JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

G. CORIOLIS

Note sur un moyen de tracer des courbes données par des équations différentielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 1 (1836), p. 5-9.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1__5_0>

NOTE

Sur un moyen de tracer des courbes données par des équations différentielles ;

Par G. CORIOLIS.

Si l'on conçoit qu'un fil tendu s'enroule sur un cylindre, et que le frottement y soit assez fort pour empêcher ce fil de glisser le long de la surface contre laquelle il s'est enroulé, la courbe formée par le fil sur la surface du cylindre, développée ensuite sur un plan, jouira de la propriété que la direction de sa tangente sera toujours celle de la partie du fil tendue en ligne droite avant qu'elle s'enroule.

Si donc on peut donner au fil, dans cette partie, une direction qui résulte de l'équation différentielle d'une courbe, celle-ci se trouvera tracée sur le cylindre en prenant pour abscisses les arcs comptés sur la base du cylindre.

Cette considération conduit à un tracé assez simple de plusieurs courbes.

On voit de suite que l'exponentielle dont l'équation est

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{a}, \quad \text{ou } y\,\frac{dx}{dy} = a,$$

peut se décrire en enroulant sur un cylindre un fil tendu qui passe toujours par un point fixe. Ce point doit être à la distance a de la génératrice du cylindre qui se trouve dans le plan tangent mené par ce point.

J'ai fait construire, d'après cette remarque, une machine au moyen de laquelle un fil tendu par un léger poids s'enroule ou se déroule autour d'un cylindre en passant par un petit trou percé dans une plaque mobile qu'on approche ou qu'on écarte à volonté du cylindre. Une aiguille et un cadran indiquent les tours et fractions de tours dont on a tourné le cylindre. Ce sont ces quantités qui représentent les exposants. Une échelle placée contre la génératrice du cylindre, sur laquelle se trouve toujours le point où le fil s'en sépare, indique, à partir du zéro de l'échelle, les exponentielles qui répondent aux exposants indiqués sur le cadran. On conçoit comment cette machine opère facilement tous les calculs d'intérêts composés. La marche de l'aiguille répond aux durées des placemens, et les nombres qu'on lit sur l'échelle, au point où le fil se sépare du cylindre, indiquent ce que sont devenues les sommes placées, ou ce qu'elles doivent être pour l'escompte (1).

La chaînette, dont l'équation différentielle est

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y^2}{a^2} - 1},$$

ou bien

$$\frac{y}{\sqrt{1 + y'^2}} = a,$$

se décrira d'une manière analogue à la logarithmique. Il suffira de placer dans un plan tangent au cylindre une poulie dont le centre soit sur la génératrice de contact et dont a soit le rayon. En faisant dérouler sur cette poulie le fil qui s'enroule sur le cylindre, il s'y pliera suivant une chaînette.

Si l'on avait l'équation différentielle

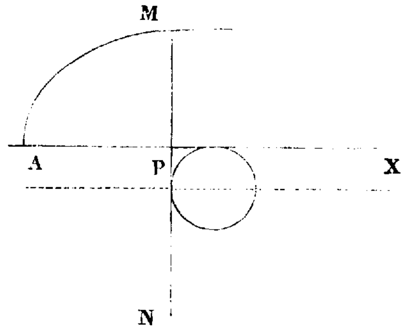
$$\frac{dy}{dx} = yf(x),$$

ou bien, en posant $\frac{1}{f(x)} = \varphi(x)$,

$$y\frac{dx}{dy} = \varphi(x),$$

(1) Le modèle de cette machine fait partie de la collection de l'École Polytechnique.

on décrirait encore assez facilement la courbe qui répond à cette équation au moyen du relief de la courbe dont l'ordonnée est $\varphi(x)$.



