JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JOSEPH LIOUVILLE

Mémoire sur une question d'Analyse aux différences partielles

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 1 (1836), p. 33-74.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1__33_0>

MÉMOIRE

Sur une question d'Analyse aux différences partielles;

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

(Présenté à l'Académie des Sciences le 17 mars 1834.)

I.

La question d'analyse aux différences partielles à laquelle se rapportent les recherches suivantes, peut être utile dans plusieurs théories physiques, et spécialement dans celle de la chaleur. Le titre placé en tête de ce Mémoire montre assez que je veux la considérer sous un point de vue purement mathématique, abstraction faite de ses applications. Néanmoins, il sera bon d'indiquer en peu de mots la nature des problèmes qui m'ont conduit à m'en occuper.

Les lois de la distribution variable ou permanente du calorique dans les substances solides dépendent, comme on sait, d'une équation aux différences partielles qu'il s'agit d'intégrer, et d'une ou de plusieurs conditions particulières relatives, soit à la surface du corps, soit à l'état initial des températures. Ces conditions définies servent à déterminer les quantités arbitraires introduites par l'intégration de l'équation indéfinie. Lorsque le système dans lequel la chaleur se propage est placé dans un milieu de température donnée, l'équation relative à la surface a pour coefficient d'un de ses termes le pouvoir rayonnant; et si l'on veut laisser à la question toute la généralité qu'elle comporte, il faut regarder ce pouvoir rayonnant comme une fonction connue quelconque des coordonnées de chaque point de la surface; car en supposant même qu'il s'agisse d'un corps homogène, la quantité de chaleur émise au dehors par un élément superficiel de grandeur constante, varie, toutes choses égales d'ailleurs, avec le degré de poli ou la coloration de cet élément.

Lorsqu'on étudie, par exemple, le mouvement de la chaleur dans une barre d'un très petit diamètre, le pouvoir rayonnant doit être regardé comme une fonction arbitraire de l'abscisse; et si l'on remplaçait cette fonction arbitraire par une simple constante, on restreindrait beaucoup l'étendue de la solution. Au reste, dans le cas d'une barre très mince, l'introduction d'une fonction arbitraire pour représenter le pouvoir rayonnant et même pour représenter la chaleur spécifique et la conductibilité intérieure, ne complique pas beaucoup les calculs, du moins tant qu'on se borne à établir des formules algébriques, sans essayer de les réduire en nombres. C'est ce que j'ai fait voir dans un Mémoire présenté il y a plusieurs années à l'Académie des Sciences, et ce que M. Sturm a prouvé aussi, à peu près à la même époque, par une marche très différente de celle que j'ai suivie, quoiqu'elle conduise aux mêmes résultats. Mais en général on peut dire que la détermination des lois du mouvement de la chaleur dans un corps solide de forme donnée, se complique beaucoup dès qu'on représente le pouvoir rayonnant h propre à chaque point de la surface de ce corps par une fonction quelconque $f(x)$ de l'abscisse correspondante à ce point. Aussi voyons-nous que jusqu'à ce jour les géomètres ont regardé la lettre h comme exprimant une constante, même dans la théorie des températures terrestres où il serait intéressant d'examiner les effets produits par la variabilité de h.

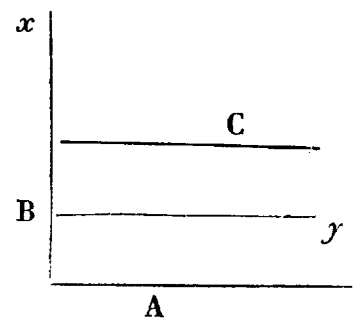
En cherchant à résoudre divers problèmes dans lesquels je regardais la quantité h comme variable, je suis tombé sur la question d'analyse aux différences partielles dont je ferai le sujet de ce Mémoire. Cette question a pour objet de déterminer les coefficiens des termes successifs d'une série de quantités périodiques, au moyen d'une équation de condition à laquelle cette série doit satisfaire entre deux limites données.

Une des équations de condition dont je parle est, par exemple, de la forme :

$$\text{(A)} \qquad \Sigma A_m m \cos mx + f(x)\, \Sigma A_m \cos mx = F(x),$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs de m exprimées par les nombres impairs 1, 3, 5..... L'équation (A) doit subsister pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$: les fonctions $f(x)$ et $F(x)$ sont connues, et il s'agit de déterminer les coefficiens A_1, A_3, A_5,... A_m... Cela serait facile par les méthodes ordinaires si l'on avait $f(x) =$ constante; mais quand $f(x)$ est variable, la chose devient plus délicate.

Il est aisé de trouver dans la Théorie de la Chaleur un problème qui conduise à l'équation (A). Pour cela, généralisons celui que Fourier a résolu dans le chapitre III de son ouvrage. Ce problème a, comme on sait, pour objet d'exprimer le mouvement permanent de la chaleur dans une lame rectangulaire infinie.



Nous supposerons avec l'illustre auteur, que les deux arètes parallèles et infinies A et C qui comprennent le rectangle, sont retenues par une cause quelconque à la température fixe 0°; mais quant à l'arète transversale B, au lieu de la regarder comme entretenue aussi à une température fixe 1°, nous admettrons qu'elle rayonne dans un milieu dont la température est donnée pour chaque point, et nous représenterons son pouvoir émissif par une fonction arbitraire variant d'un point à l'autre de B. La lame étant d'ailleurs homogène, si nous plaçons l'origine des coordonnées au milieu de l'arète B, et si nous comptons les abscisses x le long de cette arète, tandis que les ordonnées y seront comptées dans une direction normale à celle-là, il est visible que la température permanente u qui répond au point M dont les coordonnées sont x et y, sera déterminée par l'équation aux diffé-

5..

rences partielles :

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0.$$

En choisissant l'unité de longueur de telle manière que l'arète B, interceptée entre les faces A et C, soit égale à $\pi = 3,1415\ldots\ldots$, on aura $u=0$ pour $x=\pm\frac{\pi}{2}$, puisque les faces A et C sont entretenues à 0°; à cause de l'action de ces mêmes arètes, la portion du rectangle située à une distance infinie de B doit aussi être à 0°. Ainsi, l'on doit avoir $u=0$ pour $y=+\infty$. Le long de l'arète B, il y a une autre condition définie, savoir :

$$k\frac{du}{dy}=h(u-\zeta) \text{ pour } y=0 \text{ de } x=-\frac{\pi}{2} \text{ à } x=\frac{\pi}{2},$$

les deux quantités positives h et k désignant le pouvoir émissif et la conductibilité intérieure, tandis que ζ désigne la température du milieu ambiant. D'après nos hypothèses, h et ζ sont des fonctions de x. Nous pouvons donc poser

$$\frac{h}{k}=f(x), \quad \frac{h\zeta}{k}=\mathrm{F}(x),$$

et l'équation dont il s'agit deviendra

$$\frac{du}{dy} - uf(x) + \mathrm{F}(x) = 0.$$

Les fonctions $f(x)$ et $\mathrm{F}(x)$ sont jusqu'ici des fonctions quelconques; mais, pour plus de simplicité, nous les regarderons désormais comme des fonctions paires de x, en sorte que l'on ait $f(-x) = f(x)$, $\mathrm{F}(-x)=\mathrm{F}(x)$; la température u sera aussi dès lors une fonction paire de x. Par conséquent la question se réduit à trouver pour la température u une fonction paire de x, qui satisfasse à l'équation

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0,$$

qui s'annule, quel que soit y quand $x=\frac{\pi}{2}$, et quel que soit x quand

$y = +\infty$; et qui, en outre, lorsqu'on a $y=0$, satisfasse à l'égalité

$$\frac{du}{dy} - uf(x) + F(x) = 0,$$

pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Or, on trouve que toutes ces conditions seront remplies en posant

$$u = \Sigma A_m e^{-my} \cos mx;$$

m étant un quelconque des nombres entiers impairs $1, 3, 5 \ldots\ldots$ et A_m représentant une fonction de m tellement choisie que, pour les valeurs de x renfermées entre les limites 0 et $\frac{\pi}{2}$, on ait

$$\text{(A)} \qquad \Sigma A_m m \cos mx + f(x)\, \Sigma A_m \cos mx = F(x).$$

Pour déterminer la fonction inconnue A_m dont la valeur de u dépend, il est donc nécessaire de traiter l'équation (A) dans laquelle $f(x)$ est une fonction positive arbitraire de x.

Si la longueur de l'arète B que nous avons supposée égale à π, était au contraire égale à $2l$, au lieu de l'équation (A), on aurait à traiter une équation de condition de la forme

$$\text{(B)} \qquad \Sigma A_m . \frac{m\pi}{2l} \cos \frac{m\pi x}{2l} + f(x)\, \Sigma A_m \cos \frac{m\pi x}{2l} = F(x).$$

En supposant la longueur l infinie, transformant les sommes en intégrales, et substituant à la lettre A_m une fonction $\varphi(\theta)d\theta$ de la variable $\theta = \frac{m\pi}{2l}$ à laquelle se rapporte l'intégration, l'égalité précédente deviendra

$$\text{(C)} \qquad \int_0^\infty \theta\varphi(\theta) \cos \theta x d\theta + f(x) \int_0^\infty \varphi(\theta) \cos \theta x = F(x).$$

Il s'agira donc alors de trouver une fonction $\varphi(\theta)$ qui satisfasse à l'équation (C); et cette fonction une fois déterminée, la température u d'un point quelconque du solide, sera fournie par la formule générale

$$u = \int_0^\infty \varphi(\theta) e^{-\theta y} . \cos \theta x d\theta.$$

Nous avons restreint tout à l'heure la généralité de notre problème en supposant la chaleur distribuée symétriquement de part et d'autre de l'axe qui s'élève au milieu de l'arête B, normalement à cette arête; admettons maintenant que cette symétrie n'existe pas. Il sera plus commode de placer dans ce cas l'origine des coordonnées au point où les deux faces A et B se rencontrent; d'après cela nous choisirons l'arête A pour axe des y et l'arête B pour axe des x.

L'équation indéfinie à laquelle la température u doit satisfaire sera encore

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} = 0,$$

mais les conditions définies prendront la forme

$$u = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et pour } x = \pi,$$

$$u = 0 \text{ pour } y = +\infty,$$

$$\frac{du}{dy} - uf(x) + F(x) = 0, \text{ pour } y = 0, \text{ de } x = 0 \text{ à } x = \pi.$$

Nous n'avons pas besoin d'avertir que la longueur de l'arête B est, comme précédemment, représentée par le nombre π. La valeur de u qu'on déduit de ces équations est la suivante :

$$u = \Sigma A_m e^{-my} \sin mx,$$

m désignant un quelconque des nombres entiers successifs 1, 2, 3, 4, 5..... ; et A_m étant une fonction de m qui doit être telle que pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et π, on ait

$$\text{(D)} \qquad \Sigma A_m\, m \sin mx + f(x)\, \Sigma A_m \sin mx = F(x).$$

Pour obtenir la valeur de A_m et par suite la valeur de u, il est donc nécessaire de savoir résoudre les équations de la forme (D).

