JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

SAINT-GUILHEM

Note relative à la détermination des plans principaux d'une surface du second degré rapportée à trois axes quelconques

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 1 (1836), p. 317-323.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1__317_0>

NOTE

Relative à la détermination des plans principaux d'une surface du second degré rapportée à trois axes quelconques ;

PAR M. S^T GUILHEM,

Ingénieur des Ponts-et-Chaussées.

Soit

$$(1)\quad \begin{cases} Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dyz + Ezx + Fxy = Gx + Hy + Kz + T, \\ \text{ou, pour abréger,}\quad \Phi(x, y, z) = \varphi(x, y, z) \end{cases}$$

l'équation de la surface dont il s'agit. Menons par un point arbitraire (x_i, y_i, z_i) une droite dont l'unité de longueur projetée sur les axes des x, des y, des z, parallèlement aux plans des yz, zx, xy, ait pour projections sur ces axes les trois quantités a, b, c. Cette droite sera représentée par les trois équations

$$(2)\qquad x = x_i + ar,\quad y = y_i + br,\quad z = z_i + cr,$$

r étant la distance du point (x_i, y_i, z_i) au point (x, y, z). Si l'on met pour x, y, z ces valeurs dans l'équation (1), elle prendra la forme.. $Pr^2 + Qr + R = 0$.

Pour avoir l'équation d'un plan diamétral qui divise en deux parties égales toutes les cordes parallèles à la droite (2), il suffira évidemment de poser $Q = 0$, ou bien

$$(3)\quad (2Aa + Ec + Fb)x_i + (2Bb + \ldots)y_i + (2Cc + \ldots)z_i + S = 0,$$

en désignant par S le terme constant.

Pour que ce plan soit un plan principal, il faut qu'en décrivant de l'origine des coordonnées comme centre, avec un rayon égal à l'unité, une sphère, le plan diamétral de cette sphère, conjugué aux cordes parallèles à la droite (2), soit parallèle à ce plan. Désignons par α, β, γ les angles que les axes des z, des x et des y font respectivement avec les axes des y, des z et des x; l'équation de la sphère sera

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2+2yz\cos\alpha+2zx\cos\beta+2xy\cos\gamma=1, \\ \text{ou pour abréger, } \Psi(x,y,z)=1\,; \end{array}\right.$$

l'équation du plan diamétral qui divise en deux parties égales les cordes parallèles à la droite (2), sera

$$(5)\quad 2(a+c\cos\beta+b\cos\gamma)x_{,}+2(b+\ldots)y_{,}+2(c+\ldots)z_{,}=0,$$

Pour que ce plan soit parallèle au plan (3), il faut que l'on ait

$$(6)\qquad \frac{2\mathrm{A}a+\mathrm{E}c+\mathrm{F}b}{2(a+c\cos\beta+b\cos\gamma)}=\frac{2\mathrm{B}b+\ldots}{2(b+\ldots)}=\frac{2\mathrm{C}c+\ldots}{2(c+\ldots)}=\lambda.$$

Désignons par L, M, N, P, Q, R les coefficients de $x^2, y^2, z^2, yz, zx, xy$ dans la fonction $\Phi(x,y,z)-\lambda\Psi(x,y,z)$, en ayant soin de réduire les trois derniers à la moitié de leur valeur. On aura évidemment les trois équations suivantes :

$$(7)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathrm{L}a+\mathrm{R}b+\mathrm{Q}c=0, \\ \mathrm{R}a+\mathrm{M}b+\mathrm{P}c=0, \\ \mathrm{Q}a+\mathrm{P}b+\mathrm{N}c=0. \end{array}\right.$$

Le terme constant étant égal à 0 dans ces trois équations, le dénominateur commun des valeurs de a, b, c doit aussi être égal à 0 ; car ces valeurs ne peuvent pas être nulles toutes trois à la fois. Formant ce dénominateur, d'après la formule connue, nous aurons immédiatement

$$\mathrm{L}(\mathrm{MN}-\mathrm{P}^2)+\mathrm{R}(\mathrm{PQ}-\mathrm{NR})+\mathrm{Q}(\mathrm{PR}-\mathrm{MQ})=0,$$

ou bien,

$$(8)\quad \mathrm{LMN}-\mathrm{LP}^2-\mathrm{MQ}^2-\mathrm{NR}^2+2\mathrm{PQR}=0.$$

Cette équation est du troisième degré par rapport à λ.

