JEAN-MICHEL BONY

Opérateurs intégraux de Fourier et calcul de Weyl-Hörmander (cas d'une métrique symplectique)

Journées Équations aux dérivées partielles (1994), p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1994____A9_0>

OPERATEURS INTEGRAUX DE FOURIER ET CALCUL DE WEYL-HÖRMANDER
(Cas d'une métrique symplectique)

Jean-Michel Bony

Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau cedex

La théorie des opérateurs intégraux de Fourier a surtout été développée dans le cadre classique (transformations symplectiques homogènes, symboles relatifs à la métrique standard $g_{10} = dx^2 + d\xi^2/\langle\xi\rangle^2$), un certain nombre de travaux (voir [A&F] [D&G]) étant toutefois relatifs à la métrique $g_{00} = dx^2 + d\xi^2$. Par contre, à l'exception de [Hö1] qui concerne des métriques voisines de la métrique standard, peu d'articles traitent des opérateurs intégraux de Fourier dans le cadre général du calcul de Weyl-Hörmander.

Nous définissons et étudions ici ces opérateurs dans le cas des métriques symplectiques ($g = g^\sigma$ avec les notations de [Hö1] [Hö2]), c'est-à-dire dans le cas où les boules de la métrique ont la taille minimale requise par le principe d'incertitude. D'une certaine manière, il s'agit d'un cadre se situant à l'opposé de celui des opérateurs classiques. On sait en effet que l'on dispose dans ce cas d'une théorie complète des opérateurs pseudo-différentiels, mais que le calcul symbolique est inexistant.

Les opérateurs intégraux de Fourier que nous introduisons dans la section 3 sont définis comme des superpositions d'opérateurs métaplectiques microlocalisés. Ils possèdent les propriétés que l'on peut en attendre : composition, action dans les espaces de Sobolev, conjugaison des opérateurs pseudo-différentiels. Du fait qu'il n'y a pas de calcul symbolique exigeant la conservation du crochet de Poisson, ils peuvent être associés à des transformations plus générales que des transformations symplectiques.

Dans la section 4, nous donnons des critères pour que les propagateurs $P_t = e^{itA}$ d'une équation d'évolution (solutions de $dP_t/dt = iA \circ P_t$) rentrent dans ce cadre. Cela permet notamment de prouver l'existence d'opérateurs intégraux de Fourier inversibles associés à des transformations symplectiques. Un exemple montre qu'il peut être nécessaire d'introduire des familles de métriques dépendant de t.

Les deux premiers paragraphes contiennent des rappels sur le calcul de Weyl-Hörmander, le confinement, les espaces 'de Sobolev', ... (voir [B&L] [B&C]). Ils définisent également des classes d'opérateurs 'microlocalisables pour un couple de métriques', qui contiendront les opérateurs intégraux de Fourier, et qui ne sont sans doute qu'une nouvelle présentation de classes déjà introduites par A. Unterberger [Un].

Le fait que la métrique soit symplectique apporte une simplification très importante, qui apparaît dans les théorèmes 1.6 et 2.4 : une fois microlocalisés dans les boules de la métrique, les opérateurs bornés sur L^2 sont tous de même nature et peuvent être ramenés à la forme particulièrement simple d'opérateurs métaplectiques. La théorie des opérateurs intégraux de Fourier pour des métriques générales devra superposer aux arguments qui vont suivre une analyse, plus fine et plus proche du cas classique, des opérateurs à l'intérieur des boules de la métrique.

Je tiens à remercier C. Gérard, N. Lerner et J. Sjöstrand pour de fructueuses discussions et échanges de courrier.

1 Métriques et confinement

Nous renvoyons à [Hö2] pour l'étude détaillée du calcul de Weyl-Hörmander et en donnons ci-dessous un bref résumé, avec les simplifications dues au fait que nous ne considérons que des métriques symplectiques,

La quantification de Weyl associe à toute distribution tempérée a, définie sur l'espace des phases $\mathbf{R}^{2n}_X = \mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_\xi$, l'opérateur a^w défini par

$$a^w u(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a\Big(\tfrac{x+y}{2}, \xi\Big) u(y)\, dy\, d\xi/(2\pi)^n \; .$$

Il est bien connu que $a \mapsto a^w$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^{2n})$ sur l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbf{R}^n), \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n))$ des applications linéaires continues de $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}'$, et un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$ sur l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n), \mathcal{S}(\mathbf{R}^n))$.

On note $[X,Y] = y\cdot\xi - x\cdot\eta$ la forme symplectique et, lorsqu'elle est définie, $\#$ l'opération de composition des symboles caractérisée par $(a\#b)^w = a^w \circ b^w$. On a

$$a\#b(X) = \pi^{-2n} \iint e^{-2i[X-Y_1, X-Y_2]} a(Y_1) b(Y_2)\, dY_1\, dY_2 \; .$$

Une *métrique de Hörmander symplectique* g est la donnée, pour chaque $Y \in \mathbf{R}^{2n}$, d'une forme quadratique définie positive $g_Y(\cdot)$ dépendant mesurablement de Y et vérifiant les deux hypothèses 1.1 et 1.2 ci-dessous. On notera $B_Y = \{X \mid g_Y(X-Y) \leq 1\}$ la boule unité centrée en Y.

1.1 *Caractère symplectique* Il existe, pour tout $Y \in \mathbf{R}^{2n}$, une transformation symplectique affine χ_Y telle que l'image de B_Y soit la boule unité euclidienne standard $\{X \mid |X| \leq 1\}$.

On sait qu'à toute transformation symplectique affine χ, on peut associer un opérateur unitaire U, unique à un facteur multiplicatif de module 1 près, tel que l'on ait $U^\star a^w U = (a\circ\chi)^w$ pour tout $a \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{2n})$. Ces opérateurs forment le groupe métaplectique affine, et nous noterons U_Y un opérateur associé à χ_Y.

1.2 *Tempérance (et lenteur)* Il existe C et N tels que l'on ait

$$\Big(g_Y(\cdot)/g_Z(\cdot)\Big)^{\pm 1} \leq C\Big(1 + g_Y(Y-Z)\Big)^N \; . \tag{1}$$

Nous noterons $\Delta(Y,Z)$ la quantité symétrisée du membre de droite,

$$\Delta(X,Y) = 1 + \max\{g_Y(Y-Z)\ ,\ g_Z(Y-Z)\}\ ,$$

en rappelant que la quantité obtenue en remplaçant max par min lui est logarithmiquement équivalente : elle est minorée par $C'^{-1}\Delta(Y,Z)^{1/N'}$ pour C' et N' convenables.

