JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

JOSEPH LIOUVILLE

Mémoire sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries de sinus et de cosinus

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 1 (1836), p. 14-32.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1836_1_1__14_0>

MÉMOIRE

Sur le développement des fonctions ou parties de fonctions en séries de sinus et de cosinus;

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

1. On connaît la méthode dont les géomètres ont surtout fait usage dans ces dernières années, pour intégrer les équations aux différences partielles auxquelles on ramène la solution de la plupart des problèmes physico-mathématiques. Cette méthode consiste, comme on sait, à représenter l'intégrale complète de l'équation aux différences partielles par la somme d'un nombre infini d'intégrales particulières contenant chacune une ou plusieurs constantes arbitraires, et à disposer ensuite de ces constantes de manière à satisfaire aux conditions définies propres à chaque cas. Ainsi, dans la *Théorie de la chaleur* que nous prendrons pour exemple, si l'on veut déterminer, en fonction du temps t et de l'abscisse x, la température u qui a lieu en chaque point d'une barre métallique homogène (recouverte d'une substance non conductrice) dont l'état initial est connu et dont les deux bouts sont entretenus à la température fixe $0°$, on aura d'abord l'équation aux différences partielles $\frac{du}{dt} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2}$, a^2 étant le rapport de la conductibilité intérieure de cette barre à sa chaleur spécifique. En plaçant l'origine des coordonnées à l'une des extrémités de la barre, et nommant l l'abscisse de l'autre extrémité, il faudra ensuite satisfaire aux deux conditions définies $u=0$ pour $x=0$, $u=0$ pour $x=l$, et à la condition de l'état initial que l'on peut écrire ainsi $u=f(x)$ pour $t=0$. Or, pour cela, on observera que l'intégrale complète de

l'équation $\frac{du}{dt} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2}$ peut être représentée par l'expression sommatoire $u = \Sigma e^{-m^2t}(A_m \sin amx + B_m \cos amx)$, le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs possibles des constantes m, A_m, B_m. Pour que cette valeur se réduise à zéro, quel que soit le temps t, lorsqu'on y pose $x = 0$ ou $x = l$, il faut que l'on ait $B_m = 0$, et qu'en outre les valeurs de m satisfassent à l'équation $\sin aml = 0$, laquelle donne $m = 0$, $m = \pm \frac{\pi}{al}$, $m = \pm \frac{2\pi}{al}, \ldots$ Comme les termes de la valeur de u relatifs à deux valeurs de m égales et de signes contraires, peuvent être groupés en un seul, et que le terme relatif à $m = 0$ disparaît de lui-même, nous écrirons simplement $u = \Sigma A_i e^{-\frac{i^2t}{a^2l^2}} \sin \frac{i\pi x}{l}$, ayant soin de remplacer A_m par A_i pour la régularité de la notation. Et actuellement le signe Σ ne s'étendra plus qu'aux valeurs de i comprises dans la série des nombres entiers positifs 1, 2, 3,... Il reste encore à satisfaire à la condition relative à l'état initial, ou autrement dit, il reste encore à trouver une fonction A_i telle que l'on ait, entre les limites $x = 0$, $x = l$, l'égalité $f(x) = \Sigma A_i \sin \frac{i\pi x}{l}$. Pour plus de commodité, je développe dans le second membre la série représentée par le signe Σ, et j'ai

$$f(x) = A_1 \sin \frac{\pi x}{l} + A_2 \sin \frac{2\pi x}{l} + \ldots + A_i \sin \frac{i\pi x}{l} + \ldots$$

Je multiplie les deux membres par $\sin \frac{i\pi x}{l} dx$, et j'intègre par rapport à x entre les limites $x = 0$, $x = l$. Cette intégration fait disparaître tous les coefficiens A_1, $A_2, \ldots$ excepté A_i, et l'on obtient sur-le-champ $A_i = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{i\pi x}{l} dx$. En adoptant cette valeur de A_i, on aura sans aucun doute $f(x) = \Sigma A_i \sin \frac{i\pi x}{l}$, pourvu toutefois que la fonction $f(x)$ s'annulle aux deux limites $x = 0$, $x = l$, comme la série qui doit la représenter entre ces deux limites.

2. L'exemple précédent nous montre comment on est conduit à développer une fonction $f(x)$ en série de sinus, sinon pour toutes les valeurs réelles de x, du moins pour les valeurs de cette variable qui sont comprises entre deux limites données. D'après la manière

dont nous avons été amenés à poser l'égalité $f(x) = \Sigma A_i \sin \frac{i\pi x}{l}$, on voit *à priori* que cette égalité est possible, entre les limites $x=0$, $x=l$, quelle que soit la fonction $f(x)$; ou du moins la possibilité d'une telle équation paraît une conséquence naturelle de ce fait évident, que le problème de la détermination du mouvement de la chaleur dans une barre homogène doit être résoluble, quelle que soit la fonction $f(x)$ qui représente l'état initial des températures.

Mais au lieu de regarder les égalités de la forme

$$f(x) = \Sigma A_i \sin \frac{i\pi x}{l},$$

comme le résultat de l'intégration d'une équation aux différences partielles servant à résoudre un problème physico-mathématique, on s'est aussi proposé de les considérer en elles-mêmes, abstraction faite des questions particulières où elles se présentent; et cette idée a donné naissance à la belle théorie des séries périodiques que M. Poisson a exposée d'abord dans le 19ᵉ cahier du *Journal de l'École polytechnique*, et qu'il a reproduite récemment dans son ouvrage sur la chaleur.

