JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

YANN BRENIER

Le problème du plus court chemin en hydrodynamique incompressible

Journées Équations aux dérivées partielles (1992), p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1992____A7_0>

Le problème du plus court chemin en hydrodynamique incompressible

Y.Brenier
Université Paris 6 et ENS Paris

June 16, 1992

Soit X l'adhérence d'un ouvert borné assez régulier de l'espace euclidien R^d, par exemple l'hypercube $[0,1]^d$ (ou plus généralement une variété compacte $d-$dimensionnelle plate telle $X = R^d/Z^d$, $X = [0,1]^{d-1} \times R/Z$, etc...). On munit X de la norme euclidienne $|.|$ de R^d et de la mesure de Lebesgue, notée dx et normalisée de sorte que X soit de mesure 1. Considérons l'espace U des champs de vecteurs

$$(t,x) \in R \times X \rightarrow u(t,x) \in R^d,$$

Lipschitz continus, à divergence (en x) nulle et parallèles à la frontière de X. Par le théorème de Cauchy-Lipschitz, on peut associer à chaque $u \in U$, le flot $(s,t,x) \in R \times R \times X \rightarrow g(s,t,u)x \in X$, défini par

$$\partial_t g(s,t,u)x = u(t, g(s,t,u)x), \quad g(s,s,u)x = x.$$

Un tel flot décrit mathématiquement le mouvement d'un fluide incompressible se mouvant à l'intérieur de X et le champ u s'interprète comme le champ de vitesses du fluide. Notons que le flot vérifie la propriété de transitivité

$$g(t_1,t_2,u)(g(t_0,t_1,u)x) = g(t_0,t_2,u)x,$$

pour tous t_0, t_1, $t_2 \in R$ et $x \in X$. L'énergie cinétique du champ u à l'instant t est définie par

$$\frac{1}{2}\int_X |u(t,x)|^2 dx.$$

Une question assez naturelle est de savoir si, étant donné un mouvement de fluide incompressible généré par un champ $w \in U$, il est possible, entre deux instants $-\infty < t_0 < t_1 < +\infty$ fixés, de déplacer la masse fluide de facon plus économique, c'est-à-dire de trouver un champ $u \in U$ générant le même déplacement de t_0 à t_1 tel que l'énergie cinétique dépensée entre t_0 et t_1 soit minimale.

En termes mathématiques [Ar,AK,Sh,Br2...], cela conduit au

Problème du plus court chemin

Soit $w \in U$ et $h = g(t_0, t_1, w)$. Minimiser parmi tous les $u \in U$ tels que $g(t_0, t_1, u) = h$ l'action définie par

$$A(t_0, t_1, u) = \frac{1}{2}(t_1 - t_0) \int_{t_0}^{t_1} \int_X |u(t,x)|^2 dx dt.$$

L'action minimale ne dépend en fait que de l'application h et pas de t_0 et t_1, qu'on peut normaliser en posant $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$. On l'interprète comme le carré d'une distance géodésique entre h et l'application identité I qu'on note

$$\delta_X(I,h) = \inf_{u \in U,\ g(0,1,u)=h} (2A(0,1,u))^{1/2}.$$

Lien avec les équations d'Euler

Si l'on suppose que le minimum est atteint par un champ $u \in U$, un calcul de variations classique montre que u est solution des équations d'Euler des fluides parfaits sur l'intervalle $]t_0, t_1[$ en ce sens que le champ d'accélération

$$\partial_t u + (u.\nabla)u$$

est un champ gradient (dont le potentiel s'interprête comme l'opposé du champ de pression p.) Inversement, on vérifie à l'aide de l'inégalité de Poincaré unidimensionnelle (appliquée à la variable t) que si $w \in U$ est solution des équations d'Euler sur l'intervalle $]t_0, t_1[$

$$\partial_t w + (w.\nabla)w = -\nabla p,$$

avec un champ de pression p vérifiant

$$(1) \qquad (t_1 - t_0)^2 \sum_{i,j=1}^{d} \partial_{ij} p(t,x) \xi_i \xi_j \leq \pi^2 |\xi|^2,$$

pour tous $\xi \in R^d$, $t \in]t_0, t_1[$, $x \in X$, alors w atteint le minimum d'action parmi tous les champs $u \in U$ tels que $g(t_0, t_1, u) = g(t_0, t_1, w)$. Ainsi, les fluides incompressibles régis par les équations d'Euler, c'est-à-dire les fluides "parfaits", obéissent à un principe de moindre action tout à fait analogue à celui de la mécanique rationnelle classique. Cette propriété est fort connue depuis la parution du célèbre article de V.I.Arnold [Ar].

