Journées Équations aux dérivées partielles

Benoît Perthame

Un cas limite de lemmes de compacité en moyenne motivé par la formulation cinétique de systèmes hyperboliques

Journées Équations aux dérivées partielles (1997), p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1997____A13_0>

UN CAS LIMITE DES LEMMES DE COMPACITÉ EN MOYENNE MOTIVÉ PAR LA FORMULATION CINÉTIQUE DE SYSTÈMES HYPERBOLIQUES

B. Perthame
Laboratorie d'analyse Numérique
Université P. et M. Curie
4, Place Jussieu
F75252 Paris Cedex 05
et Institut Universitaire de France

and

P. E. Souganidis
Department of Mathematics
University of Wisconsin–Madison
480 Lincoln Drive
Madison, WI 53706
USA

Résumé

Nous considérons des équations de transport avec un second membre qui est une dérivée complète en espace. Cette structure correspond à de nombreux modèles de dynamique des fluides et à la formulation cinétique du système de la dynamique des gaz isentropiques et, pour le cas des lois de conservation scalaires, les lemmes de moyennes permettent de prouver des effets régularisants. Nous étendons les lemmes de moyennes à des seconds membres ayant une dérivée complète en espace. Notre méthode utilise la théorie de Calderon-Zygmund.

Abstract

We consider transport equations with a second member which is a full space derivative. This structure coresponds to to numerous models of fluid dynamics and to the kinetic formulation of isentropic gas dynamics, and for the case of sclaar conservation laws, averaging lemmas prove regularising effects. We extend the averaging lemmas to second member which are a full space derivative. Our method uses Calderón-Zygmund theory.

INTRODUCTION.

La modélisation en dynamique des fluides mène souvent à des équations de transport dont la vitesse d'advection est une combinaison de la vitesse macroscopique ($u(t,x)$ dans la suite du texte, voir (I.3)) et de la vitesse cinétique (notée v). Par exemple, la dynamique de tiges dures monodimensionnelles mène à l'équation (voir Spohn [Sp])

$$\frac{\partial}{\partial t} f + \frac{\partial}{\partial x}\left[v + \frac{a\rho}{1-a\rho}(v-u)\right] f = 0,\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R}, \tag{I.1}$$

où a est un paramètre positif et on a posé

$$\rho(t,x) = \int f(t,x,v)dv, \tag{I.2}$$

$$\rho u(t,x) = \int v f(t,x,v)dv. \tag{I.3}$$

De même, la dynamique de boules dans un fluide potentiel mène au système au système couplé

$$\frac{\partial}{\partial t} f + div_x(H_v f) - div(H_x f) = 0,\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^3,\ v \in \mathbb{R}^3, \tag{I.4}$$

$$\begin{cases} H(t,x,v) = \frac{1}{2}|v + a\nabla_x\varphi|^2, \\ -\, div_x((1+a\rho)\nabla_x\varphi) = div_x(\rho u),\ t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{I.5}$$

où on a utilisé les mêmes notations que ci-dessus, voir Russo et Smereka [RS], Hererro, Lucquin et Perthame [HLP]. Enfin, un dernier exemple consiste en la formulation Hamiltonienne des équations d'Euler en incompressible. L'équation (I.4) est alors déterminée par le Hamiltonien

$$\begin{cases} H(t,x,v) = v \cdot q(t,x), \\ q = \rho u - \nabla\varphi, \\ \Delta_x\varphi = div_x(\rho u). \end{cases} \tag{I.6}$$

On vérifie que la fonction $q(t,x)$ vérifie alors

$$\begin{cases} div_x q = 0, \\ \partial_t q + div_x q \otimes q + \nabla_x p = 0, \\ p = \partial_t\varphi + \frac{|q|^2}{2} + q \cdot \nabla_x\varphi, \end{cases} \tag{I.7}$$

(système d'Euler incompressible). Ce formalisme a été introduit par Kuz'min [K], Oseledets [O], est développé par Buttke [Bu], Maddocks et Pego [MP], Benedetto [Bd1], [Bd2], Smereka [Sm].

Dans cet exposé nous considérons une structure simple reliée aux exemples précédents. Soit l'équation de transport avec un second membre singulier

$$\frac{\partial}{\partial t} f + v \cdot \nabla_x f = h, \tag{I.8}$$

$$h(t,x,v) = \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial^k}{\partial v^k} g_j, \tag{I.9}$$

où k est un multi-index $(k_1, ..., k_d)$ et $\partial_v^k = \partial_{v_1}^{k_1} ... \partial_{v_j}^{k_d}$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, $v \in \mathbb{R}^d$. Dans un travail récent [PS], nous montrons que des lemmes de moyenne en vitesse ont lieu pour cette équation. Ces résultats sont énoncés en section II. Les motivations plus précises pour la structure cinétique des systèmes hyperboliques de lois de conservation sont présentées en section III.