Cette théorie des séries périodiques, ainsi traitée comme un point d'analyse pure, en devient à la fois plus élégante et plus rigoureuse: mais, telle que M. Poisson l'a donnée dans les mémoires cités, elle se borne aux développemens des fonctions ou parties de fonctions d'une variable x en séries de sinus et de cosinus des multiples entiers d'un arc proportionnel à x; et elle ne s'étend en aucune manière aux autres séries de sinus et de cosinus que l'on rencontre aussi dans certaines questions de la *Théorie de la chaleur* et dans lesquelles les arcs successifs s'obtiennent en multipliant la variable x par les diverses racines d'une équation transcendante.

Je me propose ici de faire connaître une méthode au moyen de laquelle on effectuera d'une manière directe les développemens des fonctions ou parties de fonctions en séries de sinus et de cosinus (*). Pour trouver cette méthode, il m'a suffi de modifier légèrement un procédé fort ingénieux dont M. Poisson a fait usage dans ses deux pre-

---

(*) Dans ses *Exercices mathématiques*, M. Cauchy a traité la même question par une méthode fondée sur le *calcul des résidus*.

miers Mémoires sur la *Théorie de la chaleur*. La modification dont je parle consiste surtout en ce que j'ai pris pour point de départ la formule

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dz \int_{-\infty}^{+\infty} \cos z(y-x) f(y) dy,$$

ou

$$fx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos zx dz \int_{-\infty}^{+\infty} \cos zy f(y) dy$$
$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \sin zx dz \int_{-\infty}^{+\infty} \sin zy f(y) dy,$$

par laquelle Fourier représente une fonction quelconque $f(x)$ pour toutes les valeurs réelles de x, c'est-à-dire depuis $x = -\infty$ jusqu'à $x = +\infty$. Cette formule, en effet, renferme implicitement toutes les séries de sinus et de cosinus que les géomètres ont imaginées pour le développement des fonctions ou parties de fonctions; et il ne s'agit pour ainsi dire que de savoir lui donner successivement, par des transformations convenables, la forme propre à chacune de ces séries.

3. Essayons de faire comprendre *à priori* par quelle raison métaphysique la formule de Fourier renferme implicitement toutes les séries de sinus et de cosinus d'arcs proportionnels à x que l'on pourra trouver pour développer, entre certaines limites des valeurs de la variable, une fonction $f(x)$ arbitrairement donnée entre ces limites. Supposons pour cela que de $x = l'$ à $x = l$, on ait

$$\text{(A)} \qquad f(x) = \Sigma(\text{A} \cos \rho x + \text{B} \sin \rho x),$$

le signe Σ s'étendant à un nombre infini de valeurs de ρ liées entre elles par une loi quelconque, assujetties par exemple à être les diverses racines positives d'une même équation transcendante $\Pi(\rho) = 0$; et A, B, désignant des fonctions de ρ convenablement choisies. Puisque la fonction $f(x)$ n'est donnée que depuis $x = l'$ jusqu'à $x = l$, rien ne nous empêche d'en disposer hors de ces limites, et d'attribuer à la caractéristique f une signification telle que l'équation (A) subsiste pour toutes les valeurs réelles de x. Ce sera alors proprement l'équation (A) qui nous fera connaître le sens que nous devons attacher à cette caractéristique, et ce sens sera tel que l'équation dont il s'agit ait toujours lieu de $x = -\infty$ à $x = +\infty$.

Nous pouvons aussi remplacer la lettre ρ par une autre lettre z, et supposer que le signe Σ, relatif à z, s'étende non plus seulement à toutes les valeurs de cette lettre comprises dans les racines positives de l'équation $\Pi(\rho)=0$, mais bien à toutes les valeurs possibles qui se succèdent d'une manière continue depuis $z=0$ jusqu'à $z=\infty$, pourvu toutefois que nous remplacions A et B par des fonctions U et V de z telles que l'on ait en général $U=0$, $V=0$, lorsque z diffère de ρ, et $U=A$, $V=B$, lorsque $z=\rho$, c'est-à-dire lorsque z se trouve égal à une des racines positives de l'équation $\Pi(\rho)=0$.

Mais, au lieu de U et V, il sera plus convenable d'écrire Udz, Vdz, et de remplacer le signe Σ par le signe $\int$. On aura ainsi

$$f(x)=\int_0^\infty \cos zx.Udz+\int_0^\infty \sin zx.Vdz.$$

Les deux lettres U et V désigneront alors des fonctions de z qui seront généralement nulles excepté lorsque la variable z différera infiniment peu d'une des racines de l'équation $\Pi(\rho)=0$, et qui au contraire deviendront infinies lorsqu'on aura $z=\rho$, en sorte que les élémens Udz, Vdz (ou plutôt les intégrales $\int Udz$, $\int Vdz$, prises entre des limites infiniment resserrées) aient alors une valeur sensible.

