JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. CHASLES

Géométrie. Analogie entre des propositions de Géométrie plane et de Géométrie à trois dimensions. - Géométrie de la sphère. - Hyperboloïde à une nappe

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 1 (1836), p. 324-334.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1__324_0>

GÉOMÉTRIE.

Analogie entre des propositions de Géométrie plane et de Géométrie à trois dimensions.— Géométrie de la Sphère. — Hyperboloïde à une nappe ;

Par M. CHASLES (*).

Si l'on fait tourner autour de deux points fixes, dans un plan, deux droites rectangulaires, leur point d'intersection décrit une circonférence de cercle; et si l'on prend sur la droite qui joint les deux points fixes, deux autres points qui soient conjugués harmoniques par rapport aux deux premiers, les distances de chaque point de la circonférence du cercle à ces deux nouveaux points sont entre elles dans un rapport constant.

Nous nous proposons de démontrer les propriétés analogues, dans l'espace, à ces deux propriétés élémentaires du cercle; lesquelles sont relatives à deux plans rectangulaires qui tournent autour de deux droites fixes, ou à deux arcs de grands cercles de la sphère qui tournent autour de deux points fixes en se coupant à angle droit.

(*) J'emploierai le plus souvent, dans les articles que M. le Rédacteur de ce *Journal* voudra bien accueillir, des considérations de Géométrie, de préférence à la voie du calcul. Quelquefois cette manière aura sur l'analyse l'avantage de la brièveté; d'autres fois, ce sera le contraire. Dans ce second cas, je prie le lecteur de voir, dans mon travail, non point seulement quelques théorèmes nouveaux, ou peut-être déjà connus, qu'on démontrerait plus aisément d'une autre manière, mais un exercice sur la méthode purement géométrique, auquel je me serai livré par goût.

Supposons d'abord que les deux droites fixes soient situées dans un même plan. Si, autour de ces deux droites, on fait tourner deux plans rectangulaires, *la droite d'intersection de ces deux plans décrira un cône du second degré qui passera par ces deux droites, et dont les sections circulaires seront dans des plans perpendiculaires à ces mêmes droites respectivement.*

En effet, quand deux plans sont rectangulaires, tout plan perpendiculaire à l'un d'eux les coupe suivant deux droites rectangulaires; donc un plan transversal perpendiculaire à l'une des deux droites fixes coupe les deux plans mobiles suivant deux droites rectangulaires : or ces deux droites passent par les deux points fixes où le plan transversal coupe les deux droites fixes; leur point d'intersection engendre donc un cercle passant par ces deux points fixes, et sur lequel s'appuie la droite d'intersection des deux plans mobiles. Ce qui démontre le théorème.

Soient (Planche I, fig. 2) SO, SO′, les deux droites fixes, et soit OmO′ la section circulaire faite dans le cône par un plan transversal perpendiculaire à la première droite SO.

La droite OO′ est un diamètre du cercle. Nous supposons, pour nous représenter la figure, que le cercle est situé dans un plan vertical, et les deux droites SO, SO′, dans un plan horizontal.

Prenons les deux points D, D′, conjugués harmoniques par rapport aux extrémités du diamètre OO′ $\left(\text{c'est-à-dire tels que l'on ait } \frac{\mathrm{DO}}{\mathrm{DO'}} = \frac{\mathrm{D'O}}{\mathrm{D'O'}}\right)$; et menons les deux droites SD, SD′; elles seront conjuguées harmoniques par rapport aux deux droites fixes SO, SO′ (c'est-à-dire qu'on aura $\frac{\sin \mathrm{DSO}}{\sin \mathrm{DSO'}} = \frac{\sin \mathrm{D'SO}}{\sin \mathrm{D'SO'}}$). Je dis que *les distances de chaque point* m *de la circonférence du cercle, aux deux droites* SD, SD′, *seront entre elles dans un rapport constant.*

Ainsi soient mp, mp' les perpendiculaires abaissées du point m sur les droites SD, SD′; il faut prouver que l'on a $\frac{mp}{mp'} = \text{constante}$.

