JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

TERQUEM

Sur une propriété des surfaces du second degré

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 4 (1839), p. 241-242.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1839_1_4__241_0>

Sur une propriété des surfaces du second degré;

PAR M. TERQUEM.

THÉORÈME. Dans une surface du second degré, le lieu géométrique des points pour lesquels la somme des carrés des normales à la surface est une quantité constante, est une surface du second degré concentrique à la surface donnée, et ayant les mêmes axes principaux, en direction.

Démonstration. Soit, pour abréger le calcul, l'équation de la surface donnée, rapportée au centre

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + E = 0: \qquad (1)$$

supposons les axes rectangulaires, et soient a, b, c les coordonnées d'un point, et x', y', z', les coordonnées du point de rencontre de la surface avec la normale passant par le point a, b, c; on a les relations connues

$$\left.\begin{array}{l} x'z'(A''-A) - aA''z' + cAx' = 0, \\ y'z'(A''-A) - bA''z' + cA'y' = 0, \end{array}\right\} \qquad (2)$$

les trois équations (1) et (2) donnent

$$\begin{array}{l} z'^6 + 2p''cz'^5 + z'^4(n''b^2 + m''a^2 + q'') + \text{etc.} = 0, \\ y'^6 + 2p'by'^5 + y'^4(n'c^2 + m'a^2 + q') + \text{etc.} = 0, \\ x'^6 + 2pbx'^5 + x'^4(nc^2 + mb^2 + q) + \text{etc.} = 0, \end{array}$$

$$p'' = \frac{A}{A''-A} + \frac{A'}{A''-A'}, \quad p' = \frac{A}{A'-A} + \frac{A''}{A'-A''}; \quad p = \frac{A}{A-A'} + \frac{A''}{A-A};$$

$$m'' = \frac{AA''}{(A-A'')^2}; \quad m = m' = \frac{AA'}{(A-A')^2}; \quad n = \frac{AA''}{(A-A')^2}; \quad n' = n'' = \frac{A'A''}{(A'-A'')^2};$$

$$q'' = \frac{E}{A''}, \quad q' = \frac{E}{A'}, \quad q = \frac{E}{A}.$$

La somme des six valeurs de $z'^2 = 4p''^2c^2 - 2n''b^2 - 2m''a^2 - 2q''$,

id. $y'^2 = 4p'^2b^2 - 2n'c^2 - 2m'a^2 - 2q'$,

id. $z'^2 = 4p^2a^2 - 2nc^2 - 2mb^2 - 2q$;

la somme des six valeurs de $-2ax - 2by - 2cz = 4c^2p'' + 4b^2p' + 4a^2p$.

Le carré de la normale est $(x'-a) + (y'-b)^2 + (z'-c)^2$; désignant par $2R^2$ la somme des six valeurs de ce carré, on obtient, toute réduction faite

$$\begin{aligned} a^2[2p^2 + 2p - (m' - m'') + 3] - q - q' - q'' = R^2, \\ + b^2[2p'^2 + 2p' - (m' + n'') + 3], \\ + c^2[2p^2 + 2p - (m'' + n'') + 3]; \end{aligned} \qquad (3)$$

R étant une quantité constante, etc. C. Q. F. D.

Exemple. Soit l'ellipsoïde

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = a^2b^2c^2,$$

l'équation (3) devient

$$\left.\begin{aligned} b^4c^4x^2[a^4 + b^4 + c^4 - a^2(b^2 + c^2)] \\ a^4c^4y^2[a^4 + b^4 + c^4 - b^2(a^2 + c^2)] \\ + a^4b^4z^2[a^4 + b^4 + c^4 - c^2(a^2 + b^2)] \end{aligned}\right\} = a^4b^4c^4(R^2 - a^2 - b^2 - c^2):$$

la marche du calcul est la même, pour les surfaces privées de centre.

Observation. Dans les lignes du second degré, le lieu géométrique est une ligne semblable et semblablement placée.