Or la formule

$$f(x)=\int_0^\infty \cos zx.Udz+\int_0^\infty \sin zx.Vdz,$$

ne peut s'accorder avec celle de Fourier qu'autant que l'on a

$$U=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos zyf(y)dy,\quad V=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin zyf(y)dy.$$

Nous voyons par là, d'une part, que la formule de Fourier renferme implicitement tous les développemens possibles des fonctions en séries de sinus et de cosinus d'arcs proportionnels à la variable; et d'autre part, que toutes les fois qu'il s'agira d'en transformer le second membre en sorte que l'intégrale relative à z soit remplacée par un signe Σ relatif aux diverses racines d'une équation transcendante $\Pi(\rho)=0$, le caractère auquel on reconnaîtra que cette transformation peut s'effectuer sera le suivant : *savoir que les deux intégrales* $\int_{-\infty}^{+\infty}\cos zyf(y)dy$,

$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin zy f(y)dy$, *soient généralement égales à zéro, excepté pour les valeurs de* z *infiniment peu différentes de* ρ, *et au contraire égales à l'infini pour* $z=\rho$; ce qui aura lieu si les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zy\sqrt{-1}} f(y)dy$, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{zy\sqrt{-1}} f(y)dy$, sont elles-mêmes nulles ou infinies, suivant que l'on a z différent de ρ ou $z=\rho$.

4. La formule

$$(1) \qquad f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} \cos z(y-x) f(y)dy,$$

servant de base à nos recherches, nous rappellerons ici la démonstration que Deflers en a donnée. Soit u la valeur du second membre de l'équation (1); il s'agit de prouver que l'on a $u=f(x)$. Effectuons d'abord l'intégration par rapport à z, non pas depuis $z=0$ jusqu'à $z=\infty$, mais depuis $z=0$ jusqu'à une valeur indéterminée de z que nous traiterons comme infinie dans l'intégration relative à y. Nous aurons ainsi

$$u = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin z(y-x)}{y-x} f(y)dy,$$

et en posant $y=x+\frac{\theta}{z}$, il nous viendra

$$u = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \theta}{\theta} f\left(x+\frac{\theta}{z}\right)d\theta.$$

Or, puisque z est une quantité infinie, on a $f\left(x+\frac{\theta}{z}\right)=f(x)$, excepté pour les valeurs de θ qui sont elles-mêmes infinies, valeurs dont on peut faire abstraction dans l'intégrale définie qui nous occupe, parce que le facteur $\frac{\sin\theta}{\theta}$ rend infiniment petits et négligeables les élémens qui leur correspondent. Il restera donc simplement

$$u = \frac{f(x)}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\theta d\theta}{\theta} = f(x);$$

ce qui coïncide avec la formule (1).

5. Maintenant, si l'on veut développer en série de sinus et de cosinus, entre deux limites l' et l, une fonction $f(x)$ donnée entre ces

deux limites, rien n'empêchera de faire usage pour ce développement de la formule (1); et comme cette formule renferme les parties de $f(x)$ relatives aux valeurs de x plus petites que l' et celles relatives aux valeurs de x plus grandes que l, on pourra se donner les unes et les autres arbitrairement. En disposant de diverses manières de ces parties indéterminées de la fonction $f(x)$, on sera conduit à diverses formules où il sera aisé en général de réduire l'intégration définie relative à z à une sommation finie relative aux diverses racines d'une certaine équation transcendante; d'où naîtront tous les développemens connus de la fonction en séries de sinus et de cosinus d'arcs multiples de x.

Pour présenter cette méthode de la manière la plus générale, concevons qu'après s'être donné à volonté une définition de la fonction $f(x)$ qui permette de la calculer pour les valeurs de x non comprises entre l' et l, lorsqu'elle est déjà connue entre ces deux limites, on pose

$$\int_0^{\infty} e^{-hy} f(y) dy = p, \quad \int_0^{-\infty} e^{hy} f(y) dy = q,$$

h étant une constante réelle et positive, ou du moins une constante dont la partie réelle soit positive. Concevons de plus que l'on soit parvenu à mettre les valeurs de p et q sous la forme

$$p = \frac{\Psi(h)}{\varphi(h)}, \quad q = \frac{\Psi(-h)}{\varphi(-h)},$$

$\varphi(h)$ et $\Psi(h)$ étant des fonctions de h sans dénominateur, et tout-à-fait déterminées à l'aide des seules valeurs de la fonction $f(x)$ comprises entre les deux limites $x = l'$, $x = l$, pour lesquelles cette fonction est donnée *à priori*.

Cela posé, je dis qu'il sera toujours facile, entre les limites l' et l, d'exprimer la fonction $f(x)$ en série de la forme $\Sigma(A\cos \rho x + B\sin \rho x)$, le signe Σ se rapportant à toutes les racines réelles et positives de l'équation transcendante $\varphi(\rho\sqrt{-1}) = 0$. On y parviendra, en effet, en transformant convenablement la formule de Fourier, et en éliminant l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos z(y-x) f(y) dy$, qu'elle contient, à l'aide d'une analyse très singulière que nous empruntons à peu près textuellement au 19^e cahier du *Journal de l'École polytechnique* (*).