On a $$mp = m\mathrm{D}.\sin m\mathrm{DS},\quad mp' = m\mathrm{D'}.\sin m\mathrm{D'S};$$

$$\frac{mp}{mp'} = \frac{m\mathrm{D}}{m\mathrm{D'}}\cdot\frac{\sin m\mathrm{DS}}{\sin m\mathrm{D'S}}.$$

Soient Oq, Oq' les perpendiculaires abaissées du point O sur les deux droites mD, mD'; ces deux perpendiculaires sont égales entre elles, car on

$$Oq = OD.\sin mDO,\quad Oq' = OD'.\sin mD'O;\quad \frac{Oq}{Oq'} = \frac{OD}{OD'}\cdot\frac{\sin mDO}{\sin mD'O}.$$

Or, dans le triangle DmD', on a

$$\frac{\sin mDO}{\sin mD'O} = \frac{mD'}{mD} = \text{constante} = \frac{OD'}{OD};$$

d'où $\quad OD.\sin mDO = OD'.\sin mD'O$; et, par suite, $Oq = Oq'$.

La droite OS étant perpendiculaire au plan du cercle, et les points q, q' étant les pieds des perpendiculaires abaissées du point O sur les deux droites mD, mD' comprises dans ce plan, les droites Sq, Sq' sont les perpendiculaires abaissées du point S sur ces droites mD, mD'; et ces perpendiculaires sont égales, puisque $Oq = Oq'$.

On a dans le triangle SqD, rectangle en q, $\sin mDS = \frac{Sq}{SD}$. Pareillement, $\sin mD'S = \frac{Sq'}{SD'}$, d'où, à cause de $Sq = Sq'$,

$$\frac{\sin mDS}{\sin mD'S} = \frac{SD'}{SD}.$$

Il vient donc

$$\frac{mp}{mp'} = \frac{mD}{mD'}\cdot\frac{SD'}{SD}.$$

Le rapport $\frac{mD}{mD'}$ est constant, par la propriété connue du cercle; SD, SD' sont constantes; le rapport $\frac{mp}{mp'}$ est donc constant, quelle que soit la position du point m sur la circonférence du cercle. Ce qu'il fallait démontrer.

Le rapport des sinus des angles que la droite Sm fait avec les deux droites SD, SD' est le même que celui des perpendiculaires mp, mp'; ce rapport des deux sinus est donc constant. On conclut donc, de ce que nous venons de démontrer, ce théorème :

Théorème I. *Si, autour de deux droites fixes situées dans un même plan, on fait tourner deux plans rectangulaires;*

1°. *La droite d'intersection de ces deux plans décrira un cône du second degré;*

2°. *Les plans des sections circulaires de ce cône seront perpendiculaires aux deux droites fixes, respectivement;*

3°. *Si dans le plan de ces deux droites, et par leur point de rencontre, on mène deux autres droites qui soient conjuguées harmoniques par rapport aux deux premières, les sinus des angles que chaque arète du cône fera avec ces deux nouvelles droites seront entre eux dans une raison constante.*

Nous pourrions exprimer cette troisième partie du théorème, en disant que *les distances de chaque point de la surface du cône, aux deux nouvelles droites, sont entre elles dans un rapport constant.*

Quand on a un cône du second degré, si par son sommet on mène des droites perpendiculaires à ses plans tangents, ces droites forment un second cône qui est aussi du second degré, et qui jouit de cette propriété réciproque, que ses plans tangents sont perpendiculaires aux arètes du premier (*). Ces deux cônes sont dits *supplémentaires* l'un de l'autre. Leur considération sert pour doubler les propriétés des cônes du second degré, de même que le triangle *réciproque*, ou supplémentaire, sur la sphère, sert pour doubler, ou dualiser, les propositions sphériques. Une propriété très importante de deux cônes supplémentaires, dont nous allons faire usage, c'est que *les lignes focales de l'un sont perpendiculaires respectivement aux plans des sections circulaires de l'autre* (**).