Considérons actuellement l'état permanent de la chaleur dans un cercle dont le contour rayonne dans un milieu de température donnée, et nous tomberons de nouveau sur une équation semblable aux précédentes, quoique un peu plus générale. En effet, soit u la température fixe d'un point quelconque M du cercle; désignons par r le rayon vecteur OM mené du point M au centre O, et par x l'angle que ce rayon vecteur forme avec une droite invariable OX. L'équation indéfinie du mouvement permanent de la chaleur dans un plan, pouvant, comme on le sait, être mise sous la forme

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{du}{dr}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d^2u}{dx^2}=0;$$

il s'agira d'abord d'intégrer cette équation. Or, si l'on effectue cette intégration en ayant égard à ces deux circonstances particulières à notre problème, 1° que la valeur de u ne devienne pas infinie quand on y fait $r=0$; 2° que cette valeur reste la même quand on change x en $x+2\pi$, on trouvera pour l'expression générale de u

$$u=\Sigma r^m(\mathrm{A}_m\cos mx+\mathrm{B}_m\sin mx),$$

m désignant un nombre entier quelconque y compris zéro, et A_m, B_m des fonctions inconnues de m. Il reste encore à satisfaire à l'équation relative à la surface, laquelle, en prenant pour unité de longueur le rayon du cercle, est de la forme

$$k\frac{du}{dr}+h(u-\zeta)=0 \quad \text{pour } r=1, \text{ de } x=-\pi \text{ à } x=+\pi,$$

k et h désignant la conductibilité intérieure et le pouvoir rayonnant, tandis que ζ représente la température du milieu en contact avec la circonférence du cercle. Nous supposerons que h et ζ sont des fonctions données de l'angle x, et nous poserons

$$\frac{h}{k}=f(x),\quad \frac{h\zeta}{k}=\mathrm{F}(x).$$

En mettant donc, au lieu de u et $\frac{du}{dr}$ leurs valeurs dans notre équation définie, elle deviendra

$$(\mathrm{E})\quad \Sigma m(\mathrm{A}_m\cos mx+\mathrm{B}_m\sin mx)+f(x)\,\Sigma(\mathrm{A}_m\cos mx+\mathrm{B}_m\sin mx)=\mathrm{F}(x);$$

et il faudra en faire usage de manière à déterminer les deux coefficiens A_m et B_m.

Les cinq équations que nous avons dénotées par les cinq premières lettres de l'alphabet, répondent à un nombre égal de problèmes dont nous allons essayer de donner la solution. Nous traiterons d'abord le problème (A), qui renferme implicitement (B) et (C), par deux méthodes différentes qui nous conduiront aux mêmes résultats. La seconde de ces deux méthodes étant plus abrégée que l'autre, c'est elle que nous appliquerons ensuite aux derniers problèmes (D), (E).

II.

PREMIÈRE SOLUTION DU PROBLÈME (A).

Soient m un nombre impair quelconque, et A_1, A_3, $A_5 \ldots A_m \ldots$ des coefficiens constans inconnus; faisons

$$A_1 \cos x + A_3 \cos 3x + A_5 \cos 5x + \text{etc.} = \Sigma A_m \cos mx,$$

et

$$A_1 \cos x + 3A_3 \cos 3x + 5A_5 \cos 5x + \text{etc.} = \Sigma A_m m \cos mx.$$

Désignons par $F(x)$, $f(x)$, deux fonctions de x, dont on connaisse les valeurs depuis $x=0$ jusqu'à $x=\frac{\pi}{2}$. Cela posé, notre problème peut s'énoncer de la manière suivante.

PROBLÈME.

On demande de trouver la valeur de A_m qui satisfait à l'équation

$$\text{(A)} \qquad \Sigma A_m m \cos mx + f(x) \Sigma A_m \cos mx = F(x)$$

pour toutes les valeurs de x *comprises entre les limites* $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$.

Néanmoins, pour rendre cet énoncé plus précis, il faut ajouter les remarques suivantes qui dérivent de la nature même de la question.

1°. Le problème qui, dans le n° I, nous a conduits à l'équation (A), nous montre que la quantité $\cos mx$ est la limite vers laquelle tend le produit $e^{-my} \cos mx$, quand la grandeur positive y devient infiniment petite. En posant $e^{-y}=p$, p sera un nombre infiniment peu inférieur à l'unité, et nous aurons $e^{-my} \cos mx = p^m \cos mx$. Il résulte de là que si nos séries périodiques deviennent indéterminées, nous pourrons et nous devrons même en multiplier les divers termes par les puissances successives d'une quantité infiniment peu différente de l'unité, ce qui détruira l'indétermination.

2°. Les deux fonctions $f(x)$ et $F(x)$ sont données en *nombres finis* pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$. Le cas où ces fonctions deviendraient infinies, dans l'intervalle cité, doit être exclu formellement comme contraire à la nature physique du problème qui nous a fourni l'équation (A).

3°. La fonction $f(x)$ est en outre constamment positive, puisqu'elle exprime le rapport du pouvoir rayonnant à la conductibilité.

4°. La fonction $F(x)$ peut être indifféremment positive ou négative; mais nous la supposerons nulle à la limite $x=\frac{\pi}{2}$, en sorte qu'on ait $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$. En effet, le premier membre de l'équation (A) s'annule pour la valeur particulière $x=\frac{\pi}{2}$; si donc on n'admettait pas la condition $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, l'analyse paraîtrait se contredire, puisque le second membre ne s'annulant pas pour cette même valeur, cesserait alors d'être égal au premier.

Si la fonction $f(x)$ se réduisait à une quantité constante β, l'équation (A) pourrait être écrite ainsi

$$\Sigma A_m (m+\beta) \cos mx = F(x);$$

et par la méthode ordinaire on en déduirait

$$A_m = \frac{4}{\pi(m+\beta)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(x) \cos mx dx;$$

mais cette méthode est impraticable sitôt qu'on cesse d'avoir $f(x) =$ constante. Il faut donc recourir à d'autres procédés.

D'abord, j'observe que la fonction $F(x)$ qui, par hypothèse, satisfait à la condition $F\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$, peut être exprimée entre les limites $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, par une série de cosinus, puisque l'on a la formule connue

$$F(x) = \frac{4}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\mu) \cos m\mu d\mu,$$

m désignant, comme ci-dessus, un nombre impair quelconque.

Quant à la fonction $f(x)$, nous pouvons, entre les mêmes limites, la développer sous la forme

$$f(x) = R_0 + R_2 \cos 2x + R_4 \cos 4x + \ldots + R_n \cos nx + \ldots$$

ou, pour abréger,

$$f(x) = \Sigma R_n \cos nx,$$

n désignant un quelconque des nombres pairs $0, 2, 4, 6 \ldots$, et R_n étant un coefficient déterminé par l'égalité

$$R_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\mu) \cos n\mu d\mu,$$

dont le second membre doit néanmoins être réduit à moitié lorsque $n = 0$. En remplaçant $f(x)$ et $F(x)$ par leurs valeurs dans l'équation (A), cette équation devient

$$(A') \quad \Sigma A_m m \cos mx + \Sigma R_n \cos nx \Sigma A_m \cos mx = \frac{4}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\mu) \cos m\mu d\mu,$$

et l'on peut s'assurer que si l'équation (A') a lieu pour toutes les valeurs de x comprises entre $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$, elle aura également lieu quand x se trouvera en-deçà ou au-delà de ces limites. Tel est l'avantage que l'on trouve à substituer aux fonctions $f(x)$ et $F(x)$ les séries de cosinus équivalentes; et c'est en cela que consiste l'esprit de ces substitutions.

Le produit

$$\Sigma R_n \cos nx \, \Sigma A_m \cos mx,$$

qui n'est autre chose que le produit des deux quantités

$$R_0 + R_2 \cos 2x + R_4 \cos 4x + \ldots + R_n \cos nx + \ldots$$

et

$$A_1 \cos x + A_3 \cos 3x + A_5 \cos 5x + \ldots + A_m \cos mx + \ldots$$

peut être effectué en général; si l'on fait usage de la formule

$$\cos mx \cos nx = \tfrac{1}{2} \cos (m+n)x + \tfrac{1}{2} \cos (m-n)x,$$

on ramène ce produit à la forme

$$a_1 \cos x + a_3 \cos 3x + a_5 \cos 5x + \text{etc.};$$

on peut donc poser

$$\Sigma R_n \cos nx \, \Sigma A_m \cos mx = a_1 \cos x + a_3 \cos 3x + a_5 \cos 5x + \text{etc.};$$

et en effectuant les calculs, on obtient aisément

$$a_1 = R_0 A_1 + \frac{R_2}{2}(A_3 + A_1) + \frac{R_4}{2}(A_5 + A_3) + \ldots\ldots$$
$$a_3 = R_0 A_3 + \frac{R_2}{2}(A_5 + A_1) + \frac{R_4}{2}(A_7 + A_1) + \ldots\ldots$$
$$a_5 = R_0 A_5 + \frac{R_2}{2}(A_7 + A_3) + \frac{R_4}{2}(A_9 + A_1) + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces valeurs de a_1, a_3, a_5,.. dépendent des quantités A_1, A_3, A_5, ... A_m.... ; mais pour bien mettre en évidence la loi régulière de leur formation, il convient d'introduire aussi dans le calcul les quantités A_{-1}, A_{-3},... A_{-m},... Ces quantités n'ont aucun sens par elles-mêmes; voici quelle signification nous leur attribuerons dans la suite. Il faut concevoir une fonction $\varphi(m)$ telle que l'on ait en général $A_m = \varphi(m)$, quand m est un quelconque des nombres impairs 1, 3, 5... A présent, si dans la fonction analytique $\varphi(m)$ on remplace m par $-m$, le résultat de la substitution sera $\varphi(-m)$. Or, c'est précisément ce résultat que désormais nous dénoterons par A_{-m}, en posant en conséquence

$$A_{-1} = \varphi(-1), \quad A_{-3} = \varphi(-3), \ldots \quad A_{-m} = \varphi(-m) \ldots.$$

Introduisant dans nos calculs les quantités A_{-1}, A_{-3},.... A_{-m},...

nous pourrons mettre les valeurs de a_1, a_3, a_5, . . . sous la forme

$$a_1 = b_1 + R_0 A_1 + \frac{R_2}{2}(A_3 + A_{-1}) + \frac{R_4}{2}(A_5 + A_{-3}) + \ldots + \frac{R_n}{2}(A_{1+n} + A_{1-n}) + \ldots$$

$$a_3 = b_3 + R_0 A_3 + \frac{R_2}{2}(A_5 + A_1) + \frac{R_4}{2}(A_7 + A_{-1}) + \ldots + \frac{R_n}{2}(A_{3+n} + A_{3-n}) + \ldots$$

$$a_5 = b_5 + R_0 A_5 + \frac{R_2}{2}(A_7 + A_3) + \frac{R_4}{2}(A_9 + A_1) + \ldots + \frac{R_n}{2}(A_{5+n} + A_{5-n}) + \ldots$$

. . . .

b_1, b_3, b_5, . . . étant exprimés comme il suit :

$$b_1 = \frac{R_2}{2}(A_1 - A_{-1}) + \frac{R_4}{2}(A_3 - A_{-3}) + \frac{R_6}{2}(A_5 - A_{-5}) + \ldots$$

$$b_3 = \frac{R_4}{2}(A_1 - A_{-1}) + \frac{R_6}{2}(A_3 - A_{-3}) + \frac{R_8}{2}(A_5 - A_{-5}) + \ldots$$

$$b_5 = \frac{R_6}{2}(A_1 - A_{-1}) + \frac{R_8}{2}(A_3 - A_{-3}) + \frac{R_{10}}{2}(A_5 - A_{-5}) + \ldots$$

. . . .