6. Pour déduire des valeurs de p et q celle de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zy\sqrt{-1}} f(y)dy$, je désigne par g une quantité positive que l'on prendra aussi petite qu'on voudra; je fais $h = g + z\sqrt{-1}$ dans la valeur de p, et $h = g - z\sqrt{-1}$ dans la valeur de q; on aura

$$p = \frac{\psi(z\sqrt{-1}+g)}{\varphi(z\sqrt{-1}+g)}, \quad q = \frac{\psi(z\sqrt{-1}-g)}{\varphi(z\sqrt{-1}-g)},$$

et, d'après les intégrales définies que représentent p et q, si l'on fait $g = 0$ dans la différence $p-q$, il est évident qu'elle se changera dans l'intégrale demandée. Cette intégrale sera donc la limite de la valeur de $p-q$ par rapport à g; ainsi, en regardant g comme une quantité infiniment petite que l'on fera tout-à-fait nulle à la fin du calcul, on aura

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zy\sqrt{-1}} f(y)dy = \frac{\psi(z\sqrt{-1}+g)}{\varphi(z\sqrt{-1}+g)} - \frac{\psi(z\sqrt{-1}-g)}{\varphi(z\sqrt{-1}-g)}.$$

Mais cette quantité s'évanouit en même temps que g, excepté pour les valeurs de z qui rendent nul le dénominateur $\varphi(z\sqrt{-1})$; cette intégrale, et par suite celles de

$$\cos zy \cdot f(y)dy, \quad \sin zy \cdot f(y)dy, \quad \cos z(y-x) \cdot f(y)dy,$$

prises entre les mêmes limites $\pm\infty$ sont donc généralement égales à zéro; et il n'y a d'exception que pour certaines valeurs de z pour lesquelles ces intégrales deviennent infinies. La nature de la quantité $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos z(y-x) f(y)dy$ étant ainsi connue, il s'agit présentement d'effectuer l'intégration relative à z qui se trouve indiquée dans l'expression de $f(x)$ donnée par la formule de Fourier.

7. Il sera nécessaire, pour cette opération, de conserver la quantité g dans la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos z(y-x) f(y)dy$; nous ferons $g=0$, après

(*) *Voyez* pages 31, 32, 33. Nous avons, sans aucun scrupule, emprunté les phrases mêmes de M. Poisson, inventeur de la méthode.

avoir achevé le calcul; jusque là nous traiterons seulement g comme une quantité infiniment petite. Or il est évident que les portions de l'intégrale relative à z, qui répondent à des valeurs de cette variable infiniment peu différentes des racines de l'équation $\varphi(z\sqrt{-1}) = 0$, sont les seules qui pourront ne pas s'évanouir en même temps que g; si donc nous désignons par ρ l'une de ces racines, et que nous fassions $z = \rho + z'$, il ne faudra donner à la variable z' que des valeurs infiniment petites, positives ou négatives, et prendre successivement pour ρ toutes les racines positives de l'équation $\varphi(\rho\sqrt{-1}) = 0$; on ne prendra pas les racines négatives, parce que, dans l'intégration, la variable z ne doit recevoir que des valeurs réelles et positives; et par la même raison, lorsque l'on prendra la racine $\rho = 0$, on ne donnera à z' que des valeurs positives. Faisons donc $z = \rho + z'$, et soit alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-zy\sqrt{-1}} f(y)dy = \mathrm{Z}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{zy\sqrt{-1}} f(y)dy = \mathrm{Z}',$$

d'où il résultera

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos z(y-x) f(y)dy = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Z}e^{x(\rho+z')\sqrt{-1}} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Z}'e^{-x(\rho+z')\sqrt{-1}}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (1), et négligeant la variable z' en dehors de Z et Z′, il vient

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\,\Sigma\left(e^{\rho x\sqrt{-1}} \int \mathrm{Z}dz' + e^{-\rho x\sqrt{-1}} \int \mathrm{Z}'dz'\right),$$

Σ indiquant une somme qui s'étend à toutes les valeurs positives de ρ, y compris $\rho = 0$.

Maintenant soit $\frac{d\varphi(h)}{dh} = \varphi'(h)$; mettons $\rho + z'$ à la place de z dans le second membre de l'équation (2); en traitant z' et g comme des quantités infiniment petites, on aura

$$\varphi(z\sqrt{-1} \pm g) = (z'\sqrt{-1} \pm g)\varphi'(\rho\sqrt{-1}),$$
$$\psi(z\sqrt{-1} \pm g) = \psi(\rho\sqrt{-1}),$$

et il en résultera

$$Z = \frac{2g\psi(\rho\sqrt{-1})}{(g^2+z'^2)\varphi'(\rho\sqrt{-1})};$$

si donc on prend une quantité positive δ, et qu'on intègre depuis $z'=-\delta$ jusqu'à $z'=+\delta$, on aura

$$\int Z dz' = \frac{4\psi(\rho\sqrt{-1})}{\varphi'(\rho\sqrt{-1})} \text{ arc tang } \frac{\delta}{g},$$

et dans le cas de $\rho=0$, l'intégrale ne devant être prise que depuis $z'=0$ jusqu'à $z'=+\delta$, sa valeur sera réduite à moitié. Faisons actuellement $g=0$; cette valeur de $\int Zdz'$ deviendra

$$\int Z dz' = \frac{2\pi\psi(\rho\sqrt{-1})}{\varphi'(\rho\sqrt{-1})}.$$

On en conclura celle de $\int Z'dz'$, en y changeant le signe de $\sqrt{-1}$, et l'on aura

$$\int Z' dz' = \frac{2\pi\psi(-\rho\sqrt{-1})}{\varphi'(-\rho\sqrt{-1})},$$

d'où l'on conclut

$$f(x) = \Sigma\left[\frac{e^{\rho x\sqrt{-1}}\psi(\rho\sqrt{-1})}{\varphi'(\rho\sqrt{-1})} + \frac{e^{-\rho x\sqrt{-1}}\psi(-\rho\sqrt{-1})}{\varphi'(-\rho\sqrt{-1})}\right],$$

en se rappelant toutefois que dans la somme Σ on ne devra prendre que la moitié du terme qui se rapporte à $\rho=0$.