D'après cela, le théorème énoncé ci-dessus nous donne, par la considération du cône supplémentaire, le suivant:

Théorème II. *Étant donnés deux plans fixes, si un point de leur intersection commune est pris pour le sommet d'un angle droit mobile, dont les côtés se meuvent dans les deux plans fixes respectivement;*

(*) Nous avons donné la démonstration de cette proposition dans notre *Mémoire sur les propriétés générales des cônes du second degré.*

(**) *Voir* le Mémoire cité; page 13. Les lignes *focales* d'un cône du second degré sont deux droites qui jouissent de propriétés analogues à celles des foyers dans les coniques.

1°. *Le plan de cet angle droit enveloppera un cône du second degré ;*

2°. *Les lignes focales de ce cône seront perpendiculaires aux deux plans fixes, respectivement ;*

3°. *Si par la droite d'intersection de ces deux plans on mène deux autres plans fixes qui soient conjugués harmoniques par rapport aux deux premiers* (*), *les sinus des angles que le plan de l'angle mobile fera avec ces deux nouveaux plans seront entre eux dans un rapport constant.*

En observant que, dans un angle trièdre, les sinus des angles plans sont entre eux comme les sinus des angles dièdres opposés, on voit qu'on pourrait donner à la troisième partie de chacun des deux théorèmes précédents un autre énoncé.

Les propriétés des cônes du second degré donnent toujours lieu à des propriétés correspondantes des *coniques sphériques*. On a appelé ainsi les courbes à double courbure qui résultent de l'intersection d'une sphère par un cône du second degré qui a son sommet au centre de la sphère. Ce sont des *lignes de courbure* du cône. Ces courbes ont des *foyers* qui sont les points où les droites *focales* du cône percent la sphère. Les plans menés par le sommet du cône, parallèlement aux plans de ses sections circulaires, coupent la sphère suivant deux grands cercles qui jouent, par rapport aux coniques sphériques, un rôle aussi important que celui de leurs foyers. Nous avons appelé ces arcs de grands cercles les *arcs cycliques* de la courbe (**), à cause de la dénomination de *plans cycliques* que nous avions adoptée pour les plans menés par le sommet d'un cône, parallèlement aux plans de ses sections circulaires. Les propriétés des arcs cycliques d'une conique sphérique sont nombreuses. Plusieurs sont analogues aux propriétés des asymptotes dans les coniques planes. Par exemple, le trian-

---

(*) Deux plans C, D, menés par l'intersection de deux premiers plans A, B, sont dits *conjugués harmoniques* par rapport à ceux-ci, quand on a $\dfrac{\sin \widehat{C, A}}{\sin \widehat{C, B}} = \dfrac{\sin \widehat{D, A}}{\sin \widehat{D, B}}$.

(**) *Mémoire de Géométrie sur les propriétés générales des coniques sphériques*; in-4°, 1831, Bachelier.

gle formé par les deux arcs cycliques et l'arc de grand cercle tangent à la conique en un quelconque de ses points, a sa surface constante.

Ces définitions étant admises, les deux théorèmes démontrés ci-dessus donnent les deux suivants :

Théorème III. *Étant pris sur la sphère deux points fixes, si autour de ces deux points on fait tourner deux arcs de grands cercles, faisant entre eux un angle droit ;*

1°. *Le point d'intersection de ces deux arcs décrira une conique sphérique ;*

2°. *Les arcs cycliques de cette courbe seront dans des plans perpendiculaires aux rayons de la sphère qui aboutissent aux deux points fixes ;*

3°. *Si, sur l'arc de grand cercle qui joint ces deux points, on prend deux autres points, qui soient conjugués harmoniques par rapport aux deux premiers* (*)*, le rapport des sinus des arcs menés de chaque point de la conique à ces deux nouveaux points, sera constant.*

Théorème IV. *Étant donnés sur la sphère deux arcs de grands cercles fixes, si l'on fait mouvoir un arc de grand cercle égal à un quadrant, de manière que ses deux extrémités glissent sur les deux arcs fixes ;*