Exemple **1.3** Les métriques $g_{\delta\delta}$, pour $0 \leq \delta < 1$, définies par

$$g_{\delta\delta,Y}(dx, d\xi) = \langle\eta\rangle^{2\delta} dx^2 + \langle\eta\rangle^{-2\delta} d\xi^2 \ , \quad Y = (y, \eta) \ , \quad \langle\eta\rangle = (1 + |\eta|^2)^{1/2} \ ,$$

sont des exemples classiques de métriques symplectiques tempérées. La métrique g_{00} n'est autre que la métrique euclidienne.

Définition 1.4 *L'espace des symboles confinés en Y, noté* $\mathrm{Conf}(g, Y)$ *(ou* $\mathrm{Conf}(Y)$ *lorsque le contexte est clair) est l'espace $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$ muni de la famille de semi-normes suivantes*

$$\|a\|_{k\,;\mathrm{Conf}(g,Y)} = \left\|a \circ \chi_Y\right\|_{k\,;\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})} \ ,$$

où $\|\cdot\|_{k,\mathcal{S}}$ est une suite de semi-normes définissant la topologie de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$, quelconque mais choisie une fois pour toutes.

L'espace $\mathcal{L}(\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n), \mathcal{S}(\mathbf{R}^n))$ est naturellement muni d'une structure d'espace de Fréchet et est isomorphe, via l'application $a \mapsto a^w$, à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$. Compte tenu de la propriété caractéristique des opérateurs métaplectiques U_Y, on peut définir également les semi-normes de confinement par

$$\|a\|_{k\,;\mathrm{Conf}(g,Y)} = \|U_Y \circ a^w \circ U_Y^\star\|_{k\,;\mathcal{L}(\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n),\mathcal{S}(\mathbf{R}^n))} \ . \tag{2}$$

Une famille de symboles (a_Y) est dite *uniformément confinée* si les $\|a_Y\|_{k\,;\mathrm{Conf}(g,Y)}$ sont majorées par des constantes C_k indépendantes de Y.

Nous résumons dans l'énoncé suivant les propriétés fondamentales (voir [B&L], [B&C]) faisant intervenir le concept de confinement et la fonction Δ.

Théorème 1.5
(i) *Pour N assez grand, le noyau Δ^{-N} vérifie la propriété de Schur*

$$\sup_Y \int \Delta(Y, Z)^{-N} \, dZ < \infty \ , \tag{3}$$

et l'opérateur $f \mapsto \int \Delta(\cdot, Z)^{-N} f(Z) \, dZ$ est borné sur $L^2(\mathbf{R}^{2n})$.
(ii) *(Comparaison) Pour tout k, il existe C et N tels que*

$$\|a\|_{k\,;\mathrm{Conf}(Y)} \leq C\Delta(Y, Z)^N \, \|a\|_{k\,;\mathrm{Conf}(Z)} \ . \tag{4}$$

(iii) *(Biconfinement) Quels que soient k et N, il existe C et l avec*

$$\|a\#b\|_{k\,;\mathrm{Conf}(Y)} + \|a\#b\|_{k\,;\mathrm{Conf}(Z)} \leq C \, \|a\|_{l\,;\mathrm{Conf}(Y)} \, \|b\|_{l\,;\mathrm{Conf}(Z)} \, \Delta(Y, Z)^{-N} \ . \tag{5}$$

Alors que (i) et (iii) sont valables pour des métriques de Hörmander quelconques, le théorème suivant est caractéristique des métriques symplectiques.

Théorème 1.6 *Pour tout entier k, il existe C et l tels que, si T est un opérateur borné dans $L^2(\mathbf{R}^n)$, si a et b appartiennent à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$, et si $Y \in \mathbf{R}^{2n}$, en posant $c^w = a^w \circ T \circ b^w$, on a*

$$\|c\|_{k\,;\mathrm{Conf}(Y)} \leq C \, \|a\|_{l\,;\mathrm{Conf}(Y)} \, \|T\|_{\mathcal{L}(L^2)} \, \|b\|_{l\,;\mathrm{Conf}(Y)} \ ,$$

Nous utiliserons les semi-normes de confinement (2). On a donc

$$\|c\|_{k\,;\mathrm{Conf}(Y)} = \|U_Y a^w U_Y^\star\, U_Y T U_Y^\star\, U_Y b^w U_Y^\star\|_{k\,;\mathcal{L}(\mathcal{S}',\mathcal{S})}\ .$$

Mais le composé d'un opérateur borné de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$, d'un opérateur borné sur L^2 et d'un opérateur borné de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$ est lui-même borné de $\mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}$. En écrivant la continuité de cette opération de composition, on obtient

$$\forall k\ ,\ \exists l\ ,\ \exists C\ ,\ \|A'T'B'\|_{k\,;\mathcal{L}(\mathcal{S}',\mathcal{S})} \leq C\,\|A'\|_{l\,;\mathcal{L}(\mathcal{S}',\mathcal{S})}\,\|T'\|_{\mathcal{L}(L^2)}\,\|B'\|_{l\,;\mathcal{L}(\mathcal{S}',\mathcal{S})}\ .$$

Il ne reste plus qu'à appliquer cette relation à $A' = U_Y a^w U_Y^\star$, $T' = U_Y T U_Y^\star$ et $B' = U_Y b^w U_Y^\star$ pour obtenir le résultat.

2 Analyse microlocale des opérateurs

Nous allons d'abord introduire des classes d'opérateurs très générales, qui contiendront comme cas particuliers les opérateurs pseudo-différentiels et les opérateurs intégraux de Fourier. En quelque sorte, la définition 2.1 affirme qu'il s'agit des opérateurs qui non seulement sont bornés sur L^2, mais qui le sont de façon visible après découpage microlocal. Bien que définies de manière assez différente, ces classes coïncident très vraisemblablement (voir la remarque 2.6) avec celles des opérateurs métadifférentiels introduites par A. Unterberger [Un].