Si l'on remplace maintenant les exponentielles imaginaires par leurs valeurs en sinus et cosinus, la fonction $f(x)$ se trouvera mise sous la forme demandée

$$(\alpha) \qquad f(x) = \Sigma(A\cos\rho x + B\sin\rho x),$$

A et B ayant les valeurs suivantes :

$$(\beta) \quad \begin{cases} A = \dfrac{\psi(\varrho\sqrt{-1})}{\varphi'(\varrho\sqrt{-1})} + \dfrac{\psi(-\varrho\sqrt{-1})}{\varphi'(-\varrho\sqrt{-1})}, \\ B = \sqrt{-1}\left[\dfrac{\psi(\varrho\sqrt{-1}}{\varphi'(\varrho\sqrt{-1})} - \dfrac{\psi(-\varrho\sqrt{-1})}{\varphi'(-\varrho\sqrt{-1})}\right]; \end{cases}$$

dans lesquelles ρ désigne une quelconque des racines positives de l'équation transcendante $\varphi(\rho\sqrt{-1}) = 0$, mais qu'il faudra réduire à moitié dans le cas particulier où l'on aura $\rho = 0$.

8. Admettons par exemple que pour déterminer la fonction $f(y)$ hors des limites l' et l que nous prendrons la première égale à zéro et la seconde quelconque, on se donne les deux conditions $f(y) = f(-y)$, $f(l+y) = -f(l-y)$, lesquelles entraînent la condition particulière $f(l) = 0$, que nous supposerons remplie. Si l'on multiplie par $e^{-hy}dy$ les deux membres de l'équation $f(y) = f(-y)$ et qu'on intègre ensuite depuis $y = 0$ jusqu'à $y = \infty$, il viendra

$$\int_0^\infty e^{-hy} f(y)\,dy = \int_0^\infty e^{-hy} f(-y)\,dy.$$

Le premier membre est précisément égal à la quantité représentée ci-dessus par p (*voyez* n° 5), et il est aisé de voir que le second est égal à $-q$; on a donc d'abord $p = -q$.

En multipliant de même par $e^{-hy}dy$ et intégrant les deux membres de l'équation $f(l+y) = -f(l-y)$, on obtient

$$\int_0^\infty e^{-hy} f(l+y)\,dy = -\int^\infty e^{hy} f(l-y)\,dy.$$

On a d'ailleurs identiquement

$$\int_0^\infty e^{-hy} f(l+y)\,dy = e^{hl}\left[p - \int_0^l e^{-hy} f(y)\,dy\right],$$
$$\int_0^\infty e^{-hy} f(l-y)\,dy = -e^{-hl}\left[q - \int_0^l e^{hy} f(y)\,dy\right];$$

l'égalité précédente devient donc

$$e^{hl}\left[p - \int_0^l e^{-hy} f(y)\,dy\right] = e^{-hl}\left[q - \int_0^l e^{hy} f(y)\,dy\right];$$

et en ayant égard à l'équation $p = -q$, et posant

$$\int_0^l (e^{h(l-y)} - e^{h(y-l)}) f(y)\,dy = \Psi(h),\quad e^{hl} + e^{-hl} = \varphi(h),$$

on en tire les valeurs de p et q sous la forme $p = \frac{\Psi(h)}{\varphi(h)}$, $q = \frac{\Psi(-h)}{\varphi(-h)}$ exigée pour le succès de notre méthode. D'après ces valeurs de $\Psi(h)$, $\varphi(h)$, l'équation qui détermine les valeurs de ρ est $\cos \rho l = 0$, et l'on en tire, en se bornant aux racines positives, $\rho = \frac{\pi}{2l}$, $\rho = \frac{3\pi}{2l}$, $\rho = \frac{5\pi}{2l}, \ldots$

On a de plus,

$$\Psi(\rho\sqrt{-1}) = 2\sqrt{-1}\int_0^l \sin\rho(l-y) f(y)dy,$$
$$\varphi'(\rho\sqrt{-1}) = 2l\sqrt{-1}\sin\rho l.$$

En observant que la quantité $\sin\rho(l-y) = \sin\rho l\cos\rho y - \cos\rho l \sin\rho y$ se réduit à $\sin\rho l\cos\rho y$, puisque $\cos\rho l = 0$, la valeur de $\Psi(\rho\sqrt{-1})$ devient plus simplement

$$\Psi(\rho\sqrt{-1}) = 2\sqrt{-1}\sin\rho l\int_0^l \cos\rho y f(y)dy.$$

La formule (α) nous donne d'après cela

$$f(x) = \frac{2}{l}\Sigma\cos\rho x\int_0^l \cos\rho y f(y)dy,$$

ce qui est exact, en effet, entre les limites $x = 0$, $x = l$, comme on peut s'en assurer par d'autres méthodes, pour une fonction $f(x)$ assujettie à la condition $f(l) = 0$.