II. LEMMES DE MOYENNES EN VITESSE.

Les lemmes de moyenne montrent que les quantités intégrées

$$\overline{\rho}(t,x) = \int f(t,x,v)\varphi(v)dv \tag{II.1}$$

sont plus régulières que les solutions f elles-mêmes de l'équation de transport (par exemple (I.8)).

Ce phénomène a été découvert par V.I. Agoshkov [Ag], F. Golse, B. Perthame et R. Sentis [GPS]. Lorsque le membre de droite de l'équation de transport ne contient aucune dérivée, leur forme finale a été donnée par F. Golse, P.L. Lions, B. Perthame et R. Sentis [GLPS]. Les cas de dérivées en v furent alors traités par R.J. DiPerna et P.L. Lions [DL] (cadre L^2) puis par R.J. DiPerna, P.L. Lions et Y. Meyer [DLM] (cadre L^p et dérivées fractionnaires en x d'ordre inférieur strictement à 1). M. Bézard [B] obtient des résultats similaires à [DLM] dans les espaces de Sobolev (à la place de Besov).

Un cas limite des lemmes de moyenne a été remarqué par P. Gérard [G] qui montre que $\overline{\rho}$ est compact dans L^2 si le second membre h de l'équation de transport (I.8) est compact dans H^{-1}.

Dans [PS] nous montrons que l'on peut encore obtenir une estimation dans le cas (I.9) d'une dérivée totale en x.

Théorème[PS]. *Soient deux fonctions f, g vérifiant (I.8), (I.9). Pour tout p, $1 < p < \infty$, $\alpha \in [0, \min(\frac{1}{p}, \frac{1}{p'})[$, et $\varphi \in C^{|k|}(B_R)$ où B_R est la boule centrée en 0 de rayon R dans $\mathbb{R}^d$ et $|k| = k_1 + ... + k_d$, on a*

$$\|\overline{\rho}\|_{L^p(\mathbb{R}^{d+1})} \leq C \|f\|_{L^p(Q_R)}^{1-\frac{\alpha}{k+1}} \|g\|_{L^p(Q_R)}^{\frac{\alpha}{k+1}}, \tag{II.2}$$

où on a posé $Q_R = \mathbb{R}_x^d \times \mathbb{R}_t \times B_R$, $C = C(d, R, \alpha, p, \|\varphi\|_{W^{|k|,\infty}})$.

La facon d'utiliser ce résultat est donnée dans le corollaire suivant qui permet d'obtenir le cadre de compacité général :

Corollaire[PS]. *Avec les hypothèses du théorème ci-dessus, si g_n est une suite compacte de $L^p(Q_R)$ et f_n est une suite bornée de $L^p(Q_R)$, alors $\overline{\rho}_n$ est compacte dans $L^p(\mathbb{R}^{d+1})$.*

On voit dans ce corollaire que l'inégalité (II.2) est bien plus intéressante pour "g_j petites" que l'inégalité élémentaire

$$(II.3) \qquad \begin{aligned} \|\overline{\rho}\|_{L^p(\mathbb{R}^{d+1})} &\le \int |\varphi(v)|\, \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^{d+1})} dv \\ &\le \|f\|_{L^p(Q_R)} \|\varphi\|_{L^{p'}(Q_R)}. \end{aligned}$$

Notons aussi que ces résultats s'étendent sans diffculté aux cas de vitesses plus générales comme dans [LPT1,2] (i.e. $a(v)$ et non v) donnant lieu à des conditions de compacité legèrement différentes de celles habituellement utilisées (voir (III.7) ci-dessous.

Notre approche contient un certain nombre de variantes par rapport aux méthodes classiques, citées ci-dessus, pour traiter les lemmes de moyennes. Nous n'introduisons pas de troncature en v pour évaluer l'intégrale (II.1), nous préférons introduire une "perturbation" de l'équation (I.8). D'autre part le petit paramètre (de troncature ou, ici, de perturbation) n'est pas seulement la "fréquence" (variable de Fourier) mais une norme L^p. Finalement, ce résultat se démontre par une combinaison de la théorie de Calderon-Zygmund (voir Stein [St] pour un exposé récent), et de la méthode classique de moyennisation dans L^2.

III. COMPACITÉ DANS QUELQUES SYSTÈMES HYPERBOLIQUES NON LINÉAIRES.

L'une des motivations pour étudier les lemmes de moyenne de la section II, provient de la formulation cinétique des systèmes hyperboliques "ayant beaucoup d'entropies". Nous rappelons ici le cas scalaire multidimensionnel où les lemmes de moyenne s'appliquent et ensuite le cas de la dynamique des gaz isentropiques où le seul argument de compacité reste la compacité par compensation (excepté pour $\gamma = 3$ et les sytèmes de Brenier-Corrias [BC], voir Lions, Perthame et Tadmor [LPT2]). On se référera à D. Serre [Se] pour une présentation des systèmes hyperboliques.