On se donne dans cette section deux métriques de Hörmander symplectiques g_1 et g_2 et on utilisera les notations de la section précédente (B_Y, χ_Y, U_Y, $\Delta(Y,Z)$, ...) affectées d'un indice 1 ou 2 supplémentaire.

On rappelle l'existence de partitions de l'unité du type suivant (voir [Be] [B&C])

$$\int_{\mathbf{R}^{2n}} \psi_{1Y} \# \theta_{1Y}\, dY = 1$$

où les φ_{1Y} et θ_{1Y} sont uniformément confinés pour g_1, et on utilisera des notations analogues pour g_2.

Etant donné un opérateur A de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$, on posera

$$\widetilde{A}(Y,Z) = \|\theta_{2Z}^w \circ A \circ \psi_{1Y}^w\|_{\mathcal{L}(L^2)} \tag{6}$$

pour Y et Z appartenant à $\mathbf{R}^{2n}$.

Enfin l'espace NL^2 des noyaux bornés sur $L^2(\mathbf{R}^{2n})$, sera l'espace des fonctions k définies sur $\mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{R}^{2n}$ telles que l'opérateur $f \mapsto \int_{\mathbf{R}^{2n}} |k(\cdot,Y)|\, f(Y)\, dY$ soit borné sur L^2. On notera $\|k\|_{NL^2}$ la norme de cet opérateur.

Théorème et Définition 2.1
(i) *On notera* $\mathcal{U}(1,g_1;1,g_2)$ *(ou parfois* $\mathcal{U}(1;1)$*) l'espace des opérateurs* A *appartenant à* $\mathcal{L}(\mathcal{S}(\mathbf{R}^n),\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n))$ *tels que le noyau* $\widetilde{A}$ *appartienne à* NL^2. *On posera* $\|A\|_{\mathcal{U}(1;1)} = \left\|\widetilde{A}\right\|_{NL^2}$.
(ii) *Pour qu'un opérateur* A *appartienne à* $\mathcal{U}(1;1)$, *il faut et il suffit qu'il puisse s'écrire sous la forme*

$$A = \iint b_Z^w \circ T_{YZ} \circ a_Y^w\, dY\, dZ \tag{7}$$

où les a_Y et les b_Z sont uniformément confinés pour g_1 et g_2 respectivement, où les T_{YZ} sont bornés sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ et où le noyau $(Y, Z) \mapsto \|T_{YZ}\|_{\mathcal{L}(L^2)}$ appartient à NL^2.
(iii) *Les opérateurs appartenant à $\mathcal{U}(1;1)$ sont bornés sur $L^2(\mathbf{R}^n)$ et forment une algèbre de Banach.*

Soit d'abord $A \in \mathcal{U}(1;1)$. On a

$$A = \iint \psi_{2Z}^w \{\theta_{2Z}^w A \psi_{1Y}^w\} \theta_{1Y}^w \, dY \, dZ ,$$

expression de la forme (7), où l'accolade joue le rôle de T_{YZ} et possède les majorations voulues.

Réciproquement, si A est donné par (7), on a

$$\theta_{2Z}^w A \psi_{1Y}^w = \iint (\theta_{2Z} \# b_Q)^w T_{PQ} (a_Q \# \psi_{1Y})^w \, dP \, dQ$$

et donc d'après (5)

$$\widetilde{A}(Y, Z) \leq C \iint \Delta_2(Z, Q)^{-N} \|T_{PQ}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \Delta_1(P, Y)^{-N} \, dP \, dQ ,$$

en choisissant N assez grand pour que (3) soit vérifié. Le noyau $\widetilde{A}$ appartient alors à NL^2, ce qui achève la démonstration de la partie (ii).

Quant à la partie (iii), c'est une conséquence directe du lemme de Cotlár appliqué à l'opérateur mis sous forme (7).

Remarque **2.2**

On peut aisément définir des opérateurs du même type d'ordre quelconque. Rappelons qu'une fonction strictement positive M définie sur $\mathbf{R}^{2n}$ est un poids relatif à g_1 si on a

$$(M(Y)/M(Z))^{\pm 1} \leq C \Delta_1(Y, Z)^N$$

où C et N ne dépendent pas de (Y, Z). Rappelons également (voir [B&C]) que l'espace de Sobolev $H(M, g_1)$ est l'espace de Hilbert constitué des distributions u vérifiant

$$\|u\|_{H(M,g_1)}^2 = \int M(Y)^2 \, \|\theta_{1Y}^w u\|_{L^2}^2 \, dY < \infty .$$

Si les M_i sont des poids relatifs aux g_i, on note $\mathcal{U}(M_1, g_1; M_2, g_2)$ l'espace des opérateurs A tels que le noyau $\widetilde{A}(Y, Z) M_2(Z)/M_1(Y)$ appartienne à NL^2. Ces opérateurs appliquent continûment $H(M_1, g_1)$ dans $H(M_2, g_2)$ et peuvent se mettre sous la forme

$$A = \iint M_1(Y) M_2(Z)^{-1} b_Z^w \circ T_{YZ} \circ a_Y^w \, dY \, dZ ,$$

où les b, T, a vérifient les mêmes conditions que dans (7).

Plus généralement, les opérateurs de la forme suivante

$$A = \iint M_1(Y) M_2(Z)^{-1} b_Z^w \circ T_{YZ} \circ a_Y^w \, d\nu(Y, Z) \tag{8}$$

appartiennent à $\mathcal{U}(M_1, g_1; M_2, g_2)$ lorsque les a_Y et b_Z sont uniformément confinés, les T_{YZ} sont uniformément bornés sur L^2 et lorsque ν est une mesure positive qui "appartient à NL^2 une fois régularisée", c'est-à-dire qui vérifie

$$\nu(B_{1Y} \times B_{2Z}) \in NL^2 .$$

Il n'est pas difficile de montrer, pour $A \in \mathcal{U}(M_1,g_1; M_2,g_2)$ et $B \in \mathcal{U}(M_2,g_2; M_3,g_3)$, que l'on a $BA \in \mathcal{U}(M_1,g_1; M_3,g_3)$ avec

$$\|BA\|_{\mathcal{U}(M_1,g_1;M_3,g_3)} \leq \mathrm{C}^{\mathrm{te}} \|A\|_{\mathcal{U}(M_1,g_1;M_2,g_2)} \|B\|_{\mathcal{U}(M_2,g_2;M_3,g_3)} \; .$$

En particulier, les $\mathcal{U}(M,g;M,g)$ sont des algèbres de Banach.