9. Supposons en second lieu que pour déterminer la fonction $f(y)$ hors des limites l' et l que nous prendrons égales et de signes contraires en sorte que l'on ait $l' = -l$, on se donne les deux conditions

$$f(l+y) + f(l-y) = 0,$$
$$f(-l+y) + f(-l-y) = 0;$$

lesquelles renferment implicitement ces deux conditions particulières $f(l) = 0$, $f(-l) = 0$.

On a identiquement

$$\int_0^\infty e^{-hy} f(l+y)dy = e^{hl}\left[p - \int_0^l e^{-hy} f(y)dy\right],$$
$$\int_0^\infty e^{-hy} f(l-y)dy = -e^{-hl}\left[q - \int_0^l e^{hy} f(y)dy\right].$$

Or, si l'on multiplie par $e^{-hy}dy$, et si l'on intègre entre les limites $y=0$, $y=\infty$, les deux membres de l'équation $f(l+y)=-f(l-y)$, il viendra

$$\int_0^\infty e^{-hy}f(l+y)dy = -\int_0^\infty e^{-hy}f(l-y)dy.$$

En remplaçant ces deux intégrales définies par leurs valeurs, on aura

$$e^{hl}p - e^{-hl}q = e^{hl}\int_0^l e^{-hy}f(y)dy - e^{-hl}\int_0^l e^{hy}f(y)dy.$$

En opérant d'une manière semblable sur l'égalité $f(-l+y)+f(-l-y)=0$, on trouvera de même

$$e^{-hl}p - e^{hl}q = e^{-hl}\int_0^{-l} e^{-hy}f(y)dy - e^{hl}\int_0^{-l} e^{hy}f(y)dy,$$

équation qui du reste se déduit de la précédente, en y changeant l en $-l$. Ces deux équations ne renferment, outre p et q, que des quantités connues, puisque la fonction $f(y)$ est donnée entre les limites $y=-l$, $y=+l$, et il est évident que l'on en déduira les valeurs de p et q sous la forme $p=\frac{\psi(h)}{\varphi(h)}$, $q=\frac{\psi(-h)}{\varphi(-h)}$; on continuera ensuite le calcul comme il a été dit n° 7.

10. Mais sans nous arrêter là-dessus davantage, passons à un autre exemple beaucoup plus intéressant, et qui d'ailleurs comprend le précédent comme cas particulier. A cet effet, posons encore $l'=-l$, et pour déterminer la fonction $f(y)$ hors des limites $y=-l$, $y=+l$, donnons-nous ces deux conditions

$$(a)\begin{cases} \epsilon f(l+y) + \frac{df(l+y)}{dy} + \epsilon f(l-y) - \frac{df(l-y)}{dy} = 0, \\ \epsilon' f(-l+y) - \frac{df(-l+y)}{dy} + \epsilon' f(-l-y) + \frac{df(-l-y)}{dy} = 0, \end{cases}$$

ϵ et ϵ' étant deux constantes positives.

Ces deux conditions supposent que la fonction $f(x)$ soit telle que l'on ait

$$\frac{df(x)}{dx} + \text{ϐ} f(x) = 0 \text{ pour } x = l,$$

$$\frac{df(x)}{dx} - \text{ϐ}' f(x) = 0 \text{ pour } x = -l;$$

et nous admettrons qu'en effet ces deux égalités ont lieu.

Cela posé, pour obtenir les valeurs de p et q, rappelons-nous d'abord que l'on a identiquement

$$\int_0^\infty e^{-hy} f(l+y)dy = e^{hl}\left[p - \int_0^l e^{-hy} f(y)dy\right],$$

$$\int_0^\infty e^{-hy} f(l-y)dy = -e^{-hl}\left[q - \int_0^l e^{hy} f(y)\, dy\right].$$

Mettons ensuite, avec M. Poisson (*), la première des équations (a) sous la forme

$$e^{-\text{ϐ}y} d[e^{\text{ϐ}y} f(l+y)] = e^{\text{ϐ}y} d[e^{-\text{ϐ}y} f(l-y)];$$

multiplions ses deux membres par $e^{-hy}dy$, puis intégrons par parties; nous aurons

$$e^{-yh} f(l+y) + (h+\text{ϐ})\int e^{-hy} f(l+y)dy = C + e^{-hy} f(l-y)$$
$$+ (h-\text{ϐ})\int e^{-hy} f(l-y)dy.$$

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, 19e cahier, page 30. Cette méthode consiste essentiellement à multiplier par $e^{-hy}dy$ et à intégrer depuis $y = 0$ jusqu'à $y = \infty$ les deux membres des équations (a), puis à exprimer toutes les intégrales en fonction de p, q et de quantités connues. En observant que par des intégrations par parties on ramène l'intégrale de $e^{-hy}\frac{d^n F(y)}{dx^n}dy$ à l'intégrale de $e^{-hy} F(y)\,dy$, on comprendra que ce procédé réussirait encore en général et fournirait les valeurs de p, q, si les équations (a) renfermaient, sous forme linéaire, outre la différentielle première df de la fonction désignée par la caractéristique f, les différentielles d^2f, ... d^nf d'un ordre quelconque multipliées par des coefficients constants.