La loi de formation des quantités b_1, b_3, b_5, ... et a_1, a_3, a_5, ... est facile à apercevoir, et l'emploi des signes A_{-1}, A_{-3}, etc., n'a pas peu contribué à rendre cette loi évidente. En adoptant pour a_1, a_3, a_5,..., les valeurs ci-dessus, le produit $\Sigma R_n \cos nx\, \Sigma A_m \cos mx$ est égal à

$$a_1 \cos x + a_3 \cos 3x + a_5 \cos 5x + \text{etc.}$$

Si donc on fait, pour abréger,

$$X = b_1 \cos x + b_3 \cos 3x + b_5 \cos 5x + \ldots,$$
$$Y = \Sigma \cos mx \left[R_0 A_m + \frac{R_2}{2}(A_{m+2} + A_{m-2}) + \frac{R_4}{2}(A_{m+4} + A_{m-4}) + \text{etc.} \right],$$

on aura

$$\Sigma R_n \cos nx\, \Sigma A_m \cos mx = X + Y,$$

et l'équation (A') deviendra

$$(A'') \quad \Sigma A_m m \cos mx + X + Y = \frac{4}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\mu) \cos m\mu\, d\mu.$$

Dorénavant c'est à l'équation (A'') que nous nous proposerons de satisfaire.

Dans le cas très particulier où l'on a $f(x) =$ constante, on peut, comme on l'a dit plus haut, trouver par les méthodes ordinaires la valeur de A_m qui satisfait à l'équation (A″). En examinant attentivement cette valeur, on en conclut par induction que, dans le cas le plus général où $f(x)$ est une fonction quelconque de x, il doit être permis de poser

$$A_m = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu\,(P\cos m\mu + Q\sin m\mu),$$

P et Q désignant des fonctions inconnues de μ, indépendantes de m, qu'il s'agit de déterminer, en sorte que l'équation (A″) ait lieu. Toutefois, on pourrait douter *à priori* de la possibilité d'écrire la valeur de A_m sous la forme précédente; mais comme nous arriverons par notre analyse à calculer P et Q, il nous sera facile de vérifier *à posteriori* l'exactitude de notre hypothèse.

Posons donc

$$A_m = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu\,(P\cos m\mu + Q\sin m\mu),$$

et voyons s'il existe en effet des fonctions de μ, indépendantes de m, qui, mises au lieu de P et Q, rendent la valeur de A_m propre à satisfaire à l'équation (A″).

Pour cela, calculons successivement, et mettons sous leur forme la plus simple les trois quantités $\Sigma A_m m\cos mx$, X, Y, dont se compose le premier membre de l'équation (A″).

En premier lieu nous aurons

$$\Sigma A_m m\cos mx = \frac{4}{\pi}\,\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu\,(P\cos m\mu + Q\sin m\mu);$$

or il vient, en intégrant par parties,

$$\int P\cos m\mu d\mu = \frac{P\sin m\mu}{m} - \frac{1}{m}\int \sin m\mu\,\frac{dP}{d\mu}\,d\mu,$$

et

$$\int Q\sin m\mu d\mu = \frac{Q\cos m\mu}{m} + \frac{1}{m}\int \cos m\mu\,\frac{dQ}{d\mu}\,d\mu.$$

Si donc on se rappelle que m est un nombre impair, et si l'on suppose les fonctions P et Q assujetties aux conditions

$$\mathrm{P} = 0 \text{ pour } \mu = \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{Q} = 0 \text{ pour } \mu = 0,$$

on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{P} \cos m\mu d\mu = -\frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin m\mu \frac{d\mathrm{P}}{d\mu}\, d\mu,$$

et

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Q} \sin m\mu d\mu = \frac{1}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos m\mu \frac{d\mathrm{Q}}{d\mu}\, d\mu;$$

d'où résulte

$$\Sigma \mathrm{A}_m m \cos mx = \frac{4}{\pi}\Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \left(\cos m\mu \frac{d\mathrm{Q}}{d\mu} - \sin m\mu \frac{d\mathrm{P}}{d\mu}\right).$$

Le terme Y est également très simple à former. En effet, on a

$$\mathrm{Y} = \Sigma \cos mx \left(\mathrm{R}_0 \mathrm{A}_m + \frac{\mathrm{R}_2}{2}(\mathrm{A}_{m+2} + \mathrm{A}_{m-2}) + \frac{\mathrm{R}_4}{2}(\mathrm{A}_{m+4} + \mathrm{A}_{m-4}) + \ldots\right).$$

Les quantités A_{m+2}, A_{m-2}, A_{m+4}, A_{m-4}, etc., se déduisent de l'expression générale de A_m, en donnant à l'indice m une valeur convenable; et en observant que l'on a

$$\cos(m+n)\mu + \cos(m-n)\mu = 2\cos m\mu \cos n\mu,$$
$$\sin(m+n)\mu + \sin(m-n)\mu = 2\sin m\mu \cos n\mu,$$

on obtient sans difficulté

$$\mathrm{A}_{m+2} + \mathrm{A}_{m-2} = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \cos 2\mu (\mathrm{P}\cos m\mu + \mathrm{Q}\sin m\mu),$$

$$\mathrm{A}_{m+4} + \mathrm{A}_{m-4} = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \cos 4\mu (\mathrm{P}\cos m\mu + \mathrm{Q}\sin m\mu),$$

. . . .

Au moyen de ces valeurs, je calcule celle de la quantité

$$\mathrm{R}_0 \mathrm{A}_m + \frac{\mathrm{R}_2}{2}(\mathrm{A}_{m+2} + \mathrm{A}_{m-2}) + \frac{\mathrm{R}_4}{2}(\mathrm{A}_{m+4} + \mathrm{A}_{m-4}) + \ldots\ldots$$

et je la trouve égale à

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu\,(\mathrm{P}\cos m\mu + \mathrm{Q}\sin m\mu)\,(\mathrm{R}_0 + \mathrm{R}_2\cos 2\mu + \mathrm{R}_4\cos 4\mu + \text{etc.}).$$

Si l'on se rappelle maintenant que la série

$$\mathrm{R}_0 + \mathrm{R}_2\cos 2\mu + \mathrm{R}_4\cos 4\mu + \ldots..$$

est précisément le développement de la fonction $f(\mu)$ entre les limites $\mu = 0$, $\mu = \frac{\pi}{2}$, on verra que l'expression précédente se réduit à

$$\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu\,[\mathrm{P}f(\mu)\cos m\mu + \mathrm{Q}f(\mu)\sin m\mu].$$

Par conséquent, on a

$$\mathrm{Y} = \frac{4}{\pi}\,\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu\,[\mathrm{P}f(\mu)\cos m\mu + \mathrm{Q}f(\mu)\sin m\mu].$$

Calculons maintenant la valeur de X. Or cette valeur, réduite en série, est exprimée par l'égalité

$$\mathrm{X} = b_1\cos x + b_3\cos 3x + b_5\cos 5x + \ldots..$$

Les coefficiens b_1, b_3, b_5, ... sont eux-mêmes exprimés par séries. Ainsi l'on a

$$b_1 = \frac{\mathrm{R}_2}{2}(\mathrm{A}_1 - \mathrm{A}_{-1}) + \frac{\mathrm{R}_4}{2}(\mathrm{A}_3 - \mathrm{A}_{-3}) + \frac{\mathrm{R}_6}{2}(\mathrm{A}_5 - \mathrm{A}_{-5}) + \ldots$$

En mettant pour A_1, A_3, A_5,... A_{-1}, A_{-3}, A_{-5},... leurs valeurs, cette valeur de b_1 devient

$$b_1 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Q}d\mu\,(\mathrm{R}_2\sin\mu + \mathrm{R}_4\sin 3\mu + \mathrm{R}_6\sin 5\mu + \ldots).$$

On trouvera de même

$$b_3 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q d\mu (R_4 \sin\mu + R_6 \sin 3\mu + R_8 \sin 5\mu + \ldots),$$

$$b_5 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q d\mu (R_6 \sin\mu + R_8 \sin 3\mu + R_{10} \sin 5\mu + \ldots).$$

. . . .

Si l'on multiplie ces valeurs de b_1, b_3, b_5,... par les facteurs respectifs $\cos x$, $\cos 3x$, $\cos 5x$,... qu'on pourra faire passer sous le signe $\int$, puisqu'on ajoute les produits obtenus, la somme ainsi formée sera égale à X. En ordonnant la quantité placée sous le signe $\int$ par rapport aux lettres R_2, R_4, R_6, ..., on pourra donc écrire X ainsi qu'il suit :

$$X = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q d\mu (R_2 M_2 + R_4 M_4 + R_6 M_6 + R_8 M_8 + \ldots),$$

les valeurs de M_2, M_4, M_6, M_8, ... étant

$$\begin{aligned}
M_2 &= \cos x \sin\mu,\\
M_4 &= \cos x \sin 3\mu + \cos 3x \sin\mu,\\
M_6 &= \cos x \sin 5\mu + \cos 3x \sin 3\mu + \cos 5x \sin\mu,\\
M_8 &= \cos x \sin 7\mu + \cos 3x \sin 5\mu + \cos 5x \sin 3\mu + \cos 7x \sin\mu;
\end{aligned}$$

. . . .

En observant que si p désigne un nombre entier, on a en général

$$\cos x \sin(2p-1)\mu + \cos 3x \sin(2p-3)\mu + \ldots$$
$$\ldots + \cos(2p-1)x \sin\mu = \frac{\cos x \sin\mu\,(\cos 2px - \cos 2p\mu)}{\cos 2x - \cos 2\mu}.$$

les valeurs de M_2, M_4, M_6, M_8, ... se simplifient et deviennent

$$M_2 = \frac{\cos x \sin\mu (\cos 2x - \cos 2\mu)}{\cos 2x - \cos 2\mu},$$

$$M_4 = \frac{\cos x \sin\mu (\cos 4x - \cos 4\mu)}{\cos 2x - \cos 2\mu},$$

$$M_6 = \frac{\cos x \sin\mu (\cos 6x - \cos 6\mu)}{\cos 2x - \cos 2\mu},$$

$$M_8 = \frac{\cos x \sin\mu (\cos 8x - \cos 8\mu)}{\cos 2x - \cos 2\mu},$$

. . . .

Substituons ces valeurs dans celle de X, et rappelons-nous que l'on a

$$f(x) = \mathrm{R}_0 + \mathrm{R}_2 \cos 2x + \mathrm{R}_4 \cos 4x + \text{etc.}$$
$$f(\mu) = \mathrm{R}_0 + \mathrm{R}_2 \cos 2\mu + \mathrm{R}_4 \cos 4\mu + \text{etc.};$$

nous obtiendrons

$$\mathrm{X} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{Q} \cos x \sin\mu\, [f(x) - f(\mu)]\, d\mu}{\cos 2x - \cos 2\mu},$$

ou bien en remplaçant, ce qui est permis, la lettre μ par la lettre α, et désignant par Q_α ce que devient Q en vertu de ce changement,

$$\mathrm{X} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{Q}_\alpha \cos x \sin\alpha\, [f(x) - f(\alpha)]\, d\alpha}{\cos 2x - \cos 2\alpha}.$$

La fonction désignée par X est une fonction paire de x, qui s'évanouit pour $x = \frac{\pi}{2}$. Entre les deux limites $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, on peut donc la développer en une série de cosinus d'arcs multiples impairs de x; et par la méthode ordinaire, on trouve

$$\mathrm{X} = \frac{16}{\pi^2} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos m\mu d\mu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{Q}_\alpha \cos\mu \sin\alpha\, [f(\mu) - f(\alpha)]\, d\alpha}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha}.$$

Les expressions des trois quantités $\Sigma \mathrm{A}_m m \cos mx$, X et Y une fois formées, il faut les reporter dans l'équation (A''). Pour simplifier l'écriture, posons

$$\mathrm{U} = \frac{d\mathrm{Q}}{d\mu} + \mathrm{P} f(\mu) - \mathrm{F}(\mu) + \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{Q}_\alpha \cos\mu \sin\alpha\, [f(\mu) - f(\alpha)]\, d\alpha}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha},$$
$$\mathrm{V} = \frac{d\mathrm{P}}{d\mu} - \mathrm{Q} f(\mu),$$

et nous verrons facilement, qu'après avoir effectué la substitution dont il s'agit, on peut mettre l'équation (A'') sous la forme

$$\Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu\, (\mathrm{U} \cos m\mu - \mathrm{V} \sin m\mu) = 0.$$

FÉVRIER 1836.