2.3 Forme réduite des éléments de $\mathcal{U}(1;1)$ Ces opérateurs s'écrivent comme une superposition d'opérateurs élémentaires $b_Z T_{YZ} a_Y$ que l'on peut considérer comme des opérateurs (quelconques) bornés sur L^2, microlocalisés à la source et au but en Y et Z respectivement. Le résultat suivant montre que l'on peut, sans restreindre la généralité, supposer que les T_{YZ} sont des opérateurs métaplectiques.

Théorème 2.4 *Pour toute suite C_k d'éléments de $\mathbf{R}^+$, il existe une suite C'_k d'éléments de $\mathbf{R}^+$ telle que l'on ait la propriété suivante. Soient a, b, T vérifiant*

$$\|a\|_{k\,;\mathrm{Conf}(g_1,Y)} \leq C_k \;, \qquad \|b\|_{k\,;\mathrm{Conf}(g_2,Z)} \leq C_k \;, \qquad \|T\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq 1 \;,$$

et soit U_{YZ} un opérateur métaplectique affine associé à une transformation symplectique affine χ_{YZ} envoyant B_{1Y} sur B_{2Z}, il existe alors α, α', β, β' tels que

$$b^w T a^w = U_{YZ}\alpha^w = \beta^w U_{YZ} = \beta'^w U_{YZ}\alpha'^w \tag{9}$$

avec

$$\|\alpha\|_{k\,;\mathrm{Conf}(g_1,Y)} + \|\alpha'\|_{k\,;\mathrm{Conf}(g_1,Y)} + \|\beta\|_{k\,;\mathrm{Conf}(g_2,Z)} + \|\beta'\|_{k\,;\mathrm{Conf}(g_2,Z)} \leq C'_k \;,$$

On peut en effet écrire

$$b^w T a^w = b^w U_{YZ} U^\star_{YZ} T a^w = U_{YZ} c^w U^\star_{YZ} T a^w \;,$$

en posant $c^w = U^\star_{YZ} b^w U_{YZ}$, c'est-à-dire $c = b \circ \chi_{YZ}$. Les semi-normes de confinement de c en Y sont donc égales aux semi-normes de confinement de b en Z. Il suffit de poser $\alpha^w = c^w(U^\star_{YZ}T)a^w$ et on obtient la première égalité de (9), le théorème 1.6 permettant d'estimer les semi-normes de confinement de α en Y. On obtient facilement la seconde décomposition en posant $\beta^w = U_{YZ}\alpha^w U^\star_{YZ}$ et donc $\beta = \alpha \circ \chi^{-1}_{YZ}$.

La dernière décomposition s'obtient en écrivant $\alpha = \alpha'' \# \alpha'$, avec contrôle des semi-normes de confinement en Y (voir [Be] [B&C]), et en posant $\beta' = \alpha'' \circ \chi^{-1}_{YZ}$.

Corollaire 2.5 *Tout opérateur $A \in \mathcal{U}(1;1)$ peut s'écrire sous la forme*

$$A = \iint K(Y,Z) U_{YZ} \alpha^w_{Y;Z}\, dY\, dZ$$

où les U_{YZ} sont des opérateurs métaplectiques comme ci-dessus, où les $\alpha_{Y;Z}$ sont uniformément confinés en Y pour g_1, et où K appartient à NL^2.

Remarque **2.6** On devrait pouvoir montrer, par des arguments analogue à ceux qui précèdent, que la classe $\mathcal{U}(1;1)$ coïncide avec la classe des opérateurs métadifférentiels introduite par A. Unterberger [Un]. Ceux-ci sont définis comme superposition d'opérateurs

$$Au = \sum \iint K(Y,Z)\,(u \mid \varphi_{1Y})\,\varphi_{2Z}\, dY\, dZ$$

où les φ_{1Y} sont des fonctions propres de l'oscillateur harmonique centré en Y associé à la métrique g_{1Y}, et où $K \in NL^2$.

2.7 Métrique g_{00} et classe de Sjöstrand Lorsque les métriques g_1 et g_2 sont égales à la métrique euclidienne standard, l'analyse précédente de a^w peut aussi s'interpréter comme une analyse microlocale (en dimension double) de a vu comme une fonction sur $\mathbf{R}^{2n}$. On utilise la formule suivante

$$\alpha\#a\#\beta(X) = \pi^{-2n}\iint e^{-2i[X-S,X-T]}\alpha(S)a(S+T-X)\beta(T)\,dS\,dT\,.$$

En posant $Y = S+T-X$ et $2P = S-T$, on obtient

$$\alpha\#a\#\beta(X) = \pi^{-2n}\iint e^{-2i[X-Y,P]}\alpha(\tfrac{X+Y}{2}+P)\beta(\tfrac{X+Y}{2}-P)a(Y)\,dY\,dP\,,$$

ou encore, en posant $\Phi(X,P) = \alpha(X+P)\beta(X-P)$,

$$\alpha\#a\#\beta(X) = \pi^{-2n}\iint e^{-2i[X-Y,P]}\Phi(\tfrac{X+Y}{2},P)a(Y)\,dY\,dP\,.$$

A la normalisation près, on reconnaît là $\Phi^W a$, où Φ^W est le quantifié de Weyl de la fonction Φ, le nouvel espace des phases étant le produit de deux exemplaires de $\mathbf{R}^{2n}$ mis en dualité par la forme symplectique.

Ce qui précède montre qu'il va être possible de caractériser les symboles a tels que $a^w \in \mathcal{U}(1;1)$ en terme des $\Phi^W a$, lorsque les fonctions Φ parcourront une partition de l'unité dans $\mathbf{R}^{4n}$. D'autre part, l'effet régularisant des Φ^W permet de remplacer la norme dans $\mathcal{L}(L^2)$ par des normes plus faibles, à condition de se ramener à une boule fixe. On obtient le résultat suivant.

