JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JACOBI

Formule pour la transformation d'une classe d'intégrales définies

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 1 (1836), p. 195-196.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1__195_0>

FORMULE

Pour la transformation d'une classe d'intégrales définies;

PAR M. JACOBI.

Dans un des derniers cahiers du Journal de M. Crelle (tome XV, page 1), se trouve un mémoire de M. Jacobi sur la transformation des intégrales définies. Ce mémoire renferme une formule remarquable dont nous croyons devoir transcrire ici la démonstration. Soit $f(z)$ une fonction de z développable en série ordonnée suivant les puissances entières et positives de z et $f^{(i)}(z)$ sa dérivée de l'ordre i, i étant un nombre entier positif. M. Jacobi démontre que l'on a

$$(1)\quad \int_0^\pi f(\cos x)\cos ix\,dx = \frac{1}{1.3\ldots(2i-1)}\int_0^\pi f^{(i)}(\cos x)\sin^{2i} x\,dx.$$

L'équation (1) se vérifie immédiatement quand $f(z) = Az^p$, A étant une constante et p un nombre entier positif. En effet si p est $< i$, les deux membres de cette équation sont alors nuls tous les deux : il en est de même quand, p étant $> i$, la différence $p - i$ est impaire. Enfin, quand $p - i$ est un nombre pair, la formule (1), en y faisant $f(z) = Az^p$, devient

$$(2)\quad \int_0^\pi \cos^p x \cos ix\,dx = \frac{p(p-1)\ldots(p-i+1)}{1.3\ldots(2i-1)}\int_0^\pi \sin^{2i} x \cos^{p-i} x\,dx,$$

résultat exact, comme on peut s'en convaincre en remplaçant les deux intégrales définies qui s'y trouvent par leurs valeurs connues. L'équation (1) ayant donc lieu quand $f(z) = Az^p$, il est évident qu'elle a lieu aussi pour une fonction $f(z)$ développable en série de la forme $A_0 + A_1 z + A_2 z^2 +$ etc. M. Jacobi démontre cette équation de plusieurs manières. Nous renverrons à son mémoire les lecteurs qui désireraient de plus grands détails sur ce sujet. Contentons-nous d'observer que, d'après ses calculs, la formule (1) est exacte encore pour une fonction $f(z)$ non développable en série de la forme...... $A_0 + A_1 z + A_2 z^2 +$ etc. : il suffit qu'aucune des quantités $f(\cos x)$, $f'(\cos x), \ldots f^{(i-1)}(\cos x)$ ne devienne infinie lorsque x croît d'une manière continue de 0 à π. On voit par là que la formule (2) subsiste lors même que p n'est pas un nombre entier, pourvu qu'on ait $p > i - 1$: on la vérifiera aisément par exemple en y posant $i = 1$, $p = \frac{1}{2}$.

Les intégrales de la forme $\int_0^\pi f(\cos x) \cos ixdx$ se présentent en analyse lorsqu'on veut développer, comme on a souvent besoin de le faire, une fonction de x en série de cosinus. Malheureusement le second membre de la formule (1) renferme la dérivée de l'ordre i de la fonction $f(\cos x)$: la difficulté qu'on éprouve en général à former cette dérivée quand le nombre i est un peu grand, restreindra sans doute beaucoup l'usage de la transformation ingénieuse imaginée par M. Jacobi.