Or, cette dernière égalité sera évidemment satisfaite si les valeurs de P et Q sont telles qu'on ait à la fois $U = o$ et $V = o$.

Donc la détermination des deux quantités P et Q dépend des deux équations

$$\frac{dQ}{d\mu} + Pf(\mu) = F(\mu) - \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q_\alpha \cos\mu \sin\alpha\,[f(\mu) - f(\alpha)]\,d\alpha}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha},$$

$$\frac{dP}{d\mu} - Qf(\mu) = o,$$

auxquelles il ne faut pas oublier de joindre les conditions définies

$$P = o \text{ pour } \mu = \frac{\pi}{2}, \quad Q = o \text{ pour } \mu = o,$$

que nous avons supposées satisfaites en effectuant ci-dessus une intégration par parties. Les équations auxquelles nous venons d'arriver sont remarquables en ce que la fonction Q se trouve placée à la fois sous un signe d'intégration définie et hors de ce même signe. Plusieurs questions d'Analyse élevée mènent à de semblables égalités, et nous avons déjà eu l'occasion d'en traiter quelques-unes, lorsque nous nous sommes occupés des différentielles à indices quelconques.

Lorsque la fonction $f(x)$ est égale à une constante h, nos équations deviennent

$$\frac{dQ}{d\mu} + hP = F(\mu), \quad \frac{dP}{d\mu} - hQ = o.$$

Il est très facile de les intégrer, et la valeur de A_m à laquelle elles conduisent, coïncide, après quelques transformations, avec celle que fournit la méthode ordinaire. Mais il est inutile d'entrer ici dans le détail de ces transformations qui n'ont rien de remarquable.

Si l'on veut vérifier l'exactitude de nos équations en les appliquant à un exemple dans lequel $f(x)$ soit une quantité variable, et qui cependant n'exige pas de calculs compliqués, on n'a qu'à faire $f(x) = \cos^2 x$, et $F(x) = \frac{3}{2}\cos x - \frac{1}{3}\cos^5 x$. On trouve alors $P = -\frac{1}{3}\cos^3\mu$, $Q = \sin\mu$, valeurs dont il est aisé de constater l'exactitude en les substituant dans nos équations. Il résulte donc de notre analyse, qu'en posant

$$A_m = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu(\sin\mu \sin m\mu - \frac{1}{3}\cos^3\mu \cos m\mu),$$

on doit avoir

$$\Sigma A_m m \cos mx + \cos^2 x \,\Sigma A_m \cos mx = \tfrac{3}{2}\cos x - \tfrac{1}{3}\cos^5 x.$$

D'après la valeur de A_m, la quantité $\Sigma A_m \cos mx$ est la différence de deux autres quantités dont la première, savoir :

$$\frac{4}{\pi}\Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \sin\mu \sin m\mu$$

est égale à $\cos x$; et dont la seconde, savoir :

$$\frac{4}{3\pi}\Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\mu \cos m\mu d\mu$$

est égale à $\frac{1}{3}\cos^3 x$. On a par conséquent

$$\Sigma A_m \cos mx = \cos x - \tfrac{1}{3}\cos^3 x = \tfrac{3}{4}\cos x - \tfrac{1}{12}\cos 3x;$$

d'où

$$\Sigma A_m m \cos mx = \tfrac{3}{4}\cos x - \tfrac{1}{4}\cos 3x.$$

L'équation que nous voulons vérifier devient donc

$$\tfrac{3}{4}\cos x - \tfrac{1}{4}\cos 3x + \cos^2 x(\cos x - \tfrac{1}{3}\cos^3 x) = \tfrac{3}{2}\cos x - \tfrac{1}{3}\cos^5 x.$$

Or, en effectuant les calculs et remettant pour $\cos 3x$ sa valeur $4\cos^3 x - 3\cos x$, on trouve qu'elle est identique, comme cela doit être.

Pour montrer comment nos équations font connaître les valeurs de P et Q, je vais considérer le cas particulier très simple où l'on a

$$f(x) = R_0 + R_2 \cos 2x.$$

De cette valeur de $f(x)$ il résulte que

$$\frac{f(\mu) - f(\alpha)}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha} = R_2.$$

Les équations en P et Q sont donc ici

$$\frac{dQ}{d\mu} + Pf(\mu) = F(\mu) - \frac{4R_2 \cos\mu}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_\alpha \sin\alpha d\alpha,$$
$$\frac{dP}{d\mu} - Qf(\mu) = 0.$$

Posons $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_\alpha \sin\alpha d\alpha = C$; C sera une constante inconnue que nous déterminerons à la fin du calcul. Si nous divisons maintenant nos deux équations par $f(\mu)$, et si nous posons $f(\mu)d\mu = d\theta$, θ désignant une nouvelle variable égale à $R_0\mu + \frac{R_2}{2}\sin 2\mu$, elles deviendront

$$\frac{dQ}{d\theta} + P = \frac{F(\mu)}{f(\mu)} - \frac{4CR_2\cos\mu}{\pi f(\mu)},$$
$$\frac{dP}{d\theta} - Q = 0;$$

ou bien en éliminant Q

$$\frac{d^2P}{d\theta^2} + P = \frac{F(\mu)}{f(\mu)} - \frac{4CR_2\cos\mu}{\pi f(\mu)}.$$

Cette équation du second ordre est facile à intégrer, soit par la méthode ordinaire, soit en procédant comme on va le voir.

L'égalité $\theta = R_0\mu + \frac{R_2}{2}\sin 2\mu = \int_0^\mu f(\mu)d\mu$, dans laquelle $f(\mu)$ est une fonction toujours positive depuis $\mu = 0$ jusqu'à $\mu = \frac{\pi}{2}$, nous prouve que θ est une fonction positive croissante dans le même intervalle, en sorte qu'elle grandit par degrés insensibles depuis $\theta = 0$ jusqu'à la valeur extrême $\theta = \frac{R_0\pi}{2}$ que nous désignerons par ω. En vertu de cette même égalité μ est une fonction de θ, et l'on peut en dire autant des deux quantités $\frac{F(\mu)}{f(\mu)}$, $\frac{4R_2\cos\mu}{\pi f(\mu)}$. De plus, ces deux quantités s'évanouissent lorsqu'on a $\mu = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire $\theta = \omega$. Donc entre les limites $\theta = 0$ et $\theta = \omega$, on peut, par les méthodes connues, développer $\frac{F(\mu)}{f(\mu)}$, $\frac{4R_2\cos\mu}{\pi f(\mu)}$ en séries de la forme

$$\frac{F(\mu)}{f(\mu)} = \Sigma H \cos\frac{m\pi\theta}{2\omega}, \qquad \frac{2R_2 \cos u}{\pi f(\mu)} = \Sigma K \cos\frac{m\pi\theta}{2\omega},$$

m désignant un nombre impair quelconque. On aura ensuite

$$\frac{d^2P}{d\theta^2} + P = \Sigma H \cos\frac{m\pi\theta}{2\omega} - C\Sigma K \cos\frac{m\pi\theta}{2\omega},$$

et l'on satisfera à cette équation en posant

$$P = 4\omega^2\Sigma\,\frac{H\cos\frac{m\pi\theta}{2\omega}}{4\omega^2 - m^2\pi^2} - 4C\omega^2\Sigma\,\frac{K\cos\frac{m\pi\theta}{2\omega}}{4\omega^2 - m^2\pi^2}.$$

La valeur de P, différentiée par rapport à θ, fournit celle de Q. Ainsi l'on a

$$Q = -\,2\omega\pi\Sigma\,\frac{mH\sin\frac{m\pi\theta}{2\omega}}{4\omega^2 - m^2\pi^2} + 2C\omega\pi\Sigma\,\frac{mK\sin\frac{m\pi\theta}{2\omega}}{4\omega^2 - m^2\pi^2}.$$

Quoique la valeur de P ne soit qu'une intégrale particulière de l'équation du second ordre qui détermine P, cette intégrale particulière suffit pour le moment; car les conditions définies

$$P = 0 \text{ pour } \mu = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \theta = \omega,$$
$$Q = 0 \text{ pour } \mu = 0 \text{ ou } \theta = 0,$$

qui doivent servir à déterminer les deux constantes arbitraires, sont ici satisfaites d'elles-mêmes.

La quantité inconnue C qui reste encore dans nos formules doit être telle que l'on ait $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_\alpha \sin\alpha d\alpha = C$. En formant l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_\alpha \sin\alpha d\alpha$, et l'égalant à C, nous déterminerons donc cette constante et nous trouverons

$$C = -\frac{2\omega\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha d\alpha\,\Sigma\,\dfrac{mH\sin\frac{m\pi\theta_\alpha}{2\omega}}{4\omega^2 - m^2\pi^2}}{1 - 2\omega\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\alpha d\alpha\,\Sigma\,\dfrac{mK\sin\frac{m\pi\theta_\alpha}{2\omega}}{4\omega^2 - m^2\pi^2}},$$

θ_α étant ce que devient θ lorsqu'on y remplace μ par α, en sorte que $\theta_\alpha = R_0\alpha + \frac{R_2}{2}\sin 2\alpha$. La valeur de C étant ainsi connue, il ne reste plus rien d'indéterminé dans les expressions de P et Q; et la recherche de ces expressions est terminée.

En général les équations

$$\frac{dQ}{d\mu} + Pf(\mu) = F(\mu) - \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Q_\alpha \cos\mu \sin\alpha[f(\mu) - f(\mu)]d\alpha}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha}$$
$$\frac{dP}{d\mu} - Qf(\mu) = 0,$$

feront connaître les valeurs de P et Q sous forme finie toutes les fois que la fraction

$$\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\cos\mu\sin\alpha[f(\mu)-f(\alpha)]}{\cos 2\mu - \cos 2\alpha}$$

pourra être ramenée à la forme

$$\Psi_1(\mu)\Pi_1(\alpha) + \Psi_2(\mu)\Pi_2(\alpha) + \ldots + \Psi_n(\mu)\Pi_n(\alpha),$$

quelles que soient d'ailleurs les fonctions $\Psi_1(\mu)$, $\Pi_1(\alpha)$, etc. En effet, dans cette hypothèse, si l'on pose

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_\alpha\Pi_1(\alpha)d\alpha = C_1, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_\alpha\Pi_2(\alpha)d\alpha = C_2, \ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_\alpha\Pi_n(\alpha)d\alpha = C_n,$$

on aura

$$\frac{dQ}{d\mu} + Pf(\mu) = F(\mu) - C_1\Psi_1(\mu) - C_2\Psi_2(\mu) - \ldots\ldots - C_n\Psi_n(\mu)$$
$$\frac{dP}{d\mu} - Qf(\mu) = 0;$$

ces deux équations différentielles du second ordre sont faciles à intégrer, puisqu'en posant $\int_0^\mu f(\mu)d\mu = \theta$, et prenant θ pour variable indépendante, les coefficiens des quantités P, Q, et de leurs différentielles $\frac{dP}{d\theta}$, $\frac{dQ}{d\theta}$, se réduisent à de simples constantes. L'intégration effectuée, on détermine d'abord les deux constantes arbitraires que cette intégration introduit, en faisant usage des conditions définies $P=0$ pour $\mu=\frac{\pi}{2}$, $Q=0$ pour $\mu=0$. Ensuite on chassera $C_1, C_2 \ldots C_n$ en ayant égard aux n égalités

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_\alpha \Pi_1(\alpha)d\alpha = C_1,\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_\alpha \Pi_2(\alpha)d\alpha = C_2, \ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_\alpha \Pi_n(\alpha)d\alpha = C_n,$$

et quand on aura terminé ces calculs d'élimination, les valeurs de P et Q, en général, ne renfermeront plus rien d'indéterminé (*).