On se donne $\Phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^{4n})$ d'intégrale 1, on pose $\Phi_{X_0,P_0} = \Phi(\cdot - X_0, \cdot - P_0)$ et $a_{X_0,P_0} = \Phi^W_{X_0,P_0}a$ (on pourrait ici remplacer la quantification de Weyl par la quantification standard). On fixe un espace de Banach B tel que l'on ait $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n}) \subset B \subset \mathcal{S}'(\mathbf{R}^{2n})$ avec inclusions continues, et on pose

$$\check{A}(X_0,P_0) = \left\| Z \mapsto e^{2i[Z,P_0]}a_{X_0P_0}(X_0+Z)\right\|_B\,.$$

Le résultat suivant signifie que ce noyau est équivalent, compte tenu du changement de variable $Y = X+P$ et $Z = X-P$, au noyau $\widetilde{A}(Y,Z)$.

Théorème 2.8 *Pour que $A = a^w$ appartienne à $\mathcal{U}(1,g_{00};1,g_{00})$, il faut et il suffit que le noyau*

$$(Y,Z) \longmapsto \check{A}\Big(\frac{Y+Z}{2}\,,\ \frac{Y-Z}{2}\Big)$$

appartienne à NL^2. La norme de ce noyau fournit une norme équivalente à $\|A\|_{\mathcal{U}(1;1)}$.

J. Sjöstrand a récemment introduit [Sj] une nouvelle classe de symboles $S(1)$ qui possède notamment des propriétés remarquables sur l'inversibilité des opérateurs associés. En utilisant une partition de l'unité $1 = \sum_{\mathbf{Z}^{2n}}\varphi_\nu$; $\varphi_\nu = \varphi(\cdot - \nu)$, l'espace $S(1)$ est constitué des a tels que $\sup_\nu\left|(\widehat{\varphi_\nu a})(\cdot)\right|$ appartienne à $L^1(\mathbf{R}^{2n})$. On voit sans difficulté (en prenant $B = \mathcal{F}L^1$) qu'il est équivalent de demander que $\left|\check{A}(X,P)\right| \le h(P)$ avec $h \in L^1$.

L'espace $\operatorname{Op} S(1)$ est donc la sous-algèbre de $\mathcal{U}(1;1)$ formée des opérateurs A tels que $\left|\widetilde{A}(Y,Z)\right| \le h(Y-Z)$ avec $h \in L^1(\mathbf{R}^{2n})$.

3 Concentration et opérateurs intégraux de Fourier

Si Σ est un sous-ensemble de $\mathbf{R}^{2n} \times \mathbf{R}^{2n}$, on peut définir de manière générale les éléments $A \in \mathcal{U}(1;1)$ concentrables sur Σ, soit par la décroissance de $\widetilde{A}(Y,Z)$ lorsque (Y,Z) s'éloigne (en un sens mesuré par Δ) de Σ, soit par le fait que l'on peut choisir la mesure ν de (8) portée par Σ. Nous nous bornerons ici au cas où Σ est la diagonale, ce qui nous redonnera les opérateurs pseudo-différentiels, et au cas où Σ est le graphe d'un homéomorphisme tempéré, ce qui définira les opérateurs intégraux de Fourier.

3.1 Opérateurs pseudo-différentiels Rappelons la définition des classes de symboles associées à une métrique de Hörmander g et à un poids M. Une fonction $a(X)$ appartient à $S(M,g)$ si a est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}^{2n}$ et si les semi-normes suivantes sont finies,

$$\|a\|_{k;S(M,g)} = \sup_{\substack{l\leq k; X\in\mathbf{R}^{2n} \\ g_X(T_j)\leq 1}} |\partial_{T_1}\dots\partial_{T_l} a(X)| \Big/ M(X) \ ,$$

en notant ∂_T la dérivée directionnelle $a \mapsto \langle da, T\rangle$.

Pour que a appartienne à $S(M,g)$, il faut et il suffit que l'on ait une décomposition

$$a(X) = \int_{\mathbf{R}^{2n}} M(Y) a_Y(X)\, dY \tag{10}$$

où la famille a_Y est uniformément confinée.

Le théorème suivant fournit, pour une métrique symplectique g, une caractérisation des opérateurs pseudo-différentiels assez différente des caractérisations usuelles fondées sur des estimations de commutateurs. Elle ne fait intervenir que la décroissance de la fonction $\widetilde{A}$ définie en (6).

Théorème 3.2 *Pour qu'un opérateur A appartienne à* $\operatorname{Op} S(M,g)$, *il faut et il suffit que A soit concentré sur la diagonale de $\mathbf{R}^{2n}$ au sens suivant (qui implique $A \in \mathcal{U}(MM_1; M_1)$ pour tout poids M_1) :*

$$\forall N \ , \ \exists C \ , \quad \widetilde{A}(Y,Z) \leq C M(Y) \Delta(Y,Z)^{-N} \ . \tag{11}$$

La propriété (11) entraîne que A se met sous la forme

$$A = \iint M(Y) \theta_Z^w T_{YZ} \psi_Y^w \, dY\, dZ = \iint M(Y) c_{YZ}^w \, dY\, dZ \ ,$$

avec $\|T_{YZ}\|_{\mathcal{L}(L^2)} = O(\Delta(Y,Z)^{-N})$. D'après (4), les semi-normes de confinement au point Y de θ_Z croissent comme des puissances de $\Delta(Y,Z)$ et, d'après le théorème 1.6, les semi-normes de confinement de c_{YZ} en Y sont $O(\Delta(Y,Z)^{-N})$ pour tout N. Il suffit d'intégrer par rapport à Z pour mettra A sous la forme (10).

3.3 Opérateurs intégraux de Fourier On revient à la donnée de deux métriques de Hörmander symplectiques g_1 et g_2.

Définition 3.4 *On dit qu'un homéomorphisme F de $\mathbf{R}^{2n}$ sur lui-même est tempéré s'il existe $C > 0$ et $N > 0$ tels que*

$$\forall Y\ ,\ \forall Z\ , \quad C^{-1}\Delta_1(Y,Z)^{1/N} \leq \Delta_2(F(Y),F(Z)) \leq C\Delta_1(Y,Z)^N\ .$$

Cette propriété impose une restriction à l'infini mais est aussi une condition locale : alle implique que l'image de la g_1-boule de rayon 1 centrée en Y est contenue dans la g_2-boule de rayon C' (et contient la boule de rayon $1/C'$) centrée en $F(Y)$. En un certain sens, l'homéomorphisme F conserve "presque" le volume. Par contre F n'a aucune raison de conserver la forme symplectique, même de manière approchée.