1°. *Cet arc mobile enveloppera une conique sphérique ;*

2°. *Les foyers de cette courbe seront les pôles des deux arcs de grands cercles fixes ;*

3°. *Si, par le point d'intersection de ces deux arcs, on mène deux arcs de grands cercles, conjugués harmoniques par rapport aux deux premiers* (**)*, les sinus des inclinaisons du quadrant mobile sur ces*

(*) Deux points c, d, pris sur l'arc de grand cercle qui passe par deux points donnés a, b, sont conjugués harmoniques par rapport à ces deux-ci, quand on a

$$\frac{\sin . ca}{\sin . cb} = \frac{\sin . da}{\sin . db}.$$

(**) Deux arcs de grands cercles C, D, menés par le point d'intersection de deux autres arcs de grands cercles A, B, sont conjugués harmoniques par rapport à ceux-ci, quand on a

$$\frac{\sin . \widehat{C, A}}{\sin . \widehat{C, B}} = \frac{\sin . \widehat{D, A}}{\sin . \widehat{D, B}}.$$

deux nouveaux arcs, seront entre eux dans un rapport constant.

Maintenant considérons deux droites situées d'une manière quelconque dans l'espace, et faisons tourner autour d'elles deux plans rectangulaires; la surface engendrée par leur droite d'intersection devient un hyperboloïde; et les analogies que nous avons trouvées, dans le théorème I, entre le cône et le cercle, se conservent dans cet hyperboloïde.

Voici le théorème qui les exprime :

Théorème V. *Si, autour de deux droites fixes, situées d'une manière quelconque dans l'espace, on fait tourner deux plans rectangulaires,*

1°. *La droite d'intersection de ces deux plans engendrera un hyperboloïde à une nappe ;*

2°. *Les plans des sections circulaires de cet hyperboloïde seront perpendiculaires aux deux droites respectivement ;*

3°. *On pourra mener, d'une infinité de manières, deux autres droites dans l'espace, telles que les distances de chaque point de l'hyperboloïde à ces deux droites seront entre elles dans un rapport constant.*

En effet, concevons un plan transversal perpendiculaire à l'une des deux droites fixes, autour desquelles tournent les deux plans rectangulaires; il coupera ces deux plans suivant deux droites qui seront rectangulaires, comme dans le cas où les deux droites fixes sont situées dans un même plan. Donc la droite d'intersection des deux plans mobiles s'appuie sur la circonférence de cercle située dans le plan transversal, et qui a pour diamètre la droite qui joint les deux points où ce plan rencontre les deux droites fixes. Or, cette droite d'intersection des deux plans mobiles s'appuie sur les deux droites fixes. On conclut de là qu'elle engendre un hyperboloïde; car prenons trois positions de cette droite génératrice, et considérons-les comme les trois directrices d'un hyperboloïde ; cet hyperboloïde passera par les deux droites fixes, puisque ces trois directrices s'appuient sur ces deux droites; de plus, cet hyperboloïde passera par la circonférence du cercle, parce qu'il passera par cinq points de cette courbe, qui sont ceux où les deux droites fixes et les trois positions de la droite mobile, prises pour directrices de l'hyperboloïde, s'appuient sur cette circonférence. Ainsi, cette circonférence est tout entière sur l'hyperboloïde. Il en résulte que la droite d'intersection de deux plans rectangulaires quelconques, menés par les deux droites fixes, a trois points communs avec l'hyperboloïde; lesquels points sont situés sur la circonférence et sur les deux droites fixes; cette droite est donc tout entière sur l'hyperboloïde.

Ainsi, il est démontré que *quand deux plans rectangulaires tournent autour de deux droites situées d'une manière quelconque dans l'espace, leur droite d'intersection engendre un hyperboloïde à une nappe dont les sections circulaires sont dans des plans perpendiculaires aux deux droites respectivement.*

MM. Hachette et Binet, en démontrant par l'analyse la première partie de ce théorème (*Correspondance polytechnique*, t. II, p. 71), avaient bien remarqué que l'hyperboloïde n'était pas d'une construction générale, parce que son équation, rapportée à ses trois axes principaux ne contenait que deux constantes. Mais ces deux géomètres n'avaient pas recherché à quel fait géométrique répondait ce résultat de l'analyse. Notre démonstration montre que le caractère particulier de l'hyperboloïde consiste en ce que les plans de ses sections circulaires sont perpendiculaires respectivement à deux génératrices.