Reste à savoir maintenant dans quel cas la fonction

$$\frac{4}{\pi}\cdot\frac{\cos\mu\sin\alpha\,[f(\mu)-f(\alpha)]}{\cos 2\mu-\cos 2\alpha},$$

ou, ce qui revient au même, la fonction

$$\frac{f(\mu)-f(\alpha)}{\cos 2\mu-\cos 2\alpha}=\frac{1}{2}\cdot\frac{f(\mu)-f(\alpha)}{\cos^2\mu-\cos^2\alpha}$$

(*) Si pourtant les n équations de condition $\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q_\alpha \Pi_1(\alpha)d\alpha = C_1$, etc., rentraient les unes dans les autres, quelques-unes des constantes $C_1, C_2, \ldots C_n$, resteraient indéterminées dans les valeurs de P et Q, et par suite dans la valeur de A_m. Sans doute une telle circonstance ne se présente jamais dans la théorie de la chaleur, c'est-à-dire lorsque la fonction $f(x)$, qui exprime dans cette théorie le rapport du pouvoir rayonnant à la chaleur spécifique, est une fonction positive; mais lorsqu'on regarde la fonction $f(x)$ comme susceptible de prendre des valeurs négatives, le problème qui consiste à trouver la valeur de A_m satisfaisant à l'équation (A) peut très bien devenir indéterminé. Et, par exemple, si l'on pose $f(x)=-3$, $F(x)=0$, l'équation (A) prendra la forme $\Sigma A_m m \cos mx - 3\Sigma A_m \cos mx = 0$, et il est clair qu'on y satisfera en égalant à zéro les coefficiens $A_1, A_2, \ldots A_m, \ldots$ et à une constante quelconque le coefficient A_3. En continuant à regarder la valeur de $f(x)$ comme susceptible de prendre une valeur négative, il pourra aussi arriver que nos équations de condition soient incompatibles, et alors il n'existera aucune valeur de A_m satisfaisant à l'équation (A). On aura un exemple simple du cas dont je parle en faisant $f(x)=-3$, $F(x)=\cos 3x$, car l'équation (A) deviendra $\Sigma A_m m \cos mx - 3\Sigma A_m \cos mx = \cos 3x$, ou bien $\Sigma A_m(m-3)\cos mx = \cos 3x$, égalité évidemment absurde, puisque le coefficient de $\cos 3x$ est égal à zéro dans le premier membre, et égal à l'unité dans le second membre.

peut être ramenée à la forme citée. Or, je dis que cela arrivera toutes les fois que $f(x)$ sera une fonction rationnelle, entière ou fractionnaire de $\cos^2 x$.

Supposons, en effet, qu'on ait $f(\mu) = \frac{f_1(\mu)}{f_2(\mu)}$, $f_1(\mu)$ et $f_2(\mu)$ désignant des fonctions entières de $\cos^2\mu$. On aura, en changeant μ en α $f(\alpha) = \frac{f_1(\alpha)}{f_2(\alpha)}$.

Par conséquent

$$\frac{f(\mu)-f(\alpha)}{\cos^2\mu-\cos^2\alpha} = \frac{f_1(\mu)f_2(\alpha)-f_1(\alpha)f_2(\mu)}{f_2(\mu)f_2(\alpha)\,(\cos^2\mu-\cos^2\alpha)}.$$

Pour démontrer la proposition énoncée, il suffit évidemment de faire voir que la quantité

$$\frac{f_1(\mu)f_2(\alpha)-f_1(\alpha)f_2(\mu)}{\cos^2\mu-\cos^2\alpha}$$

est réductible à la forme $\Psi_1(\mu)\Pi_1(\alpha)+\Psi_2(\mu)\Pi_2(\alpha)+\ldots+\Psi_n(\mu)\Pi_n(\alpha)$. Or, rien n'est plus facile; en effet, la fonction $f_1(\mu)f_2(\alpha)-f_1(\alpha)f_2(\mu)$ étant une fonction entière de $\cos^2\mu$, $\cos^2\alpha$, et s'annulant quand on a $\cos^2\mu=\cos^2\alpha$, elle doit être divisible par $\cos^2\mu-\cos^2\alpha$, et le résultat de la division ne peut se composer que d'un nombre limité de termes de la forme $A\cos^{2p}\mu\cos^{2q}\alpha$.

Les équations

$$\frac{dQ}{d\mu}+Pf(\mu)=F(\mu)-\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{Q_\alpha\cos\mu\sin\alpha\,[f(\mu)-f(\alpha)]d\alpha}{\cos 2\mu-\cos 2\alpha},$$
$$\frac{dP}{d\mu}-Qf(\mu)=0,$$

s'intégreront donc sous forme finie par notre méthode toutes les fois que le pouvoir rayonnant $f(x)$ sera exprimé par une fonction rationnelle quelconque de $\cos^2 x$. A plus forte raison s'intégreront-elles si la valeur de $f(x)$ est de la forme

$$f(x)=R_0+R_2\cos 2x+R_4\cos 4x+\ldots+R_n\cos nx,$$

n désignant un nombre pair; car le second membre peut être réduit à une fonction entière de $\cos^2 x$.

Maintenant, quelle que soit la valeur de $f(x)$, nous pouvons toujours la développer en série, et poser

$$f(x) = R_0 + R_2 \cos 2x + R_4 \cos 4x + \ldots + R_n \cos nx + \ldots$$

En prenant dans le second membre un certain nombre limité de termes, on aura une première valeur approchée de $f(x)$; en la traitant comme si elle était rigoureusement exacte, on pourra donc en déduire aussi des valeurs approchées de P et Q; et il ne restera plus qu'à les corriger par la méthode connue des approximations successives.

En résumé, nous sommes parvenus à obtenir, dans tous les cas possibles, les valeurs de P et Q exactes ou indéfiniment approchées, et par conséquent à trouver la valeur de A_m qui satisfait à l'équation

$$\text{(A)} \qquad \Sigma A_m m \cos mx + f(x)\ \Sigma A_m \cos mx = F(x).$$

La valeur de A_m est égale à $\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu (P \cos m\mu + Q \sin m\mu)$; elle s'exprime sous forme finie toutes les fois que $f(x)$ est une fonction rationnelle de $\cos^2 x$. La méthode qui nous a conduits à ces résultats est directe, mais un peu longue. Quand on examine avec soin la forme des équations qui déterminent P et Q, on en découvre une autre beaucoup plus simple que je vais exposer.

III.

SECONDE SOLUTION DU PROBLÈME (A). — SOLUTIONS DES PROBLÈMES (B) ET (C).

Pour satisfaire à l'équation (A), nous remplacerons, comme tout à l'heure, $F(x)$ par son développement, et posant

$$A_m = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu (P \cos m\mu + Q \sin m\mu),$$

nous chercherons à déterminer les deux fonctions P et Q, en sorte que l'on ait

$$\Sigma A_m m \cos mx + f(x)\ \Sigma A_m \cos mx = \frac{4}{\pi}\Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos m\mu F(\mu) d\mu.$$

Si nous admettons que P et Q satisfassent aux conditions définies

$$\mathrm{P} = 0 \text{ pour } \mu = \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{Q} = 0 \text{ pour } \mu = 0,$$

une intégration par parties nous donnera de suite

$$\Sigma \mathrm{A}_m m \cos mx = \frac{4}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \left(\cos m\mu \frac{d\mathrm{Q}}{d\mu} - \sin m\mu \frac{d\mathrm{P}}{d\mu} \right).$$

En désignant par P_x ce que devient P quand on y change μ en x, nous voyons que P_x s'évanouit à la limite $x = \frac{\pi}{2}$. On peut donc développer P_x en une série de cosinus d'arcs multiples impairs de x, ce qui donne

$$\mathrm{P}_x = \frac{4}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{P} \cos m\mu d\mu.$$

On aura de même

$$\mathrm{P}_x\, f(x) = \frac{4}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{P} f(\mu) \cos m\mu d\mu;$$

et il en résulte, en mettant pour P_x sa valeur,

$$\frac{4f(x)}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{P} \cos m\mu d\mu = \frac{4}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{P} f(\mu) \cos m\mu d\mu.$$

D'un autre côté, on a l'équation identique

$$\begin{aligned} \frac{4f(x)}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Q} \sin m\mu d\mu = {} & \frac{4}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Q} f(\mu) \sin m\mu d\mu \\ & + \frac{4}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Q}[f(x) - f(\mu)] \sin m\mu d\mu. \end{aligned}$$

En l'ajoutant membre à membre à la précédente, on obtient d'une part la quantité

$$\frac{4f(x)}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{P} \cos m\mu d\mu + \frac{4f(x)}{\pi} \Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Q} \sin m\mu d\mu,$$

qui, d'après la valeur de A_m, est précisément égale à $f(x)\Sigma A_m \cos mx$; et d'autre part la quantité

$$\frac{4}{\pi}\Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \,[P f(\mu)\cos m\mu + Q f(\mu)\sin m\mu]$$
$$+\frac{4}{\pi}\Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q[f(x) - f(\mu)]\sin m\mu d\mu,$$

laquelle doit par conséquent être équivalente aussi à $f(x)\Sigma A_m \cos mx$.

Après avoir ainsi formé les valeurs de $\Sigma A_m m\cos mx$, $f(x)\Sigma A_m \cos mx$, je les ajoute, et en faisant pour plus de simplicité

$$X = \frac{4}{\pi}\Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu \left\{\cos m\mu\left[P f(\mu) + \frac{dQ}{d\mu}\right] + \sin m\mu\left[Q f(\mu) - \frac{dP}{d\mu}\right]\right\},$$

$$Y = \frac{4}{\pi}\Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} Q[f(x) - f(\mu)]\sin m\mu d\mu,$$

je trouve

$$\Sigma A_m m\cos mx + f(x)\,\Sigma A_m \cos mx = X + Y.$$

En comparant cette équation à celle du problème, il vient

$$X + Y = \frac{4}{\pi}\Sigma \cos mx \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos m\mu \, F(\mu) d\mu.$$

La valeur de X est mise sous une forme convenable; mais il n'en est pas de même de celle de Y. Pour atteindre le but que nous nous proposons, il est nécessaire d'intervertir l'ordre des signes Σ et $\int$, ce qui donne

$$Y = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} Q[f(x) - f(\mu)]\, d\mu \,\Sigma \cos mx \sin m\mu.$$

Par les méthodes connues pour la sommation des séries on obtient

$$[f(x) - f(\mu)]\;\Sigma \cos mx \sin m\mu = \frac{[f(x) - f(\mu)]\sin\mu\cos x}{\cos 2x - \cos 2\mu},$$

et il est bon d'observer que, à cause du facteur $f(x) - f(\mu)$ qui s'és'évanouit lorsque $x=\mu$, la fraction placée dans le second membre ne devient jamais infinie. Je porte cette fraction dans la valeur de Y, et je substitue en même temps à la lettre μ une autre lettre α, ce qui est indifférent. Il vient ainsi

$$\mathrm{Y} = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{Q}_\alpha \frac{[f(x)-f(\alpha)]\sin\alpha\cos x\, d\alpha}{\cos 2x - \cos 2\alpha},$$

Q_α désignant ce que devient Q lorsqu'on y change μ en α. Mais la fonction Y ayant $\cos x$ pour facteur s'évanouit quand $x=\frac{\pi}{2}$: donc entre les limites $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, on peut développer cette fonction en une série de cosinus d'arcs multiples impairs de x. La méthode ordinaire appliquée ici nous donne

$$\mathrm{Y} = \frac{16}{\pi^2}\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos m\mu\,.\,d\mu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{Q}_\alpha[f(\mu)-f(\alpha)]\sin\alpha\cos\mu\, d\alpha}{\cos 2\mu-\cos 2\alpha},$$

et c'est sous cette forme que la valeur de Y doit être employée.