Un résultat local

Tout comme le problème de Cauchy pour les équations d'Euler (qui consiste à chercher un champ u solution des équations d'Euler vérifiant $u(t=0,x)=u_0(x)$ où u_0 est un champ de vecteur donné, à divergence nulle sur X et parallèle à la frontière - voir [BB]), le problème du plus court chemin a des solutions "locales" uniques. On déduit en effet des travaux d'Ebin et Marsden [EB] (qui suivent l'approche géométrique d'Arnold) que, si $h-I$ est assez petit dans une norme de Sobolev assez fine (typiquement dans $W^{s,2}(X)$ pour un s supérieur à $d/2+1$), alors il existe un unique champ u réalisant le minimum d'action (t_0 et t_1 étant fixés).

Un résultat global négatif

Dans [Sh], A.Shnirelman a démontré que le problème du plus court chemin peut ne pas avoir de solutions dans le cas de la dimension $d=3$ et conjecturé qu'il en a toujours en dimension 2, suggérant ainsi une différence considérable séparant les mouvements incompressibles bi et tridimensionnels. Plus précisément, dans le cas où $X=[0,1]^3$, Shnirelman considère les données h "bidimensionnelles", i.e. générées par des champs de vecteurs w bidimensionnels de la forme

$$(t,x_1,x_2,x_3)\rightarrow(w_1(t,x_1,x_2),w_2(t,x_1,x_2),0).$$

Pour de telles données, on peut considérer le problème du chemin le plus court soit en dimension 3 (en minimisant parmi tous les champs tridimensionnels), soit en dimension 2 (en se limitant aux seuls champs bidimensionnels), ce qui revient à considérer $X=[0,1]^2$ plutôt que $X=[0,1]^3$. On a alors évidemment

$$\delta_{[0,1]^2}(I,h)\geq\delta_{[0,1]^3}(I,h),$$

mais il se peut que l'inégalité soit stricte (en raison de la plus grande "rigidité" des mouvements incompressibles bidimensionnels). Dans ce cas, Shnirelman montre que le minimum d'action peut ne jamais être atteint parmi les champs tridimensionnels. En effet, un tel champ u peut être "renormalisé", au moyen d'une transformation appropriée en la variable x_3 tendant à le rendre davantage bidimensionnel en réduisant sa troisième composante, en un nouveau champ u', toujours tridimensionnel et admissible, mais d'action strictement inférieure à celle de u. On voit se manifester là un phénomène d'homogénéisation par rapport à la troisième variable d'espace : les champs tridimensionnels minimisants tentent désespérément de devenir bidimensionnels sans jamais pouvoir y parvenir. (Sinon il y aurait contradiction avec l'inégalité

$$\delta_{[0,1]^2}(I,h)>\delta_{[0,1]^3}(I,h).)$$

La démonstration de Shnirelman utilise une estimation remarquable (et qui nécessite de longues démonstrations utilisant des concepts de flots incompressibles discrets provenant de la théorie des systèmes dynamiques et analogues à ceux de [Br1]), à savoir qu'il existe des constantes $C > 0$ et $\alpha \in]0,1]$, telles que

$$d_{[0,1]^3}(I,h) \le C\|I-h\|_{L^2}^{\alpha},$$

quel que soit h de la forme $g(t_0,t_1,u)$ pour $u \in U$. En particulier, le diamètre géodésique de l'ensemble des applications h est fini. Le résultat est fin en ce sens qu'il n'a pas d'équivalent en dimension 2 ! En effet, des résultats (beaucoup plus simples) de géométrie symplectique [ER] (voir [AK]), utilisant l'invariant de Calabi, montrent que le diamètre correspondant en dimension 2 ($X = [0,1]^2$, par exemple) est infini. (Ce qui, en passant, illustre la "rigidité" des mouvements incompressibles bidimensionnels.)