Pour cela, il suffirait d'avoir d'abord une règle AMX dont un côté AX serait droit et l'autre AM formerait la courbe dont $\varphi(x) - r$ serait l'ordonnée, r étant le rayon du cylindre. Ensuite, on ferait tourner le cylindre en appliquant contre sa base la règle AX. Si le fil qui s'enroule reste dans le plan vertical PM, ce qui est facile à obtenir en l'appliquant contre un plan fixe, et qu'il passe ainsi sur la courbe AM en M, il est clair qu'il formera sur le cylindre une courbe telle qu'en se déroulant sur un plan elle satisferait à l'équation différentielle ci-dessus, puisque la sous-tangente PM serait égale à $\varphi(x)$, x étant l'abscisse mesurée sur la base circulaire du cylindre.

Il ne serait pas impossible non plus de décrire les courbes données en général par l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Pour cela, on concevrait d'abord une surface exécutée en relief ayant pour ordonnée

$$\frac{y}{f(x, y)}.$$

Ce relief tiendrait à une règle AX, comme tout à l'heure la courbe AM; mais il n'y serait fixé que dans le sens des x; dans celui de l'axe des y, que je suppose ici vertical, c'est-à-dire parallèle à l'axe du cylindre, il serait parfaitement libre de monter et de descendre. Le mécanisme, pour cela, peut se disposer de plusieurs manières très faciles à exécuter.

Pendant qu'on tournerait le cylindre, en faisant avancer la règle qui tient au relief dans le sens de l'axe des x, et en la pressant contre la base du cylindre, on aurait soin de tenir le relief à la main à une hauteur telle que l'axe des x fût toujours à la hauteur du point où le fil quitte le cylindre, c'est-à-dire du point décrivant la courbe en question. Alors, si le fil tendu, en quittant le cylindre, va passer par le point où la surface du relief est rencontrée par une perpendiculaire fixe PM; la courbe suivant laquelle il se pliera sur le cylindre, en la rapportant aux arcs de cercle pour abscisses, aura effectivement pour équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y);$$

car la sous-tangente sera toujours

$$y \cdot \frac{dx}{dy} = \frac{y}{f(x,y)}.$$

On devra placer le solide du relief au dehors de l'espace APM, et faire passer le fil à l'extrémité d'une tige PM, qui, par l'action d'un poids ou d'un petit ressort de pression, sera forcé d'appuyer en M contre le relief.

On peut s'arranger facilement pour que le petit poids p qui tiendra le fil tendu serve en même temps à appliquer la tige PM contre la surface. Il suffira de conduire d'abord le fil à travers un très petit trou percé à l'extrémité M de la tige, puis de le renvoyer horizontalement à l'autre extrémité N, où il passera sur une poulie tenant à cette même tige, pour revenir passer sur une autre poulie fixe en-dessous de P et tout auprès, et pour soutenir le poids p; celui-ci tirera la tige de N en M avec la force $2p$, et de M en N avec la force plus petite

$$p(1 + \cos\alpha),$$

α étant ici l'angle dont la tangente $= \frac{dy}{dx}$. La tige sera donc toujours pressée contre le relief.

Pour que ce moyen de description de courbe soit praticable, il faut que le fil une fois appliqué sur le cylindre, ne s'y dérange pas par l'effet de la flexion qu'il y prend. Il y a pour cela une relation nécessaire entre le rayon r du cylindre et la nature de la courbe représentée par l'équation

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y).$$

Soient M un point quelconque, MM' un élément, et ρ le rayon de courbure en M de la courbe AMB formée par le fil enroulé sur le cylindre. Deux tensions contraires sollicitent l'élément MM' à ses deux bouts : ces deux tensions donnent lieu à une résultante dont la direction coïnciderait avec le rayon ρ, si le frottement dans le sens du fil était nul : quelle que soit l'intensité du frottement, la direction de cette résultante sera située dans le plan osculateur de la courbe AMB et fera avec le plan tangent en M au cylindre un certain angle ε. Cela posé, pour que le fil ne glisse pas sur la surface du cylindre, il faudra évidemment que l'on ait

$$\operatorname{tang} \varepsilon > \mu,$$

μ étant le rapport du frottement à la pression. On devra donc choisir le rayon r de manière que l'inégalité $\operatorname{tang} \varepsilon > \mu$ soit toujours satisfaite.