Ajoutons que ses trois racines sont toujours réelles. Pour le démontrer, prenons λ de manière que $MN - P^2 = 0$, c'est-à-dire de manière que $(B - \lambda)(C - \lambda) - (\frac{1}{2}D - \lambda\cos\alpha)^2 = 0$. Il est facile de voir que cette équation admettra deux racines réelles, l'une qui rendra M et N négatifs, l'autre qui les rendra positifs. En effet, si l'on prend successivement $\lambda = -\infty$, $\lambda = B$ ou $= C$, $\lambda = \infty$, on a nécessairement deux variations de signes; donc cette équation a deux racines réelles, l'une comprise entre l'infini négatif et la plus petite des deux quantités B et C, l'autre entre la plus grande de ces deux quantités et l'infini positif. Soient m et n ces deux racines : si on les substitue dans le premier membre de l'équation (8) mis sous la forme $-(MQ^2 + NR^2 + 2\sqrt{MN}.QR)$, elles donneront la première un résultat positif, la seconde un résultat négatif. Observons d'ailleurs que le terme dépendant de λ^3 dans le premier membre de l'équation (8), est le suivant :

$$-\lambda^3(1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma),$$

et que la quantité comprise entre parenthèses dans ce terme est le quarré du volume d'un parallélépipède dont les arètes contiguës coïncideraient en direction avec les axes et seraient toutes trois égales à l'unité (Voyez *Géométrie* de Legendre, page 300). Donc si l'on fait successivement $\lambda = \infty$, $\lambda = m$, $\lambda = n$, $\lambda = -\infty$, on aura trois variations de signes. Donc l'équation (8) a ses trois racines réelles; à chaque valeur de λ il correspond une valeur de $\frac{a}{c}$ et de $\frac{b}{c}$; et comme c est alors donné par la formule

$$c^2\left(\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} + 1 + 2\frac{b}{c}\cos\alpha + 2\frac{a}{c}\cos\beta + 2\frac{a}{c}\cdot\frac{b}{c}\cos\gamma\right) = 1,$$

on pourra toujours trouver pour chaque valeur de λ les valeurs des trois quantités a, b, c qui détermineront la direction d'un plan principal. La surface donnée aura donc trois plans principaux, lesquels seront nécessairement rectangulaires entre eux.

Menons par l'origine trois plans parallèles aux trois plans dont nous venons de déterminer la direction et rapportons la surface aux trois axes suivant lesquels ces trois plans se coupent; l'équation résultante sera de la forme

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 = \text{une fonction linéaire de } x, y, z:$$

les trois quantités A', B', C', sont faciles à déterminer, ou plutôt elles le sont déjà; en effet, désignons par a, b, c, les projections de l'unité de longueur du nouvel axe des x sur les anciens axes; par x' le nouvel x pour le distinguer de l'ancien : on aura

$$x = ax' + \ldots, \quad y = bx' + \ldots, \quad z = cx' + \ldots;$$

donc le coefficient de x^2 dans la transformée, sera

$$Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 + Dbc + Eca + Fab.$$

Or, observons que si l'on multiplie les deux termes du premier membre des équations (6) par a, les deux termes du deuxième membre par b, les deux termes du troisième par c, qu'on ajoute ensuite les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux, cette dernière somme sera égale à 2, la première sera égale au double de la quantité précédente; d'où l'on conclura que la quantité précédente est égale à λ. Donc A' est une des racines de l'équation (8). On ferait voir de même que B', C', sont deux racines de la même équation. Donc A', B', C', sont les trois valeurs λ qu'on a déjà employées pour déterminer les directions des nouveaux axes.