Si M_2 est un poids pour g_2, la fonction $M_2 \circ F$ est alors un poids pour g_1. Pour simplifier, nous nous limiterons à la définition des opérateurs intégraux de Fourier d'"ordre 0" (i.e. de poids 1), l'extension au cas général étant immédiate.

Théorème et Définition 3.5 *On dit que A est un opérateur intégral de Fourier de poids 1 associé au difféomorphisme tempéré F si les trois propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées.*
(i) *A est concentré sur le graphe de F au sens suivant (qui implique $A \in \mathcal{U}(1;1)$) :*

$$\forall N\ ,\ \exists C\ , \quad \widetilde{A}(Y,Z) \leq C\Delta_2(F(Y),Z)^{-N}$$

(ii) *A peut se mettre sous la forme*

$$A = \iint K(Y,Z) b_Z^w T_{YZ} a_Y^w \, dY\, dZ\ ,$$

où les a_Y et b_Z sont uniformément confinés pour g_1 et g_2, où les T_{YZ} sont uniformément bornés sur L^2 et où, pour tout N, on a $K(Y,Z) = O(\Delta_2(F(Y),Z)^{-N})$.
(iii) *A peut se mettre sous la forme*

$$A = \int U_{Y;F(Y)} \alpha_Y^w \, dY$$

où la famille α_Y est uniformément confinée pour g_1, et où $U_{Y;F(Y)}$ est un opérateur métaplectique associé à une transformation symplectique affine envoyant B_{1Y} sur $B_{2,F(Y)}$.

Ces opérateurs possèdent les propriétés essentielles que l'on peut espérer, en l'absence de calcul symbolique, d'opérateurs intégraux de Fourier : action sur les espaces de Sobolev, composition, entrelacement des opérateurs pseudo-différentiels.

Théorème 3.6 *Soit F un difféomorphisme tempéré et A un opérateur intégral de Fourier de poids 1 associé à F.*
(i) *L'adjoint $A^\star$ est un opérateur intégral de Fourier de poids 1 associé à F^{-1}.*
(ii) *Si M est un poids relatif à g_1, l'opérateur A est continu de $H(M,g_1)$ dans $H(M \circ F^{-1}, g_2)$.*
(iii) *Si G est un difféomorphisme tempéré relatif à g_2 et à une troisième métrique symplectique g_3, et si B est un opérateur intégral de Fourier de poids 1 associé à G, alors BA est un opérateur intégral de Fourier de poids 1 associé à $G \circ F$.*
(iv) *Si A' est un opérateur intégral de Fourier de poids 1 associé à F^{-1} et si $P \in \operatorname{Op} S(M_2,g_2)$ alors $A'PA \in \operatorname{Op} S(M_1,g_1)$, avec $M_1 = M_2 \circ F$.*

Un opérateur métaplectique affine, correspondant à une transformation symplectique χ, constitue bien sûr l'exemple type d'un opérateur intégral de Fourier associé à χ, la métrique de départ étant n'importe quelle métrique symplectique g, et la métrique d'arrivée étant $\chi_* g$. La section suivante fournira des exemples moins triviaux d'opérateurs intégraux de Fourier inversibles.

4 Equations d'évolution et opérateurs intégraux de Fourier

Etant donné $a \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, à valeurs réelles et à croissance lente, l'objet de cette section est de donner des conditions suffisantes sur a permettant d'assurer l'existence d'une famille d'opérateurs intégraux de Fourier P_t (que l'on pourrait noter e^{ita^w}) solution de

$$\frac{d}{dt} P_t = a^w \circ P_t \quad , \quad P_0 = I \, . \tag{12}$$

Dans les bons cas, les P_t auront pour inverse les P_{-t} et cela permettra notamment de démontrer l'existence d'opérateurs intégraux de Fourier inversibles associés à certaines transformations canoniques. Les arguments qui vont suivre s'appliqueraient presque sans modification au cas où le hamiltonien a dans (12) dépendrait aussi de t.

Plus précisément, a et une métrique symplectique g_0 étant donnés, notre objectif est de définir, pour t appartenant à un certain intervalle $[0, T]$ (ou $[-T, 0]$) :

- une famille de métriques symplectiques g_t,
- une famille de difféomorphismes symplectiques χ_t, de $\mathbf{R}^{2n}$ sur lui-même, qui sont tempérés (pour g_0, g_t) au sens de la définition 3.4,
- une famille d'opérateurs intégraux de Fourier P_t associés à χ_t tels que (12) soit vérifié dans $[0, T]$.

Soit $1 = \int \alpha_Y \, dY$ une partition de l'unité où les α_Y sont uniformément confinés pour g_0. En posant $P_{tY} = P_t \alpha_Y^w$, nous devons donc résoudre

$$\frac{d}{dt} P_{tY} = a^w \circ P_{tY} \quad , \quad P_0 = \alpha_Y \, , \tag{13}$$

et nous chercherons P_{tY} sous la forme

$$P_{tY} = U_{t,Y} \alpha_{tY}^w$$

où les α_{tY} devront être uniformément confinés pour g_0, et où les U_{tY} seront des opérateurs métaplectiques.

Dans une première étape, purement géométrique, nous construirons les χ_t puis simultanément les U_{tY} et les g_t, en introduisant les conditions (G1), (G2), (G3). Dans une seconde étape, nous introduirons une condition (A) de nature analytique qui, jointe aux conditions précédentes, permettra de montrer l'existence des α_{tY}.

4.1 Etape géométrique

La première hypothèse est bien naturelle :

(G1) *Le champ hamiltonien H_a a un flot global*

On notera $t \mapsto \chi_t(Y)$ la solution de $\frac{d}{dt}\chi_t(Y) = H_a(\chi_t(Y))$ telle que $\chi_0(Y) = Y$, avec $H_a = (\partial a/\partial\xi\ ,\ -\partial a/\partial x)$. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, les χ_t sont des difféomorphismes symplectiques de $\mathbf{R}^{2n}$ sur lui-même.

Nous devons ensuite déterminer les $U_{t,Y}$. L'algèbre de Lie du groupe métaplectique affine s'identifiant à l'espace des polynômes réels en $2n$ variables de degré ≤ 2, nous les chercherons en résolvant l'équation

$$\frac{d}{dt}U_{t,Y} = ib_{tY}^w U_{tY} \quad , \quad U_{0,Y} = I$$

où les b_{tY} sont des polynômes réels de degré ≤ 2 à déterminer.