Si les intégrales sont prises depuis $y=0$, la constante arbitraire C sera égale à zéro, et si elles s'étendent jusqu'à $y=\infty$, les termes qui sont hors du signe $\int$ s'évanouiront à cette seconde limite. On aura donc alors

$$(h+6)\int_0^\infty e^{-hy}f(l+y)dy = (h-6)\int_0^\infty e^{-hy}f(l-y)dy,$$

équation qui devient, en vertu des précédentes,

$$(h+6)e^{hl}p + (h-6)e^{-hl}q = (h+6)e^{hl}\int_0^l e^{-hy}f(y)dy \\ + (h-6)e^{-hl}\int_0^l e^{hy}f(y)dy.$$

Par un procédé semblable on déduira de la seconde des équations (a) une autre relation entre p et q, qui s'obtient aussi en changeant dans celle-ci 6 en $-6'$ et l en $-l$, ce qui donne

$$(h-6')e^{-hl}p + (h+6')e^{hl}q = (h-6')e^{-hl}\int_0^{-l} e^{-hy}f(y)dy \\ + (h+6')e^{hl}\int_0^{-l} e^{hy}f(y)dy,$$

De ces deux équations on tirera les valeurs de p et q sous la forme demandée

$$p = \frac{\psi(h)}{\varphi(h)}, \quad q = \frac{\psi(-h)}{\varphi(-h)},$$

en faisant pour abréger

$$(h+6)(h+6')e^{2hl}\int_0^l e^{-hy}f(y)dy - (h-6)(h-6')e^{-2hl}\int_0^{-l} e^{-hy}f(y)dy \\ +(h-6)(h+6')\left[\int_0^l e^{hy}f(y)dy - \int_0^{-l} e^{hy}f(y)dy\right] = \psi(h);$$

$$(h+6)(h+6')e^{2hl} - (h-6)(h-6')e^{-2hl} = \varphi(h).$$

L'équation de laquelle dépendent les valeurs de ρ sera donc

$$\frac{\varphi(\rho\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} = (66' - \rho^2)\sin 2\rho l + (6+6')\rho\cos 2\rho l = 0.$$

On aura en outre

$\frac{1}{2}\varphi'(\rho\sqrt{-1})=[6+6'+2l(66'-\rho^2)]\cos\rho l-[2+2l(6+6')]\rho\sin 2\rho l$, et $\varphi'(-\rho\sqrt{-1})=\varphi'(\rho\sqrt{-1})$. Quant aux valeurs de $\Psi(\rho\sqrt{-1})$, $\Psi(-\rho\sqrt{-1})$, il est aisé de les former; toutefois, je me dispenserai de les écrire à cause de leur complication. Lorsqu'on les aura obtenues, les équations (6) du n° 7 nous donneront les coefficiens A, B; et la formule (α) nous fournira ensuite le développement de $f(x)$.

11. Les expressions de A et B contiennent en dénominateur la dérivée $\varphi'(\rho\sqrt{-1})$; si donc deux des racines positives de l'équation $\varphi(\rho\sqrt{-1})=0$ se trouvaient égales entre elles, ces coefficiens deviendraient infinis. Mais pour que cette circonstance pût se présenter dans l'exemple que nous traitons, il faudrait que l'on eût à la fois

$$(66'-\rho^2)\sin 2\rho l+(6+6')\rho\cos 2\rho l=0,$$
$$[6+6'+2l(66'-\rho^2)]\cos 2\rho l-[2+2l(6+6')]\rho\sin 2\rho l=0;$$

égalant entre elles les deux valeurs de tang $2\rho l$ fournies par ces deux équations, on aurait donc

$$(66'-\rho^2)[6+6'+2l(66'-\rho^2)]+(6+6')[2+2l(6+6')]\rho^2=0,$$

ou bien

$$2l(66'-\rho^2)^2+2l(6+6')^2\rho^2+(6+6')(66'+\rho^2)=0;$$

or, cette dernière égalité est absurde quand on a $6>0$, $6'>0$ (comme nous l'avons supposé n° 10), puisque son premier membre est la somme de trois quantités positives; et lorsqu'une des deux constantes 6, $6'$, est nulle, ou lorsque toutes les deux le sont, elle ne peut être satisfaite qu'en posant $\rho=0$. L'équation $\varphi(\rho\sqrt{-1})=0$ n'a donc pas de racines positives égales lorsque les constantes 6, $6'$ sont >0; il est aisé de s'assurer que ce théorème subsiste encore si l'une seulement de ces constantes est nulle, l'autre restant positive, car la racine nulle que prend dans cette circonstance l'équation que nous discutons est évidemment une racine simple; il n'en est plus de même quand on a à la fois $6=0$, $6'=0$: il y a alors une racine triple égale à zéro;

mais alors aussi les deux quantités $\Psi(h)$, $\varphi(h)$, possèdent le facteur commun h^2 que l'on doit supprimer pour réduire les fractions p, q, à leur plus simple expression; cette réduction faite, l'équation $\varphi(\rho\sqrt{-1})=0$ se trouvera débarrassée de deux de ses racines nulles et n'aura plus que des racines toutes inégales entre elles.