Déterminons maintenant la position des trois plans principaux. Si la surface a un centre à une distance finie, les trois plans principaux passeront par ce point: en désignant par $2T'$ ce que devient $\varphi(x, y, z)+T$, lorsqu'on met pour x, y, z, les coordonnées du centre, l'équation de la surface rapportée à son centre et à ses axes principaux sera

$$\frac{x^2}{\sqrt{\left(\frac{T'}{A'}\right)}^2} \pm \frac{y^2}{\sqrt{\left(\frac{T'}{B'}\right)}^2} \pm \frac{z^2}{\sqrt{\left(\frac{T'}{C'}\right)}^2} = 1:$$

on suppose qu'on a pris pour axe des x un des trois axes principaux qui rencontre la surface.

Si la surface a son centre à une distance infinie, l'équation (8) est satisfaite en faisant $\lambda = 0$; car si l'on fait $\lambda = 0$ dans les équations (7), ces équations coïncident, à une constante près, avec celles qui servent à déterminer les coordonnées du centre. Donc le dénominateur commun de ces valeurs est égal à o. Donc l'équation (8) est satisfaite.

Supposons qu'on ait pris pour axe des x la droite pour laquelle on a $\lambda = 0$: cette droite ne rencontre la surface qu'en un seul point, car on a, dans cette hypothèse,

$$2Aa + Ec + Fb = 0, \quad 2Bb + \ldots = 0, \quad 2Cc + \ldots = 0;$$

par conséquent, la droite dont il s'agit est nécessairement représentée par les équations

$$2Ax + Ez + Fy = 0, \quad 2By + \ldots = 0, \quad 2Cz + \ldots = 0:$$

or l'intersection de cette droite avec la surface est la même que celle de cette droite avec le plan $\varphi(x, y, z) = 0$. L'équation de la surface se réduira donc dans ce cas à la forme

$$B'y^2 + C'z^2 = Gx + Hy + Kz + T,$$

laquelle pourra encore se transformer ainsi,

$$\frac{(y-\eta)^2}{2\left(\frac{G}{2B'}\right)} \pm \frac{(z-\zeta)^2}{2\left(\frac{G}{2C'}\right)} = x - \xi.$$

On suppose dans cette équation que le sens des x positifs a été choisi convenablement.

Si l'on transporte les axes parallèlement à eux-mêmes au point (ξ, η, ζ), on aura l'équation

$$\frac{y^2}{2\left(\frac{G}{2B'}\right)} \pm \frac{z^2}{2\left(\frac{G}{2C'}\right)} = x,$$

qui est celle de la surface rapportée à son diamètre principal. Les deux plans des zx et des xy sont les seuls plans principaux de la surface; le troisième est à l'infini.

Examen du cas où la surface donnée est représentée par l'équation

$$\frac{x^2}{p'^2} + \frac{y^2}{q'^2} + \frac{z^2}{r'^2} = 1.$$

Si l'on fait $\lambda = \frac{1}{t}$, l'équation (8), appliquée au cas actuel, devient

$$t^3 - (p'^2 + q'^2 + r'^2)t^2 + (q'^2r'^2 \sin^2\alpha + r'^2p'^2 \sin^2 \mathcal{C} + p'^2q'^2 \sin^2\gamma)t \\ - p'^2q'^2r'^2 \mathrm{v}^2 = 0.$$

en posant

$$\mathrm{v} = \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\mathcal{C} - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\mathcal{C}\cos\gamma}:$$

les trois racines de cette équation donneront visiblement les carrés des trois demi-axes principaux.