L'hyperboloïde jouit de cette autre propriété caractéristique, que chacun de ses points a ses distances à deux droites fixes dans un rapport constant; et il existe une infinité de systèmes de deux droites pour lesquelles cela a lieu; de sorte que le rapport étant donné, les deux droites pourront être déterminées.

Cette proposition est la troisième partie du théorème que nous avons énoncé; en voici la démonstration.

Soit OO′ la droite qui mesure la plus courte distance des deux droites OA, O′A′, autour desquelles on fait tourner les deux plans rectangulaires. Par cette droite OO′ menons le plan perpendiculaire à la droite OA; il coupera l'hyperboloïde suivant une circonférence de cercle OmO', ainsi que nous l'avons démontré.

Soit μ un rapport donné; sur la droite OO′, et sur son prolongement, je prends deux points D, D′, tels que l'on ait $\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{OD'}} = \frac{\mathrm{O'D}}{\mathrm{O'D'}} = \mu$; et par ces deux points, respectivement, je mène deux droites DB, D′B′, perpendiculaires à la droite OO′, et telles que l'on ait

$$\frac{\sin(OA,\ DB)}{\sin(OA,\ D'B')} = \frac{\sin(O'A',\ DB)}{\sin(O'A',D'B')} = \mu\,(*);$$

je dis que ces deux droites DB, D'B', jouiront de cette double propriété :

1°. Que le rapport des distances de chaque point m de la circonférence OmO', à ces deux droites, est constant et égal à $\frac{OD}{OD'} = \mu$;

2°. Que le rapport des distances de chaque point de l'une quelconque des deux droites OA, O'A', à ces deux mêmes droites DB, D'B', est aussi constant, et égal à μ.

En effet, la perpendiculaire abaissée du point m sur la droite DB est égale à $mD.\sin.mDB$ (Planche I, fig. 3); et la perpendiculaire abaissée du même point sur la droite D'B' est égale à $mD'.\sin.mD'B'$. Le rapport de ces deux perpendiculaires est donc égal à

$$\frac{mD}{mD'} \cdot \frac{\sin.mDB}{\sin.mD'B'}.$$

Or, on a dans l'angle trièdre dont les trois arètes sont DO, Dm, DB', et dont l'angle plan $\widehat{ODB}$ est droit, $\cos.mDB = \sin.mDO.\cos.(mDO, ODB)$.

Pareillement,

$$\cos.mD'B' = \sin.mD'O.\cos.(mD'O,\ OD'B').$$

Donc.
$$\frac{\cos.mDB}{\cos.mD'B'} = \frac{\sin.mDO}{\sin.mD'O} \cdot \frac{\cos.(mDO,\ ODB)}{\cos.(mD'O, OD'B')}.$$

On a
$$\frac{\sin.mDO}{\sin.mD'O} = \frac{mD'}{mD} = \text{const.} = \frac{OD'}{OD};$$

et
$$\frac{\cos.(mDO,\ ODB)}{\cos.(mD'O,\ OD'B')} = \frac{\sin(OA,\ DB)}{\sin(OA,\ D'B')} = \frac{OD}{OD'}.$$

(*) On voit que cela se réduit à prendre deux points D, D', tels que le rapport des distances de chacun des deux points O, O', à ces deux points, soit égal à μ; et quant à la direction des droites DB, D'B', qu'on mène par le point O une parallèle Oa' à O'A', et qu'on cherche deux droites, Ob, Ob', telles que le rapport des distances de chaque point de l'une quelconque des deux OA, Oa', à ces deux droites, soit égal à μ; les droites DB, D'B' devront être parallèles à Ob, Ob', respectivement.