12. Nous avons vu précédemment (n° 10) que la fonction $f(x)$ que nous venons de développer dans la série $\Sigma(A\cos\rho x+B\sin\rho x)$ doit être regardée comme assujettie aux deux conditions particulières

$$\frac{df(x)}{dx}+\mathcal{C}f(x)=0 \text{ pour } x=l,$$

$$\frac{df(x)}{dx}-\mathcal{C}'f(x)=0 \text{ pour } x=-l.$$

Ces deux conditions devront être satisfaites si l'on remplace $f(x)$ par sa valeur $\Sigma(A\cos\rho x+B\sin\rho x)$; mais il est assez remarquable que chaque terme $A\cos\rho x+B\sin\rho x$ de la série satisfasse isolément à cette relation, en sorte que si l'on pose $v=A\cos\rho x+B\sin\rho x$, on aura

$$\frac{dv}{dx}+\mathcal{C}v=0 \text{ pour } x=l, \text{ et } \frac{dv}{dx}-\mathcal{C}'v=0 \text{ pour } x=-l \ (*).$$

Les divers termes de la série $\Sigma(A\cos\rho x+B\sin\rho x)$, jouissent de plusieurs autres propriétés remarquables qui sont connues depuis long-temps. Soient par exemple v et v' deux termes de la série répondant à deux racines différentes ρ et ρ'; je dis que l'on aura $\int_{-l}^{+l}vv'dx=0$. En effet, des deux équations $\frac{d^2v}{dx^2}=-\rho^2v$, $\frac{d^2v'}{dx^2}=-\rho'^2v'$, qui ont évidemment lieu, on déduit

$$(\rho^2-\rho'^2)vv'=v\frac{d^2v'}{dx^2}-v'\frac{d^2v}{dx^2};$$

en intégrant il vient donc

(*) Pour la démonstration de ce théorème nous renverrons aux calculs développés à la page 37 du 19ᵉ cahier du *Journal de l'École Polytechnique*.

$$(\rho^2-\rho'^2)\int vv'dx = v\frac{dv'}{dx} - v'\frac{dv}{dx}.$$

Si maintenant on prend $-l$ et $+l$ pour les deux limites de l'intégrale, je dis que le second membre se réduit à zéro. Pour le montrer, j'observe que pour $x=l$ on a $\frac{dv}{dx}+\mathcal{C}v=0$, $\frac{dv'}{dx}+\mathcal{C}'v'=0$; or, si après avoir multiplié la première de ces deux égalités par v' et la seconde par v, on les retranche, il en résulte $v\frac{dv'}{dx}-v'\frac{dv}{dx}=0$ pour $x=l$; pour $x=-l$ on a $\frac{dv}{dx}-\mathcal{C}'v=0$, $\frac{dv'}{dx}-\mathcal{C}'v'=0$, d'où l'on tire de même $v\frac{dv'}{dx}-v'\frac{dv}{dx}=0$. On conclut de là que le produit $(\rho^2-\rho'^2)\int_{-l}^{+l}vv'dx$ est constamment égal à zéro; et par suite, si les deux racines ρ et ρ' sont différentes, on a $\int_{-l}^{+l}vv'dx=0$.

On sait comment M. Poisson s'est servi de l'égalité $\int_{-l}^{+l}vv'dx=0$ pour prouver la réalité de toutes les racines de l'équation $\varphi(\rho\sqrt{-1})=0$; nous ne rapporterons pas ici sa démonstration qui est connue de tous les géomètres, et qui d'ailleurs est de pure curiosité dans notre théorie, puisque nous n'avons besoin que des racines positives de cette équation, en sorte qu'il nous importe peu qu'elle ait ou n'ait pas de racines imaginaires.

13. Il nous serait aisé de donner beaucoup d'autres développemens de la fonction $f(x)$ en séries de sinus et de cosinus; nous pourrions, par exemple, déterminer la fonction $f(y)$ hors des limites $-l$, $+l$, en employant, au lieu des équations (a), d'autres équations aux différences mêlées qui contiendraient les différentielles de $f(y)$ d'un ordre supérieur au premier. Mais il serait fort inutile de généraliser ainsi les résultats que nous avons obtenus dans ce Mémoire. Nous n'avons eu pour but que de développer avec soin et de présenter sous un nouveau jour une méthode très ingénieuse à laquelle les géomètres n'avaient pas fait assez attention. Plus tard nous reviendrons sur ce sujet, et en partant d'un autre principe nous montrerons comment

on peut arriver d'une manière à la fois directe et rigoureuse, non-seulement aux développemens des fonctions en séries de sinus et de cosinus, mais encore à ces développemens plus compliqués formés de suites infinies dont chaque terme est l'intégrale d'une équation différentielle du second ordre, et qui se présentent en analyse quand on cherche à déterminer les lois du mouvement de la chaleur dans une barre hétérogène primitivement échauffée d'une manière quelconque (*).

(*) Le Mémoire que j'annonce ici et qui roule sur *les développemens des fonctions ou parties de fonctions en séries dont les divers termes sont assujettis à satisfaire à une même équation différentielle du second ordre contenant un paramètre variable*, a été présenté le 30 novembre dernier à l'Académie des Sciences.