Vers les solutions généralisées

Le résultat de Shnirelman indique assez clairement la nécessité (au moins pour certains types de données h, telles que les données "bidimensionnelles" sur $X = [0,1]^3$) d'envisager des solutions généralisées (ou homogénéisées) pour décrire les limites de suites minimisantes. D'autre part, la considération de certaines suites de solutions stationnaires particulières des équations d'Euler conduisent à des conclusions similaires. Un exemple (peu connu), décrit dans [Br4], est donné par le champ

$$u^{\epsilon}(x_1,x_2,x_3) = r(x_1,x_2)(\cos(x_3/\epsilon), \sin(x_3/\epsilon), \epsilon[x_1\sin(x_3/\epsilon) - x_2\cos(x_3/\epsilon)]),$$

où

$$r(x_1,x_2) = \exp(-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)).$$

Ce champ est, pour toute valeur de $\epsilon > 0$, solution des équations d'Euler sur R^3 (ou si l'on préfère sur $R^2 \times R/Z$, si on se limite aux ϵ de la forme $(2\pi n)^{-1}$ pour n entier positif) pour le champ de pression

$$p(x_1,x_2) = \frac{1}{2}r^2(x_1,x_2),$$

qui, lui, ne dépend pas d'ϵ. Lorsque $\epsilon \to 0$, le champ de vitesse devient de plus en plus oscillant et converge vers un champ de vitesse "généralisé" bidimensionnel, comportant une variable d'homogénéisation θ uniformément distribué sur l'intervalle $[0,1]$,

$$u(x_1,x_2,\theta) = r(x_1,x_2)(\cos(2\pi\theta), \sin(2\pi\theta), 0),$$

la convergence ayant lieu au sens des "mesures de Young" (voir [Yo] or [T]), c'est-à-dire,

$$\int_{R^3} f(x,u^{\epsilon}(x))dx \to \int_{R^3}\int_0^1 f(x,u(x_1,x_2,2\pi\theta))d\theta dx,$$

pour toute fonction f continue à support compact sur $R^3 \times R^3$. Ce passage à la limite sur u^ϵ n'est pas suffisant pour décrire la limite du flot $g(.,.,u^\epsilon)$ correspondant. Il faut pour cela se rappeler le sens des équations d'Euler : les particules fluides sont accélérées par la force de pression. Autrement dit,

$$\partial_{tt}[g(s,t,u^\epsilon)x] = -(\nabla p)(g(s,t,u^\epsilon)x),$$

pour tous x, s et t. Comme la pression ne dépend pas de ϵ, on peut introduire le flot sur $R^3 \times R^3$ associé au système différentiel hamiltonien :

$$x' = v, \quad v' = -\nabla p(x).$$

On note $(s,t,x,v) \rightarrow (\xi(s,t,x,v), \eta(s,t,x,v))$ ce flot, avec la normalisation $\xi(s,s,x,v) = x$, $\eta(s,s,x,v) = v$. Il est alors facile de voir, qu'au sens des mesures de Young, le flot $g(s,t,u^\epsilon)$ converge vers le flot "généralisé"

$$(s,t,x,\theta) \rightarrow \xi(s,t,x,u(x,\theta)),$$

où θ est encore la variable d'homogénéisation. On notera, que contrairement aux champs classiques, il n'est pas possible de déduire directement le flot généralisé de la donnée du champ de vitesses généralisé. (C'est le champ d'accélération qui nous permet de retrouver le flot généralisé.) En revanche, la dérivation du champ de vitesse à partir du flot reste possible dans le cadre généralisé. Cela indique une certaine supériorité de la description "lagrangienne" (i.e. en termes de flots) par rapport à la description "eulérienne" (en termes de champs de vitesses), lorsque l'on s'éloigne du cadre classique.

Le concept de flot incompressible généralisé

A tout champ $u \in U$, et plus précisément au flot $g(.,.,u)$ correspondant, on peut associer une unique mesure de probabilité sur l'espaces des chemins $\Omega = \{t \in R \rightarrow z(t) \in X\} = X^R$ de la manière suivante. Prenons une suite finie croissante $\tau = (\tau_1 < ... < \tau_k)$ quelconque dans R. On définit alors une unique mesure de probabilité μ_τ sur X^τ (qu'on peut identifier à X^k), en posant