Nous voulons que la transformation symplectique affine χ_{tY} associée à U_{tY} envoie la boule de centre Y (pour g_0) sur la boule centrée en $\chi_t(Y)$ (pour g_t à définir), et donc en particulier que $\chi_{tY}(Y) = \chi_t(Y)$. Les trajectoires issues de Y pour le hamiltonien a ou pour le hamiltonien dépendant du temps b_{tY} doivent donc être les mêmes, ce qui impose que a et b_{tY} aient même différentielle au point $\chi_t(Y)$. Cela laisse a priori plusieurs choix possibles.

1. (Choix canonique) : on définit b_{tY} égal au développement de Taylor d'ordre 2 de a au point $\chi_t(Y)$. Cela définit de façon unique U_{tY} et χ_{tY} qui est la transformation symplectique affine tangente d'ordre 1 à χ_t en Y. La métrique g_t est caractérisée par le fait que la g_t-boule centrée en $\chi_t(Y)$ est l'image de la g_0-boule centrée en Y par la différentielle en Y de χ_t.
2. On définit b_{tY} égal au développement de Taylor d'ordre 1 de a au point $\chi_t(Y)$. Cela définit les U_{tY} qui, du fait que les b_{tY} sont d'ordre 1, sont des translations de phase : la transformation symplectique affine χ_{tY} associée est la translation amenant Y en $\chi_t(Y)$. Enfin g_t est ainsi caractérisée : la g_t-boule centrée en $\chi_t(Y)$ est la translatée de la g_0-boule centrée en Y.
3. Tous les autres choix : b_{tY} est n'importe quel polynôme du second degré tel que $b_t - a$ soit plat d'ordre 1 au point $\chi_t(Y)$. Cela définit les U_{tY}, les χ_{tY} et g_t : la la g_t-boule centrée en $\chi_t(Y)$ est l'image de la g_0-boule centrée en Y par χ_{tY}.

Tous les choix précédents fonctionnent pour $t \in \mathbf{R}$, mais cette étape géométrique ne sera achevée que si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

(G2) *Les métriques g_t sont tempérées pour $t \in [0,T]$, la constante de tempérance figurant dans (1) étant uniforme en t.*

(G3) *Les χ_t, pour $t \in [0,T]$, sont uniformément tempérées : il existe C et N avec*

$$C^{-1}\Delta_0(Y,Z)^{1/N} \leq \Delta_t(\chi_t(Y),\chi_t(Z)) \leq C\Delta_0(Y,Z)^N$$

4.2 Etape analytique

Pour montrer que l'opérateur $P_t = \int U_{tY}\alpha_{tY}^w\, dY$ est un opérateur intégral de Fourier, il reste à déterminer les α_{tY} et à montrer que ceux-ci sont uniformément confinés pour la métrique g_0. D'après (13) on doit avoir

$$P'_{t,Y} = ib_{t,Y}^w U_{t,Y}\alpha_{t,Y}^w + U_{t,Y}\alpha_{t,Y}'^w = ia^w U_{t,Y}\alpha_{t,Y}^w\ ,$$

et donc

$$\alpha'^w_{t,Y} = iU^\star_{t,Y}(a - b_{t,Y})^w U_{t,Y}\alpha^w_{t,Y}$$

ou encore

$$\alpha'_{t,Y} = i\widetilde{r_{t,Y}}\#\alpha_{t,Y} \ , \qquad r_{t,Y} = a - b_{t,Y} \ , \qquad \widetilde{r_{t,Y}} = r_{t,Y} \circ \chi_{t,Y} \ . \tag{14}$$

La fonction r_{tY} est le reste du développement de Taylor (d'ordre 1 ou 2 ou "intermédiaire") de a au point $\chi_t(Y)$.

Nous pouvons maintenant introduire la condition analytique, qui est une majoration en $X \log X$, uniforme en Y, des dérivées de ces restes.

(A) *Pour $l \geq 1$ et $g_{t,Y_t}(T_j) \leq 1$, en posant $Y_t = \chi_t(Y)$, on a avec des constantes C_l indépendantes de Y,*

$$|\partial_{T_1} \ldots \partial_{T_l} r_{t,Y}(X)| \leq C_l\Big(1 + g_{t,Y}(X - Y_t)\Big)^{1/2} \log\Big(2 + g_{t,Y}(X - Y_t)\Big) \ ,$$

En composant avec χ_{tY}, on peut énoncer la condition équivalente, pour $g_{0,Y}(T_j) \leq 1$ et $l \geq 1$,

$$|\partial_{T_1} \ldots \partial_{T_l} \widetilde{r_{t,Y}}(X)| \leq C_l\Big(1 + g_{0,Y}(X - Y)\Big)^{1/2} \log\Big(2 + g_{0,Y}(X - Y)\Big) \ ,$$

Remarque **4.3** La condition précédente écrite en un seul point Y entraîne l'estimation suivante

$$\forall\, |\beta| \geq 1 \ , \qquad \left|\partial^\beta_X a(X)\right| \leq C_\beta \langle X \rangle \log(1 + \langle X \rangle) \ . \tag{15}$$

En particulier, l'estimation des dérivées premières montre que les trajectoires du champ hamiltonien sont globales. La condition (G1) (que nous avons dû introduire pour énoncer (A)) est en fait conséquence de (15).

Théorème 4.4
(i) *Sous la seule condition (15), dans l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{S}, \mathcal{S})$, ou dans l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{S}', \mathcal{S}')$, il existe une unique solution définie sur $\mathbf{R}$ de $P'_t = ia^w P_t$ vérifiant $P_0 = I$. Les P_t forment un groupe d'opérateurs unitaires sur L^2.*
(ii) *Si on peut déterminer les $b_{t,Y}$ pour t appartenant à un intervalle I contenant l'origine tels que les conditions (G1),(G2),(G3) et (A) soient satisfaites dans tout compact de I, si s et $s + t$ appartiennent à I, l'opérateur P_t est un opérateur intégral de Fourier associé à χ_t pour le couple de métriques (g_s, g_{s+t}).*

L'essentiel de la démonstration consiste à démontrer, pour un hamiltonien dépendant du temps vérifiant (15), l'existence globale dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, d'une solution de $\partial\varphi_t/\partial t = ia^w\varphi_t$ avec $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$. Il s'agit essentiellement d'une estimation d'énergie (à régularité exponentiellement décroissante en raison du logarithme).