Remettons-la en effet, ainsi que celle de X, dans l'équation

$$\mathrm{X}+\mathrm{Y} = \frac{4}{\pi}\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos m\mu\,\mathrm{F}(\mu)d\mu,$$

et le résultat de la substitution sera

$$\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu(\mathrm{U}\cos m\mu - \mathrm{V}\sin m\mu) = 0,$$

U et V ayant les valeurs que voici

$$\mathrm{U} = \frac{d\mathrm{Q}}{d\mu} + \mathrm{P}f(\mu) - \mathrm{F}(\mu) + \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{Q}_\alpha\cos\mu\sin\alpha\,[f(\mu)-f(\alpha)]d\alpha}{\cos 2\mu-\cos 2\alpha},$$

$$\mathrm{V} = \frac{d\mathrm{P}}{d\mu} - \mathrm{Q}f(\mu).$$

Or, il est évident que l'équation

$$\Sigma\cos mx\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu(\mathrm{U}\cos m\mu - \mathrm{V}\sin m\mu) = 0$$

sera satisfaite si U et V sont nuls à la fois. Donc les deux équations $U = 0$, $V = 0$, sont celles qui doivent déterminer les inconnues P et Q, pourvu qu'on y joigne toutefois les conditions définies $P = 0$ pour $\mu = \frac{\pi}{2}$, $Q = 0$ pour $\mu = 0$; ce qui coïncide avec les résultats obtenus dans le numéro précédent.

Le problème (A) une fois résolu, on en déduit bien aisément les solutions des problèmes (B) et (C). Le premier de ces nouveaux problèmes peut être énoncé comme ceci :

PROBLÈME.

Soient m *un nombre impair quelconque, et* $A_1, A_3, \ldots A_m \ldots$ *des coefficiens constans inconnus. On propose de trouver la valeur de* A_m *qui satisfait à l'équation*

$$(B) \qquad \Sigma A_m \cdot \frac{m\pi}{2l} \cos \frac{m\pi x}{2l} + f(x) \Sigma A_m \cos \frac{m\pi x}{2l} = F(x)$$

pour toutes les valeurs de x *comprises entre les limites* $x = 0$, $x = l$.

La fonction $f(x)$ est essentiellement positive, et nous regardons la fonction $F(x)$ comme assujettie à la condition $F(l) = 0$.

Pour ramener ce problème au précédent, il suffira de poser $\frac{\pi x}{2l} = y$, puis de multiplier par $\frac{2l}{\pi}$ l'équation (B); il viendra

$$\Sigma A_m m \cos my + \frac{2l}{\pi} f\left(\frac{2\,ly}{\pi}\right) \Sigma A_m \cos my = \frac{2l}{\pi} F\left(\frac{2\,ly}{\pi}\right),$$

et cette nouvelle équation devra subsister entre les limites $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, comme l'équation (A) dont nous nous sommes occupés tout à l'heure. Par conséquent, si nous posons

$$A_m = \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu\, (P \cos m\mu + Q \sin m\mu) d\mu,$$

P et Q devront satisfaire aux deux équations

$$\frac{dQ}{d\mu}+\frac{2l}{\pi}\mathrm{P}f\left(\frac{2l\mu}{\pi}\right)=\frac{2l}{\pi}\mathrm{F}\left(\frac{2l\mu}{\pi}\right)-\frac{8l}{\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{Q}_\alpha\cos\mu\sin\alpha\left[f\left(\frac{2l\mu}{\pi}\right)-f\left(\frac{2l\alpha}{\pi}\right)\right]d}{\cos 2\mu-\cos 2\alpha},$$

$$\frac{d\mathrm{P}}{d\mu}-\frac{2l}{\pi}\mathrm{Q}f\left(\frac{2l\mu}{\pi}\right)=0.$$

On les simplifiera un peu en changeant les variables α et μ en d'autres variables α', μ' liées aux deux autres par les égalités

$$\alpha=\frac{\pi\alpha'}{2l},\quad \mu=\frac{\pi\mu'}{2l},$$

ou, ce qui revient au même, en remplaçant partout α et μ par $\frac{\pi\alpha}{2l}$, $\frac{\pi\mu}{2l}$, ce qui exige que l'on prenne 0 et l au lieu de 0 et $\frac{\pi}{2}$ pour limites des intégrales définies. Par ces changemens on trouvera

$$\mathrm{A}_m=\frac{2}{l}\int_0^l d\mu\left(\mathrm{P}\cos\frac{m\pi\mu}{2l}+\mathrm{Q}\sin\frac{m\pi\mu}{2l}\right),$$

P et Q étant deux fonctions de μ déterminées par les deux équations

$$\frac{dQ}{d\mu}+\mathrm{P}f(\mu)=\mathrm{F}(\mu)-\frac{2}{l}\int_0^l\frac{\mathrm{Q}_\alpha\cos\frac{\pi\mu}{2l}\sin\frac{\pi\alpha}{2l}\left[f(\mu)-f(\alpha)\right]d\alpha}{\cos\frac{\pi\mu}{l}-\cos\frac{\pi\alpha}{l}},$$

$$\frac{d\mathrm{P}}{d\mu}-\mathrm{Q}f(\mu)=0;$$

auxquelles toutefois il faudra joindre les deux conditions définies $\mathrm{P}=0$ pour $\mu=l$, $\mathrm{Q}=0$ pour $\mu=0$.

En supposant la longueur l infiniment grande, la valeur de A_m deviendra infiniment petite, et la somme $\Sigma\mathrm{A}_m\cos mx$ se transformera en une intégrale. On posera alors $\frac{m\pi}{2l}=\theta$, et l'on regardera θ comme une variable continue: puisque l'accroissement constant de m est $=2$, l'accroissement constant de θ sera égal à $\frac{\pi}{l}$, et il faudra poser $d\theta=\frac{\pi}{l}$. En faisant donc $\mathrm{A}_m=\varphi(\theta)d\theta$, les deux sommes $\Sigma\mathrm{A}_m\cos\frac{m\pi x}{2l}$, $\Sigma\mathrm{A}_m\frac{m\pi}{2l}\cos\frac{m\pi x}{2l}$

se transformeront dans les deux intégrales définies

$$\int_0^\infty \varphi(\theta) \cos \theta x d\theta, \quad \int_0^x \theta\varphi(\theta) \cos \theta x d\theta,$$

et l'équation (B) deviendra

$$\int_0^\infty \theta\varphi(\theta) \cos \theta x d\theta + f(x) \int_0^\infty \varphi(\theta) \cos \theta x d\theta = \mathrm{F}(x).$$

Cela posé, proposons-nous le problème suivant :

PROBLÈME.

Trouver la fonction $\varphi(\theta)$ qui satisfait à l'équation

$$(\mathrm{C}) \qquad \int_0^\infty \theta\varphi(\theta) \cos \theta x d\theta + f(x) \int_0^\infty \varphi(\theta) \cos \theta x d\theta = \mathrm{F}(x)$$

pour toutes les valeurs réelles et positives de x.

D'après ce qui précède, la valeur cherchée de $\varphi(\theta)$ s'obtiendra en divisant par $d\theta$ ou par $\frac{\pi}{l}$ la valeur de A_m, après qu'on y aura fait $\frac{m\pi}{2l} = \theta$, et $l = \infty$. On aura donc

$$\varphi(\theta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\mu \ (\mathrm{P} \cos \mu\theta + \mathrm{Q} \sin \mu\theta),$$

et les valeurs de P et Q seront fournies par les deux équations écrites plus haut. Mais en y introduisant la condition $l = \infty$, la première de ces équations change un peu de forme. En effet, lorsque l devient une quantité infiniment grande, il est aisé de s'assurer qu'on a

$$\frac{2}{l} \cdot \frac{\cos \frac{\pi\mu}{2l} \sin \frac{\pi\alpha}{2l}}{\cos \frac{\pi\mu}{2l} - \cos \frac{\pi\alpha}{2l}} = - \frac{8\alpha}{\pi(\mu^2 - \alpha^2)}.$$

L'équation dont nous parlons devient par conséquent

$$\frac{d\mathrm{Q}}{d\mu} + \mathrm{P} f(\mu) = \mathrm{F}(\mu) + \frac{8}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha \mathrm{Q}_\alpha [f(\mu) - f(\alpha)] d\alpha}{\mu^2 - \alpha^2}.$$

et il faudra y joindre l'autre équation $\frac{dP}{d\mu} - Qf(\mu) = 0$, et les conditions définies $P = 0$ pour $\mu = \infty$, $Q = 0$ pour $\mu = 0$. Sans qu'il soit nécessaire d'entrer dans de plus grands détails, on comprendra que ces égalités permettent de trouver les valeurs finies de P et Q toutes les fois que $f(x)$ est une fonction rationnelle entière ou fractionnaire de x^2. Dans tous les autres cas il sera aisé d'obtenir ces mêmes valeurs par la méthode des approximations successives.

IV.

SOLUTION DU PROBLÈME (D).

Appliquons maintenant notre seconde méthode à la solution du problème (D) dont voici l'énoncé.

PROBLÈME.

Soient m *un quelconque des nombres entiers successifs* 1, 2, 3, 4, 5,... et $A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots A_m \ldots$ *des coefficiens constans inconnus. On propose de déterminer ces coefficiens, de telle manière que l'on ait*

$$\Sigma A_m m \sin mx + f(x)\,\Sigma A_m \sin mx = F(x);$$

pour toutes les valeurs de x *comprises entre* o *et* π.

La fonction $f(x)$ est essentiellement positive. La fonction $F(x)$ peut être positive ou négative; mais comme le premier membre s'évanouit pour $x = 0$ et pour $x = \pi$, nous admettrons qu'on a $F(0) = 0$ et $F(\pi) = 0$.

Les conditions $F(0) = 0$, $F(\pi) = 0$ étant satisfaites, on peut développer $F(x)$ en une série de sinus pour toutes les valeurs de x comprises entre o et π. Le développement est de la forme

$$F(x) = \frac{2}{\pi}\,\Sigma \sin mx \int_0^\pi \sin m\mu\, F(\mu) d\mu.$$

L'équation (D) devient donc

$$(D')\quad \Sigma A_m m \sin mx + f(x)\,\Sigma A_m \sin mx = \frac{2}{\pi}\,\Sigma \sin mx \int_0^\pi \sin m\mu\, F(\mu)\, d\mu.$$

Pour y satisfaire, nous poserons

$$A_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi d\mu\,(P\cos m\mu + Q\sin m\mu),$$

P et Q désignant deux fonctions de μ qu'il s'agit de déterminer convenablement.