Considérons une loi de conservation scalaire

$$(III.1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(u) = 0,$$

muni de toutes les inégalités d'entropies

$$(III.2) \qquad \partial_t S(u) + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_i} \eta_i(u) \le 0,$$

pour $S(\cdot)$ convexe, $\eta_i'(\cdot) = a_i(\cdot) S'(\cdot)$ et on a posé supposé

$$(III.3) \qquad a_i = A_i' \in C^1(\mathbb{R}), \quad 1 \le i \le d.$$

Il est montré dans [LPT2] (et ses références) que, pour une donnée initiale $u^0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$, ce problème peut s'écrire de façon équivalente

$$(III.4) \qquad \frac{\partial \chi}{\partial t} + a(v) \cdot \nabla_x \chi = \frac{\partial m}{\partial v}, \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^d, v \in \mathbb{R},$$

$$(III.5) \qquad \chi := \chi(v, u(t,x)) = \begin{cases} +1 \text{ pour } 0 \leq v \leq u, \\ -1 \text{ pour } u \leq v \leq 0, \\ \ 0 \text{ sinon}, \end{cases}$$

et

$$(III.6) \qquad m(t,x,v) \text{ est une mesure bornée positive.}$$

Utilisant alors l'aspect local de l'équation hyperbolique (III.1), le fait que les mesures sont compactes dans des espaces de Sobolev négatifs, et les lemmes de compacités en moyennes on obtient alors que pour toute suite de données initiales u_n^0 bornée dans $L^1 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$, la suite des solutions $u_n(t,x)$ est localement compacte dans $L^1(\mathbb{R}_t^+ \times \mathbb{R}_x^d)$, sous la seule condition de non dégénérescence

$$(III.7) \qquad mes\{v \in \mathbb{R}, |a(v) \cdot \xi - \tau| \leq \varepsilon\} \leq \omega(\varepsilon),$$

pour tout $(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^{d+1}$ avec $|\xi|^2 + |\tau|^2 \leq 1$. Ici $\omega(\cdot)$ désigne une fonction continue telle que $\omega(0) = 0$. Ceci généralise un résultat précédent de L. Tartar [Ta] en dimension 1.

Considérons maintenant le cas de la dynamique des gaz isentropiques

$$(III.8) \qquad \begin{cases} \partial_t \rho + \partial_x \rho u = 0, \\ \partial_t \rho u + \partial_x (\rho u^2 + p(\rho)) = 0, \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ p(\rho) = K\rho^\gamma, \quad 1 < \gamma < +\infty,\ K = \dfrac{(\gamma-1)^2}{4\gamma}. \end{cases}$$

Muni de toutes les inégalités d'entropies pour les *entropies faibles* (celles compatibles avec le vide $\rho = 0$), on peut montrer ([LPT1]) que ce problème admet la formulation cinétique

$$(III.9) \qquad \frac{\partial}{\partial t}\chi + \frac{\partial}{\partial x}[\theta v + (1-\theta)u]\chi = \frac{\partial^2 m}{\partial v^2},$$

$$(III.10) \qquad \begin{cases} \theta = \dfrac{\gamma - 1}{2}, \\ \chi = (\rho^{\gamma-1} - (v-u)^2)_+^\lambda, \quad \gamma = \dfrac{3-\gamma}{2(\gamma-1)}, \\ m(t,x,v) \text{ est une mesure négative bornée.} \end{cases}$$

Cette équation, comme celles de l'introduction, met en évidence une structure où la vitesse d'advection est une combinaison de la vitesse microscopique v et la vitesse macroscopique $u(t,x)$. On ne peut pas appliquer les lemmes de compacité en moyenne ici pour prouver de la régularité (pas tellement à cause du terme en dérivée d'espace du $u\chi$, mais parce que pour $\gamma = 3$, cas purement cinétique, la fonction χ est peu régulière).

La seule issue pour démontrer la compacité forte de familles de solutions du système (III.8), et l'existence s'en déduit alors, consiste à utiliser les arguments de compacité par compensation de F. Murat et L. Tartar ([M], [Ta]) comme l'avait fait R. DiPerna [D]. Une démonstration complète de la compacité et l'existence, pour toutes les valeurs de γ, se trouve dans [LPS] et utilise la formule (III.9).

REFERENCES

[Ag] V. I. Agoshkov, Spaces of functions with differential-difference characteristics and smoothness of solutions of the transport equation. Soviet Math. Dokl. **29** (1984), 662–666.