Cette équation montre en même temps que si un ellipsoïde est rapporté à trois diamètres conjugués quelconques, 1°. la somme des quarrés des demi-axes conjugués est constante; 2°. la somme des carrés des parallélogrammes construits sur les demi-axes conjugués pris deux à deux est constante; 3°. le carré du parallélépipède construit sur les demi-axes conjugués est constant.

On trouverait d'une manière semblable les relations analogues pour les hyperboloïdes.

Examen du cas où la surface donnée est représentée par une équation de la forme $\frac{y^2}{2q'} + \frac{z^2}{2r'} = x$.

J'appellerai les tangentes à la surface qui coïncident avec les axes des y et des z, les *tangentes conjuguées*, correspondantes au diamètre qui coïncide avec l'axe des x. J'appellerai $2q'$ et $2r'$ les paramètres conjugués du diamètre qui coïncide avec l'axe des x, relatifs aux tangentes qui coïncident avec les axes des y et des z. Si les axes sont rectangulaires, ces paramètres sont les paramètres principaux de la surface.

Cela posé, soit comme précédemment $\lambda = \frac{1}{t}$ l'équation (8) appliquée au cas actuel devient

$$t^2 - (2r' \sin^2\mathcal{C} + 2q' \sin\gamma^2)t + 4p'q'\mathrm{v}^2 = 0.$$

Les deux racines de cette équation donneront les deux paramètres principaux de la surface.

Cette équation démontre en même temps les théorèmes suivants : Lorsqu'un paraboloïde elliptique est rapporté à l'un quelconque de ses diamètres et à deux tangentes conjuguées correspondantes, si l'on prend sur le diamètre à partir de l'origine une longueur égale à l'unité, sur chacune des deux tangentes correspondantes à ce diamètre une longueur égale à la racine quarrée du paramètre relatif à cette tangente, 1°. la somme des quarrés des parallélogrammes qui ont pour côté commun la longueur prise sur ce diamètre, et pour l'autre côté la longueur prise sur chacune des tangentes conjuguées, est constante; 2°. le quarré du volume ou simplement le volume du parallélépipède construit sur les longueurs qu'on a prises sur le diamètre et sur les tangentes conjuguées est constant (*).

On trouverait de la même manière, les relations analogues pour le paraboloïde hyperbolique. Ces relations n'avaient pas, je crois, encore été remarquées.

(*) Après avoir trouvé ces théorèmes par la méthode qui vient d'être indiquée, je me suis aperçu qu'on pouvait les déduire fort simplement des relations connues entre les diamètres principaux et les diamètres conjugués d'un ellipsoïde; en effet, soient a, b, c les trois diamètres principaux de l'ellipsoïde ; a', b', c' trois diamètres conjugués; α, β, γ les angles que les diamètres c', b', a' font respectivement avec les diamètres b', a', c' : on aura les trois relations suivantes

$$(1)\quad \begin{cases} a^2+b^2+c^2=a'^2+b'^2+c'^2 \\ b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2=b'^2c'^2\sin^2\alpha+c'^2a'^2\sin^2\beta+a'^2b'^2\sin^2\gamma \\ a^2b^2c^2=a'^2b'^2c'^2\mathrm{v}^2, \end{cases}$$

v^2 désignant le quarré du volume du parallélépipède dont les arètes contiguës coïncident en direction avec les diamètres a', b', c' et sont toutes trois égales à l'unité.

Divisons la première des équations (1) par a^2 ; la deuxième par a^3; la troisième par a^4. Faisons croître ensuite a, b, c, a', b', c' indéfiniment, mais de manière qu'à la limite $\frac{a}{a'}=1$, $\frac{b^2}{a}=q$, $\frac{c^2}{a}=r$, $\frac{b'^2}{a'}=q'$, $\frac{c'^2}{a'}=r'$: nous aurons les relations

$$\begin{gathered} 1=1, \\ q+r=q'\sin^2\gamma+r'\sin^2\beta, \\ qr=q'r'\mathrm{v}^2, \end{gathered}$$

lesquelles donnent lieu aux théorèmes énoncés dans le texte.