En intégrant par parties on a

$$\int P\cos m\mu d\mu = \frac{P\sin m\mu}{m} - \frac{1}{m}\int \sin m\mu\,\frac{dP}{d\mu}\,d\mu,$$

$$\int Q\sin m\mu d\mu = -\frac{Q\cos m\mu}{m} + \frac{1}{m}\int \cos m\mu\,\frac{dQ}{d\mu}\,d\mu.$$

Si donc on se rappelle que m est un nombre entier, et si l'on suppose la fonction Q assujettie aux deux conditions

$$Q = 0 \text{ pour } \mu = 0, \qquad Q = 0 \text{ pour } \mu = \pi,$$

il viendra

$$\int_0^\pi P\cos m\mu d\mu = -\frac{1}{m}\int_0^\pi \sin m\mu\,\frac{dP}{d\mu}\,d\mu,$$

$$\int_0^\pi Q\sin m\mu d\mu = \frac{1}{m}\int_0^\pi \cos m\mu\,\frac{dQ}{d\mu}\,d\mu,$$

et l'on aura

$$A_m = \frac{2}{\pi m}\int_0^\pi d\mu\left(\cos m\mu\,\frac{dQ}{d\mu} - \sin m\mu\,\frac{dP}{d\mu}\right).$$

Cette valeur de A_m nous donne tout de suite

$$\Sigma A_m m\sin mx = \frac{2}{\pi}\Sigma\sin mx\int_0^\pi d\mu\left(\cos m\mu\,\frac{dQ}{d\mu} - \sin m\mu\,\frac{dP}{d\mu}\right).$$

D'autre part, on a

$$f(x)\,\Sigma A_m\sin mx = \frac{2f(x)}{\pi}\,\Sigma\sin mx\int_0^\pi d\mu\,(P\cos m\mu + Q\sin m\mu).$$

Cette valeur se compose de deux parties que nous allons considérer l'une après l'autre. La seconde, savoir,

$$\frac{2f(x)}{\pi}\,\Sigma\sin mx\int_0^\pi Q\sin m\mu d\mu,$$

est la plus simple à traiter. Comme la fonction Q est nulle aux deux limites $\mu = 0$, $\mu = \pi$, et qu'il en est de même du produit $Qf(\mu)$, il en résulte que si l'on désigne par Q_x ce que devient Q en y changeant μ en x, on aura

$$Q_x = \frac{2}{\pi} \Sigma \sin mx \int_0^\pi Q \sin m\mu d\mu,$$

$$Q_x f(x) = \frac{2}{\pi} \Sigma \sin mx \int_0^\pi Q\, f(\mu) \sin m\mu d\mu.$$

En multipliant la première de ces égalités par $f(x)$, et la comparant ensuite à la seconde, on en déduit

$$\frac{2f(x)}{\pi} \Sigma \sin mx \int_0^\pi Q \sin m\mu d\mu = \frac{2}{\pi} \Sigma \sin mx \int_0^\pi Q\, f(\mu) \sin m\mu d\mu.$$

L'autre quantité, savoir,

$$\frac{2f(x)}{\pi} \Sigma \sin mx \int_0^\pi P \cos m\mu d\mu,$$

peut être mise sous la forme

$$\frac{2}{\pi}\Sigma \sin mx \int_0^\pi P f(\mu) \cos m\mu d\mu + \frac{2}{\pi} \int_0^\pi P[f(x) - f(\mu)] d\mu\, \Sigma \sin mx \cos m\mu,$$

ou bien, en observant que l'on a

$$\Sigma \sin mx \cos m\mu = -\frac{\sin x}{2(\cos x - \cos\mu)},$$

sous cette autre forme

$$\frac{2}{\pi} \Sigma \sin mx \int_0^\pi P f(\mu) \cos m\mu d\mu - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{P \sin x[f(x) - f(\mu)] d\mu}{\cos x - \cos\mu};$$

le dernier terme ne change pas de valeur si l'on remplace la lettre μ par la lettre α. En nommant P_α ce que P devient en vertu de ce changement, il est alors égal à

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{P_\alpha \sin x[f(x) - f(\alpha)] d\alpha}{\cos x - \cos\alpha}.$$

C'est une fonction de x qui s'évanouit, à cause du facteur $\sin x$, aux deux limites $x = 0$, $x = \pi$, et que, par conséquent, on peut, entre ces limites, développer en une série de sinus. Effectuant le développement par le procédé ordinaire, nous aurons

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{P_\alpha \sin x[f(x) - f(\alpha)] d\alpha}{\cos x - \cos\alpha} = \frac{2}{\pi^2} \Sigma \sin mx \int_0^\pi \sin m\mu d\mu \int_0^\pi \frac{P_\alpha \sin\mu[f(\mu) - f(\alpha)] d\alpha}{\cos\mu - \cos\alpha}.$$

La valeur de la quantité

$$\frac{2f(x)}{\pi} \Sigma \sin mx \int_0^\pi P \cos m\mu d\mu$$

est donc

$$\frac{2}{\pi}\Sigma\sin mx\int_0^\pi \mathrm{P}f(\mu)\cos m\mu d\mu - \frac{2}{\pi^2}\Sigma\sin mx\int_0^\pi \sin m\mu d\mu\int_0^\pi \frac{\mathrm{P}_\alpha\sin\mu[f(\mu)-f(\alpha)]d\alpha}{\cos\mu-\cos\alpha},$$

et il faut ajouter à cette dernière expression l'expression suivante :

$$\frac{2}{\pi}\Sigma\sin mx\int_0^\pi \mathrm{Q}f(\mu)\sin m\mu d\mu,$$

pour composer, d'après ce qu'on a vu, la valeur de $f(x)\,\Sigma\mathrm{A}_m\sin mx$.

Ayant écrit ainsi sous forme convenable cette valeur et celle de $\Sigma\mathrm{A}_m\, m\sin mx$, reportons-les dans l'équation (D′), et cette équation deviendra

$$\Sigma\sin mx\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\mu(\mathrm{U}\cos m\mu - \mathrm{V}\sin m\mu) = 0,$$

U et V ayant les valeurs suivantes,

$$\mathrm{U} = \frac{d\mathrm{Q}}{d\mu} + \mathrm{P}f(\mu),$$

$$\mathrm{V} = \frac{d\mathrm{P}}{d\mu} - \mathrm{Q}f(\mu) + \mathrm{F}(\mu) + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\mathrm{P}_\alpha\sin\mu[f(\mu)-f(\alpha)]d\alpha}{\cos\mu-\cos\alpha}.$$

Or il est clair que l'équation du problème sera satisfaite si l'on a $\mathrm{U}=0$ et $\mathrm{V}=0$. Donc les fonctions P et Q, desquelles dépend la valeur de A_m qui satisfait à l'équation (D), sont fournies par les deux équations

$$\frac{d\mathrm{Q}}{d\mu} + \mathrm{P}f() = 0,$$

$$\frac{d\mathrm{P}}{d\mu} - \mathrm{Q}f(\mu) + \mathrm{F}(\mu) + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{\mathrm{P}_\alpha\sin\mu[f(\mu)-f(\alpha)]d\alpha}{\cos\mu-\cos\alpha} = 0,$$

auxquelles il faut joindre les deux conditions particulières

$$\mathrm{Q} = 0 \text{ pour } \mu = 0,$$
$$\mathrm{Q} = 0 \text{ pour } \mu = \pi,$$

que précédemment nous avons supposées remplies.

Ces équations s'intègrent évidemment sous forme finie toutes les fois que $f(x)$ est une fonction rationnelle, entière ou fractionnaire, de $\cos x$. Et lorsque cela n'a pas lieu, il est du moins toujours facile d'obtenir les valeurs de P et Q exprimées en séries convergentes par la méthode connue des approximations successives.

Nous appliquerons nos équations à un seul exemple extrêmement simple; et quoique, dans cet exemple, la fonction $f(x)$ ne reste pas constamment positive entre les limites $x=0$, $x=\pi$, comme l'exige la nature physique du problème, nous les verrons néanmoins se vérifier. Nous poserons $f(x)=\cos x$, $\mathrm{F}(x)=\sin x+\sin x\cos x$; les valeurs de P et Q fournies par notre analyse seront $\mathrm{P}=-1$, $\mathrm{Q}=\sin\mu$, ainsi qu'il est aisé de le vérifier par la substitution dans nos équations. Il résulte de là que l'équation

$$\Sigma \mathrm{A}_m m \sin mx + \cos x\, \Sigma \mathrm{A}_m \sin mx = \sin x + \sin x \cos x$$

doit être satisfaite en posant

$$\mathrm{A}_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi d\mu(\sin\mu \sin m\mu - \cos m\mu).$$

Or cela arrive en effet, car on déduit de là

$$\Sigma \mathrm{A}_m \sin mx = \sin x,\quad \Sigma \mathrm{A}_m m \sin mx = \sin x,$$

valeurs qui, substituées dans l'égalité qu'on veut vérifier, rendent les deux membres identiquement égaux.

V.

SOLUTION DU PROBLÈME (E).

Notre méthode résout aussi le problème (E) sans que l'on ait à vaincre aucune difficulté nouvelle. Voici comment ce problème doit être énoncé.

PROBLÈME.

Soient m *un quelconque des nombres* 0, 1, 2, 3, 4, 5,.. *et* $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots \mathrm{A}_m, \ldots \mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \ldots \mathrm{B}_m, \ldots$ *des coefficients constants inconnus : on propose de déterminer ces coefficients de manière à satisfaire à l'équation*

$$(\mathrm{E})\quad \Sigma m(\mathrm{A}_m\cos mx + \mathrm{B}_m \sin mx) + f(x)\Sigma(\mathrm{A}_m \cos mx + \mathrm{B}_m \sin mx) = \mathrm{F}(x),$$

pour toutes les valeurs de x *comprises entre les limites* $x=-\pi$, $x=+\pi$.

D'après la nature de la question qui conduit à l'équation (E), la fonction $f(x)$ est toujours positive entre les limites $x=-\pi$, $x=\pi$. De plus, les deux fonctions $f(x)$, $\mathrm{F}(x)$, sont assujetties à satisfaire aux conditions $f(\pi)=f(-\pi)$, $\mathrm{F}(\pi)=\mathrm{F}(-\pi)$.

Puisque la fonction $F(x)$ prend la même valeur aux deux limites $x = -\pi$, $x = \pi$, on peut, entre ces limites, la développer en une série de cosinus de la forme

$$F(x) = \Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} d\mu\, F(\mu) \cos m(x-\mu),$$

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs de m comprises dans la série $0, 1, 2, 3, \ldots$ et $\frac{1}{a_m}$ désignant l'intégrale définie $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos^2 mx dx$, laquelle est égale à 2π quand $m = 0$ et seulement égale à π lorsque m est un nombre entier positif quelconque.

Cela posé, je fais

$$A_m = a_m \int_{-\pi}^{+\pi} d\mu\, (P \cos m\mu - Q \sin m\mu),$$
$$B_m = a_m \int_{-\pi}^{+\pi} d\mu\, (P \sin m\mu + Q \cos m\mu);$$

P et Q représentant deux fonctions de μ dont je pourrai disposer à volonté par la suite, mais que j'assujettis dès à présent à ne pas changer de valeur lorsqu'on y pose successivement $\mu = \pi$ et $\mu = -\pi$, de telle manière que l'on ait

$$P_\pi = P_{-\pi}, \quad Q_\pi = Q_{-\pi}.$$

En intégrant par parties, et ayant égard à ces conditions, il vient

$$A_m = -\frac{a_m}{m} \int_{-\pi}^{+\pi} d\mu \left(\sin m\mu \frac{dP}{d\mu} + \cos m\mu \frac{dQ}{d\mu} \right),$$
$$B_m = \frac{a_m}{m} \int_{-\pi}^{+\pi} d\mu \left(\cos m\mu \frac{dP}{d\mu} - \sin m\mu \frac{dQ}{d\mu} \right).$$

Substituant ces valeurs dans l'expression

$$\Sigma m\, (A_m \cos mx + B_m \sin mx),$$

on la trouve égale à

$$\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} d\mu \left[\sin m(x-\mu) \frac{dP}{d\mu} - \cos m(x-\mu) \frac{dQ}{d\mu} \right].$$

Quant à l'autre quantité

$$f(x)\, \Sigma\, (A_m \cos mx + B_m \sin mx),$$

il faut y substituer les valeurs primitives de A_m, B_m, et elle devient

$$f(x)\, \Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} d\mu [P \cos m(x-\mu) + Q \sin m(x-\mu)].$$

Elle se compose donc de deux parties, savoir,

$$f(x)\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{P}\cos m(x-\mu)d\mu,\quad f(x)\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Q}\sin m(x-\mu)d\mu,$$

dont je vais successivement m'occuper.