Appliqué à $(a - b_{tY})$ le long d'une seule trajectoire, cela entraîne facilement la partie (a). Sous l'hypothèse (A), en ramenant les boules B_{0Y} à la boule unité standard, on obtient des estimations de confinement uniformes sur les solutions α_{tY} de (14) et donc la partie (b).

Remarques **4.5** La condition (A) peut être affaiblie de diverses manières en ce qui concerne les estimations à l'infini. On peut par exemple, pour les r_{tY} ramenés à une boule fixe, n'exiger pour les dérivées premières qu'une majoration en $\langle X\rangle^2 \log(1+\langle X\rangle)$ du crochet $(\sum x_i \partial r/\partial\xi_i - \xi_i \partial r/\partial x_i)$. Les conditions portant sur r_{tY} au voisinage de Y_t, qui apparaîssent comme les plus contraignantes, n'en sont toutefois pas affaiblies.

La condition (A), pour $t = 0$ et X proche de Y, impose que les $g_{0,Y}$-dérivées d'ordre ≥ 1 de $a(X) - b_{0,Y}(X)$ soient bornées uniformément en Y. La méthode ne peut donc fonctionner que si les g_0-dérivées d'ordre ≥ 3 de a sont bornées.

Pour la même raison, lorsque les dérivées (toujours relatives à g_0) d'ordre 2 de a ne sont pas bornées, on ne peut pas se contenter de prendre pour $b_{t,Y}$ le développement de Taylor d'ordre 1 de a. Il faut prendre tout ou partie du développement de Taylor d'ordre 2, ce qui entraîne une déformation des métriques, même pour $g_0 = g_{00}$.

Il n'est en fait pas difficile de montrer que, s'il existe un choix des b_{tY} tel que la condition (A) soit satisfaite, alors elle est aussi satisfaite en choisissant b_{tY} égal au développement de Taylor d'ordre 2. En outre, les métriques g_t obtenues pour l'un ou l'autre choix sont équivalentes. On peut donc toujours se limiter au choix canonique des b_{tY} et vérifier si les (Gi) et (A) sont satisfaites. Les autres choix peuvent apporter des simplifications de calcul, mais ne peuvent pas modifier le résultat.

Exemple **4.6** Si on reprend l'exemple trivial où a est un polynôme du second degré et où les P_t forment un groupe à un paramètre d'opérateurs métaplectiques, les conditions (Gi) et (A) sont facilement vérifiées avec le choix canonique : $b_{tY} = a$, $r_{tY} = 0$. Il faut bien voir que, si g_0 n'est pas la métrique euclidienne g_{00}, les g_0-dérivées secondes de a ne sont en général pas bornées.

Exemple **4.7** On prend $g_0 = g_{00}$ et on suppose que les dérivées (usuelles) de a d'ordre ≥ 2 sont bornées. Le flot est global, les χ_t sont lipschitziennes. En prenant $b_{t,Y}$ égal au développement de Taylor d'ordre 1, les conditions (Gi) et (A) sont satisfaites et g_t reste constamment égale à g_{00}.

Les e^{ita^w} forment donc un groupe à un paramètre d'opérateurs intégraux de Fourier pour la métrique g_{00}.

Des résultats voisins ont été obtenus dans [A&F] et [D&G], pour t petit, les opérateurs intégraux de Fourier étant alors définis par phase et amplitude.

Exemple **4.8** En dimension 1 pour simplifier, on prend $g_0 = g_{00}$ et

$$a(x,\xi) = xh(\xi) \ ,$$

où la fonction h est C^∞, impaire, et coïncide avec $\xi \log \xi$ pour $\xi > 2$. Les dérivées d'ordre 3 de a ne sont pas uniformément bornées. Par contre, la condition (15) est vérifiée et, en prenant b_{tY} égal au développement de Taylor d'ordre 2, les hypothèses (Gi) et (A) sont vérifiées uniformément lorsque on se limite à $(y,\eta) \in [-R,R] \times \mathbf{R}$. On a alors

$$g_t \sim g_{\delta\delta} \quad , \quad \delta = \tfrac{e^t - 1}{e^t} \ .$$

On en déduit les deux résultats suivants.

• Les $P_t = e^{ita^w}$, pour $t \in \mathbf{R}$, forment un groupe d'opérateurs unitaires, appliquant $\mathcal{S}$ dans lui-même et $\mathcal{S}'$ dans lui-même.

• Si $t \geq 0$, si $B \in \operatorname{Op} S(1, g_{00})$ est supporté dans $|x| \leq R$, alors $P_t \circ B$ est un opérateur intégral de Fourier relatif au couple de métriques $(g_{00}\,,\, g_{\delta\delta})$, avec $\delta = 1 - e^{-t}$.

Bibliographie

[A&F] K. Asada et D. Fujiwara, On some oscillatory integral transformations in $L^2(\mathbf{R}^n)$, *Japan J. Math.* **4** (1978) 299–361.

[Be] R. Beals, Weighted distribution spaces and pseudodifferential operators, *J. An. Math.* **39** (1981) 130–187.

[B&C] J.-M. Bony et J.-Y. Chemin, Espaces fonctionnels associés au calcul de Weyl-Hörmander, *Bull. Soc. Math. France* **122** (1994) 77–118.

[B&L] J.-M. Bony et N. Lerner, Quantification asymptotique et microlocalisations d'ordre supérieur I, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.* 4[e] série **22** (1989) 377–433.

[D&G] J. Derezinski et C. Gérard, Asymptotic completeness of N-particle systems, Prépublication, Ecole Polytechnique.

[Hö1] L. Hörmander, The Weyl calculus of pseudo-differential operators, *Comm. Pure Appl. Math.* **32** (1979) 359–443.

[Hö2] L. Hörmander, *The analysis of linear partial differential operators*, Springer-Verlag (1985).

[Sj] J. Sjöstrand, An algebra of pseudodifferential operators, *Math. Res. Letters* **1** (1994) 185–192.

[Un] A. Unterberger, Les opérateurs métadifférentiels, *Lecture Notes in Physics* **126** (1980) 205–241.