Les deux points D, D', sont conjugués harmoniques par rapport aux deux O, O'; et les deux droites Ob, Ob', sont conjuguées harmoniques par rapport aux deux OA, Oa'.

Donc, $$\frac{\cos.mDB}{\cos.mD'B'} = 1.$$

Donc les angles mDB et $mD'B'$ sont égaux, et l'on a..... $\sin mDB = \sin mD'B'$; et par conséquent le rapport des perpendiculaires abaissées du point m sur les deux droites DB, DB', est simplement $\frac{mD}{mD'} = \frac{OD}{OD'} = \mu$. C. Q. F. P.

Maintenant il nous faut prouver que les distances d'un point quelconque a, de la droite OA, aux deux droites DB, D'B', sont encore entre elles dans le rapport $\frac{OD}{OD'}$.

Que d'un point a de OA on abaisse une perpendiculaire aq sur Db parallèle à OA, du point q une perpendiculaire qp sur DB; ap sera perpendiculaire sur DB; et l'on aura dans le triangle apq rectangle en q,

$$\overline{ap}^2 = \overline{aq}^2 + \overline{qp}^2 = \overline{aq}^2 + \overline{qD}^2.\sin^2.qDB.$$

Pareillement ap' étant la perpendiculaire abaissée du point a sur la seconde droite D'B', on aura

$$\overline{ap'}^2 = \overline{aq'}^2 + \overline{q'p'}^2 = \overline{aq'}^2 + \overline{q'D'}^2 \sin^2.q'D'B'.$$

Or on a $$\frac{\sin.qDB}{\sin.q'D'B'} = \frac{OD}{OD'};\quad aq = OD,\quad aq' = OD';$$

il vient donc

$$\overline{ap}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{aO}^2.\sin^2.qDB,$$

et $$\overline{ap'}^2 = \overline{OD'}^2 + \overline{aO}^2.\frac{\overline{OD'}^2}{\overline{OD}^2}.\sin^2.qDB = \frac{\overline{OD'}^2}{\overline{OD}^2}[\overline{OD}^2 + \overline{aO}^2.\sin^2.qDB];$$

$$\overline{ap'}^2 = \frac{\overline{OD'}^2}{\overline{OD}^2}.\overline{ap}^2.$$

D'où $\frac{ap}{ap'} = \frac{OD}{OD'}$. C. Q. F. D.

Il résulte de là, sans qu'il soit besoin d'une nouvelle démonstration, que les distances d'un point quelconque de la seconde droite O'A', aux deux droites DB, D'B', sont aussi entre elles dans le rapport $\frac{OD}{OD'}$.

Ainsi il est prouvé que, si l'on demande le lieu géométrique d'un point dont les distances aux deux droites DB, D'B' soient entre elles dans le rapport de OD à OD', ce lieu sera une surface qui passera par les deux droites OA, O'A', et par la circonférence de cercle OmO'. Or ce lieu sera évidemment une surface du second degré, parce que la formule de géométrie analytique qui donne le carré de la distance d'un point à une droite, contient les coordonnées de ce point au second degré; ce lieu sera donc un hyperboloïde à une nappe, passant par les deux droites OA, O'A', et par la circonférence de cercle OmO'. Mais il n'existe qu'un hyperboloïde qui satisfasse à cette double condition, c'est celui qui est engendré par l'intersection de deux plans rectangulaires tournant autour des deux droites OA, O'A'; donc cet hyperboloïde jouit de la propriété que les distances de chacun de ses points aux deux droites DB, D'B' sont entre elles dans un rapport constant.

Ainsi le théorème V est démontré.

On prouverait aisément que chaque point de la droite Oa', menée parallèlement à la droite O'A', a ses distances aux deux droites DB, D'B', dans le rapport μ; par conséquent cette droite est sur l'hyperboloïde. Pareillement la parallèle à la droite OA, menée par le point O', est sur l'hyperboloïde. On conclut de là que les plans tangents à l'hyperboloïde, aux points O, O', sont parallèles entre eux et perpendiculaires à la droite OO'; ce qui prouve que ces points sont deux sommets de la surface.