La première peut être mise sous une forme convenable par la transformation que voici. Soit P_x ce que devient P lorsqu'on y change μ en x. Puisque l'on a $\mathrm{P}_\pi = \mathrm{P}_{-\pi}$, $f(\pi) = f(-\pi)$, on a aussi $\mathrm{P}_\pi f(\pi) = \mathrm{P}_{-\pi} f(-\pi)$. Il résulte de là que la fonction P_x est égale à la série $\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{P}\cos m(x-\mu)d\mu$, et que par suite le produit de $f(x)$ par cette série est égal à $\mathrm{P}_x f(x)$, c'est-à-dire à

$$\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{P} f(\mu) \cos m(x-\mu)d\mu.$$

Relativement à la seconde partie, savoir,

$$f(x)\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Q}\sin m(x-\mu)d\mu,$$

elle est évidemment équivalente à

$$\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Q} f(\mu)\sin m(x-\mu)d\mu + \int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Q}[f(x)-f(\mu)]\Sigma a_m \sin m(x-\mu).$$

Il est aisé de s'assurer que

$$\Sigma a_m \sin m(x-\mu) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\sin(x-\mu)}{1-\cos(x-\mu)};$$

on a donc

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Q}[f(x)-f(\mu)]\Sigma a_m \sin m(x-\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mathrm{Q}[f(x)-f(\mu)]\sin(x-\mu)d\mu}{1-\cos(x-\mu)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \mathrm{Q}[f(x)-f(\mu)]\Sigma a_m \sin m(x-\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mathrm{Q}_\alpha[f(x)-f(\alpha)]\sin(x-\alpha)d\alpha}{1-\cos(x-\alpha)},$$

Q_α désignant ce que devient Q lorsqu'on y change μ en α. Le second membre de l'équation que je viens d'écrire étant considéré comme une fonction de x, on peut constater que cette fonction donne le même résultat quand on y pose $x = \pi$, et quand on y pose $x = -\pi$. Rien n'empêche par conséquent de la développer en série de cosinus sous la forme

$$\frac{1}{2\pi}\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} \cos m(x-\mu)d\mu \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{Q_\alpha[f(\mu)-f(\alpha)]\sin(\mu-\alpha)d\alpha}{1-\cos(\mu-\alpha)}.$$

Telle est la quantité qu'il faut ajouter à $\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} Qf(\mu)\sin m(x-\mu)d\mu$ et à $\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} Pf(\mu)\cos m(x-\mu)d\mu$ pour former la valeur complète du terme $f(x)\Sigma(A_m \cos mx + B_m \sin mx)$.

Reportons à présent dans l'équation (E) cette valeur ainsi que celles obtenues tout à l'heure pour $F(x)$ et pour $\Sigma m(A_m \cos mx + B_m \sin mx)$. Le résultat sur lequel nous tomberons sera de la forme

$$\Sigma a_m \int_{-\pi}^{+\pi} d\mu\,[U\cos m(x-\mu) + V\sin m(x-\mu)] = 0,$$

U et V ayant les valeurs suivantes,

$$U = -\frac{dQ}{d\mu} + Pf(\mu) - F(\mu) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \frac{Q(\alpha)[f(\mu)-f(\alpha)]\sin(\mu-\alpha)d\alpha}{1-\cos(\mu-\alpha)},$$
$$V = \frac{dP}{d\mu} + Qf(\mu).$$

Les équations $U=0$, $V=0$, sont donc celles qu'on devra traiter pour obtenir les valeurs de P et Q, en ayant soin toutefois d'y joindre les conditions définies $P_\pi = P_{-\pi}$, $Q_\pi = Q_{-\pi}$.

Si nous supposons que l'on ait, par exemple, $f(\mu) = \cos\mu$, $F(\mu) = -\sin\mu(1+\cos\mu)$, bien que la valeur attribuée à la fonction $f(x)$ soit étrangère à la question du mouvement de la chaleur dans laquelle le pouvoir rayonnant est nécessairement positif, les équations $U=0$, $V=0$, nous conduiront à des résultats exacts. Nous trouverons $Q=1$, $P=-\sin\mu$, valeurs faciles à vérifier, et qui donnent $A_m=0$, quel que soit m, puis $B_1=-1$, $B_2=0$, $B_3=0$,... $B_m=0$,.. Ces valeurs de A_m, B_m, doivent donc rendre identique l'équation

$$\Sigma m(A_m \cos mx + B_m \sin mx) + \cos x\,\Sigma(A_m\cos mx + B_m \sin mx)$$
$$= -\sin x(1+\cos x),$$

et c'est ce qui arrive en effet.

Les équations $U=0$, $V=0$ s'intégreront sous forme finie, toutes les fois que la quantité

$$X = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{[f(\mu)-f(\alpha)]\sin(\mu-\alpha)}{1-\cos(\mu-\alpha)}$$

pourra être ramenée à la forme

$$X = \Psi_1(\mu)\,\Pi_1(\alpha) + \Psi_2(\mu)\,\Pi_2(\alpha) + \ldots + \Psi_n(\mu)\,\Pi_n(\alpha),$$

quelles que soient d'ailleurs les fonctions $\Psi_1(\mu)$, $\Pi_1(\alpha)$, etc. ; car alors, en posant

$$\int_{-\pi}^{+\pi} Q_\alpha \Pi_1(\alpha)\,d\alpha = C_1,\ \int_{-\pi}^{+\pi} Q_\alpha \Pi_2(\alpha)\,d\alpha = C_2, \ldots \int_{-\pi}^{+\pi} Q_\alpha \Pi_n(\alpha)\,d\alpha = C_n,$$

elles deviendront

$$\frac{dQ}{d\mu} - Pf(\mu) + F(\mu) - C_1\Psi_1(\mu) - C_2\Psi_2(\mu) \ldots - C_n\Psi_n(\mu) = 0,$$

$$\frac{dP}{d\mu} + Qf(\mu) = 0.$$

En divisant ces équations par $f(\mu)$, puis faisant $\int_0^\mu f(\mu)\,d\mu = \theta$, $f(\mu)d\mu = d\theta$, et prenant θ pour variable indépendante, on n'aura plus à traiter que deux équations linéaires simultanées dans lesquelles les variables et leurs différentielles seront affectées de coefficients constants. L'intégrale complète de ces équations renfermera deux arbitraires que l'on déterminera à l'aide des conditions définies $P_\pi = P_{-\pi}$, $Q_\pi = Q_{-\pi}$: elle renfermera en outre les n constantes C_1, C_2, ... C_n, dont on calculera les valeurs à l'aide des égalités

$$\int_{-\pi}^{+\pi} Q_\alpha \Pi_1(\alpha)\,d\alpha = C_1,\quad \int_{-\pi}^{+\pi} Q_\alpha \Pi_2(\alpha)\,d\alpha = C_2, \text{ etc.},$$

et ce calcul une fois effectué, les valeurs de P et Q ne renfermeront plus en général que des quantités connues.

Je dis maintenant que X se ramenera à la forme indiquée toutes les fois que $f(x)$ sera une fonction rationnelle quelconque de $\sin x$, $\cos x$; c'est-à-dire toutes les fois que l'on aura

$$f(x) = \frac{f_1(x) + f_2(x)\sin x}{f_3(x)},$$

$f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, désignant des fonctions rationnelles et entières de $\cos x$.

En effet, il viendra, dans cette hypothèse,

$$X = \frac{\sin(\mu-\alpha)}{1-\cos(\mu-\alpha)} \cdot \frac{f_1(\mu)f_3(\alpha) - f_1(\alpha)f_3(\mu) + f_2(\mu)f_3(\alpha)\sin\mu - f_2(\alpha)f_3(\mu)\sin\alpha}{2\pi f_3(\alpha)f_3(\mu)}$$

Mais on a

$$\frac{\sin(\mu-\alpha)}{1-\cos(\mu-\alpha)} = \frac{\sin\mu+\sin\alpha}{\cos\alpha-\cos\mu}.$$

La valeur de X est donc composée de deux parties distinctes que je désignerai par X_1, X_2, et dont voici les valeurs

$$X_1 = (\sin\mu+\sin\alpha)\frac{f_1(\mu)f_3(\alpha)-f_1(\alpha)f_3(\mu)}{2\pi(\cos\alpha-\cos\mu)},$$

$$X_2 = (\sin\mu+\sin\alpha)\frac{f_2(\mu)f_3(\alpha)\sin\mu-f_2(\alpha)f_3(\mu)\sin\alpha}{2\pi(\cos\alpha-\cos\mu)};$$

or je puis prouver que chacune des deux quantités X_1, X_2, est réductible à la forme

$$\Psi_1(\mu)\Pi_1(\alpha) + \Psi_2(\mu)\Pi_2(\alpha) + \ldots + \Psi_n(\mu)\Pi_n(\alpha).$$

Cela est presque évident pour la fonction X_1; en effet, le numérateur $f_1(\mu)f_3(\alpha) - f_1(\alpha)f_3(\mu)$ étant une fonction entière de $\cos\alpha$, $\cos\mu$, et s'annulant quand on a $\cos\alpha = \cos\mu$, doit être divisible par $\cos\alpha - \cos\mu$; et il est clair que le quotient ne peut se composer que d'un nombre limité de termes de la forme $A\cos^p\mu\cos^q\alpha$.

Quant à la fonction X_2, en effectuant les calculs indiqués, je trouve

$$X_2 = \frac{f_2(\mu)f_3(\alpha)\sin^2\mu - f_2(\alpha)f_3(\mu)\sin^2\alpha}{2\pi(\cos\alpha-\cos\mu)} + \sin\alpha\sin\mu\,.\,\frac{f_2(\mu)f_3(\alpha)-f_2(\alpha)f_3(\mu)}{2\pi(\cos\alpha-\cos\mu)}.$$

La fraction

$$\frac{f_2(\mu)f_3(\alpha)\sin^2\mu - f_2(\alpha)f_3(\mu)\sin^2\alpha}{\cos\alpha-\cos\mu}$$

est égale à

$$\frac{f_2(\mu)f_3(\alpha)(1-\cos^2\mu) - f_2(\alpha)f_3(\mu)(1-\cos^2\alpha)}{\cos\alpha-\cos\mu};$$

son numérateur est donc une fonction entière de $\cos\alpha$, $\cos\mu$. Puisque cette fonction s'annule lorsqu'on pose $\cos\alpha = \cos\mu$, elle doit être divisible par $\cos\alpha - \cos\mu$, et le quotient ne peut se composer que d'un nombre limité de termes de la forme $A\cos^p\mu\cos^q\alpha$. Il en est de même, par la même raison, de la fraction

$$\frac{f_2(\mu)f_3(\alpha)-f_2(\alpha)f_3(\mu)}{\cos\alpha-\cos\mu}.$$

Donc les valeurs de X_1, X_2, et par suite, de X, se réduisent à la forme

$$\Psi_1(\mu)\,\Pi_1(\alpha) + \Psi_2(\mu)\,\Pi_2(\alpha) + \ldots + \Psi_n(\mu)\,\Pi_n(\alpha);$$

donc aussi les valeurs de A_m, B_m, peuvent être calculées sous forme finie de manière à satisfaire à l'équation (E), toutes les fois que $f(x)$ est une fonction rationnelle, entière ou fractionnaire, des deux quantités $\sin x$, $\cos x$.

La méthode très simple dont nous avons fait usage pour résoudre le problème (A) s'étend d'elle-même, comme on voit, au problème plus compliqué (E). Et cette méthode peut être regardée comme générale pour toutes les questions du genre de celles que nous avons traitées dans ce Mémoire.