la chaînette, divisée par » le poids de l'unité de longueur de la chaînette même; soit V le » volume compris entre la surface S, sa projection, et la surface » cylindrique formée par l'ensemble des perpendiculaires abaissées » du périmètre de S sur le plan de projection. La hauteur du centre » de gravité de S au-dessus de ce plan sera double de celle du centre » de gravité de V. »

En effet, le plan tangent à la surface [A] en un point situé à la hauteur z au-dessus du plan de projection, que nous prendrons pour plan des x et des y, fait avec celui-ci un angle dont le cosinus est $\frac{c}{z}$, ce qui donne l'équation $\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{z}{c}$; et partant la valeur (a) de Z devient

$$Z=\frac{\int\int .z^2.dx.dy}{\int\int z.dx.dy}.$$

Mais en nommant Z_1 la hauteur du centre de gravité de V au-dessus du même plan, on a $Z_1=\frac{\int\int .\frac{1}{2}z.z\,dx\,dy}{\int\int .z.dx.dy}$, et les limites des intégrations étant les mêmes dans les valeurs de Z et de Z_1, on en conclura $Z=2Z_1$.

La propriété exprimée par l'équation aux différences partielles $\sqrt{1+p^2+q^2}=\frac{z}{c}$ étant commune à toutes les surfaces engendrées par la surface [A] lorsqu'elle se meut de manière que son axe demeure toujours vertical, et qu'un de ses points décrit une courbe plane tracée arbitrairement sur un plan horizontal, la proposition que l'on vient de démontrer est susceptible de la même extension que celle du § I.