[Bu] T.F. Buttke, Velicity methods : Lagrangian numerical methods which preserve the Hamiltonian structure of incompressible fluid flows. In *Vortex flow and related numerical methods* ed. J. T. Beale, G.H. Cottet and S. Huberson (Dordrecht : Kluwer) (1993).

[Bd1] D. Benedetto, Convergence of velicity blobs method for the Euler Equation. Math. Methods Appl. Sc. , vol. 19 (1986) 463-479.

[Bd2] D. Benedetto, A remark on the Hamiltonian structure of the incompresible flows. J. stat. Phys. **79** (1997).

[Bz] M. Bézard, Régularité précisée des moyennes dan les équations de transport, Bull. Soc. Math. France **22** (1994), 29–76.

[BC] Y. Brenier, L. Corrias. A kinetic formulation for multibranch entropy solutions of scalar conservation laws. Ann. Inst. H. Poincaré analyse non-linéaire.

[D1] R. Di Perna, Convergence of the viscosity method for Isentropic Gas Dynamics, Comm. Math. Phys. **91** (1983), 1-30.

[DiL1] R. J. DiPerna and P.-L. Lions, On the Cauchy problem for the Boltzmann Equation : global existence and weak stability results, Ann. Math. **130** (1989), 321–366.

[DiL2] R. J. DiPerna and P.-L. Lions, Global weak solutions of Vlasov-Maxwell systems, Comm. Pure Appl. Math. **42** (1989), 729–757.

[DiLM] R. J. DiPerna, P.-L. Lions and Y. Meyer, L^p regularity of velocity averages, Ann. Inst. H. Poincaré Ann. Non Linéaire **8** (1991), 271–287.

[Ge] P. Gérard, Moyennisation et régularité deux-microlocale, Ann. Sci. Ecole Normale Sup. **4** (1990), 89–121.

[GPS] F. Golse, B. Perthame and R. Sentis. Un résultat de compacité pour les équations du transport ..., C. R. Acad. Sci. Paris *Série I 301*(1985), 341–344.

[GLPS] F. Golse, P.-L. Lions, B. Perthame and R. Sentis, Regularity of the moments of the solution of a transport equation. J. Funct. Anal., 76 (1988), 110–125.

[HLP] H. Herero, B. Lucquin and B. Perthame. On the motion of dispersed balls in a potential flow. Raport LAN (1987).

[K] G.A. Kuz'min, Ideal incompressible hydrodynamics in terms of the vortex mementum density. Phys. Lett. **96A** (1983), 88.

[L] P.-L. Lions, Régularité optimale des moyennes en vitesses. C. R. Acad. Sci. Paris, t.320 Série I (1995), 911–915.

[LPS] P.L. Lions, B. Perthame, P.E. Souganidis. Existence of entropy solutions to isentropic gas dynamics system. C.P.A.M. Vol. 49, 599-638 (1996).

[LPT1] P. L. Lions, B. Perthame and E. Tadmor, A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related equations, J. of AMS **7** (1994), 169–191.

[LPT2] P.L. Lions, B. Perthame, E. Tadmor. Formulation cinétique des lois de conservation scalaires. C.R. Acad. Sc. Paris, t.312 Série I (1991).

[MP] J. H. Maddocks and R.L. Pego, An unconstrained Hamiltonian formulation for incompressible fluid flow. Comm. Math. Phys. **170** (1995) 207.

[M] F. Murat, Compacité par compensation, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **5** (1978), 489-507.

[O] V.I. Oseledets. On a new way of writing the Navier-Stokes equation : the Hamiltonian formalism. Comm. Moscow Math. Soc. (1988) ; translated in Russ. Math. Surveys **44** (1989), 210-211.

[PS] B. Perthame et P.E. Souganidis. A limiting case of averaging lemmas. Rapport LAN (1987).

[RS] G. Russo and P. Smereka. Kinetic theory for bubbly flow I : collisionless case. *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. 56, n°2, 327-357 (1996).

[Se] D. Serre *Systemes hyperboliques de lois de conservation, Parties I et II.* Diderot, Paris (1996).

[Sm] P. Smereka. A Vlasov description of the Euler equation. Nonlinearity **9** (1996), 1361-1386.

[Sp] H. Spohn. *Large scale dynamics of interacting particles.* Springer-Verlag, Berlin (1991).

[St] E. M. Stein. *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton University Press, Princeton (1970).

[Ta] L. Tartar, Compensated compactness and applications to partial differential equations, in *Research Notes in Mathematics, Nonlinear Analysis and Mechanics* : Herriot-Watt Symposium Vol. 4, ed. R.J. Knops, Pitman Press (1979).