$$< \mu_\tau, \phi >= \int_X \phi(g(0,\tau_1,u)x, ..., g(0,\tau_k,u)x)dx,$$

pour toute fonction ϕ continue sur X^k. De toutes ces mesures, lorsque τ décrit l'ensemble des suites finies croissantes de R, on déduit, suivant une construction classique depuis Kolmogorov (voir [Si], ch.1), l'existence d'une unique mesure de probabilité μ sur l'espace produit (non dénombrable) $\Omega = X^R$, telle que sa projection sur chaque produit X^τ coincide avec μ_τ. Cette mesure est une mesure de probabilité Borélienne et régulière sur Ω. De manière un peu rapide, on peut dire que μ est la mesure de Dirac concentrée, dans l'espace des chemins, sur les trajectoires du champ de vitesse u. L'incompressibilité de $g(.,.,u)$ rejaillit sur

μ par le fait que la projection de μ sur chaque copie de X se réduit à la mesure de Lebesgue. En effet, pour tout $t \in R$ fixé, la projection μ_t de μ est définie par

$$< \mu_t, f >= \int_X f(g(0,t,u)x)dx,$$

pour toute fonction f continue sur X. Or u étant à divergence nulle, $x \rightarrow g(0,t,u)x$ est une transformation de X qui conserve la mesure de Lebesgue. Il en découle que

$$< \mu_t, f >= \int_X f(x)dx,$$

c'est-à-dire $\mu_t = dx$. D'autre part, si, pour $t_0 < t_1$ fixés, on pose $h = g(t_0, t_1, u)$, on calcule aisément la projection $\mu_{(t_0,t_1)}$ de μ sur le couple d'instants (t_0, t_1) en fonction de h. En effet, $\mu_{(t_0,t_1)}$ est définie par :

$$< \mu_{(t_0,t_1)}, f >= \int_X f(g(0,t_0,u)x, g(0,t_1,u)x)dx,$$

pour toute fonction f continue sur X^2. En utisant le changement de variable conservant la mesure $x \rightarrow g(t_0,0,u)x$ et la transitivité du flot, on trouve alors

$$< \mu_{(t_0,t_1)}, f >= \int_X f(x, g(t_0,t_1,u)x)dx = \int_X f(x, h(x))dx,$$

c'est-à-dire

$$\mu_{(t_0,t_1)} = \eta,$$

avec

$$\eta(dx,dy) = \delta(y - h(x))dx.$$

Enfin, on peut calculer l'action $A(t_0,t_1,u)$ directement en fonction de μ. Pour cela, on introduit la "fonctionnelle de chemin" définie par

$$e_{(t_0,t_1)}(z) = (t_1 - t_0)\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} |z'(t)|dt,$$

pour tous les chemins $z \in \Omega$ absolument continus et appartenant à l'espace de Sobolev $W^{1,2}([t_0,t_1], R^d)$, et par

$$e_{(t_0,t_1)}(z) = +\infty$$

pour les autres chemins. Cette fonctionnelle de Ω dans $[0,+\infty]$ est sci pour la topologie produit (voir [Br2]). Elle induit sur l'ensemble des mesures de Borel positives régulières (c'est-à-dire les formes linéaires positives sur le Banach $C(\Omega)$ des fonctions continues sur Ω) la fonction

$$\mu \rightarrow A'(t_0,t_1,\mu) = \int_\Omega e_{(t_0,t_1)}(z)\mu(dz),$$

qui est sci pour la topologie faible-* à valeurs dans $[0,+\infty]$. Si μ est la mesure associée au champ u, on retrouve là exactement l'action $A(t_0,t_1,u)$. Ces propriétés conduisent à considérer l'ensemble

$$M(t_0,t_1,\eta) = \{\mu \in C(\Omega)',\ \ \mu \geq 0,\ \ \forall t \in R,\ \ \mu_t = dx,\ \ \mu_{(t_0,t_1)} = \eta\},$$

qu'on appelle ensemble des flots généralisés incompressibles compatibles avec les données t_0, t_1, η. On pose alors le

Problème du plus court chemin généralisé

Etant donnés $w \in U$, $h = g(t_0,t_1,w)$, $t_0 < t_1$ et

$$\eta(dx,dy) = \delta(y - h(x))dx,$$

minimiser parmi tous les flots incompressibles généralisés $\mu \in M(t_0,t_1,\eta)$ l'action $A'(t_0,t_1,\mu)$. Comme pour le problème classique, on introduit

$$\delta'_X(I,h) = \inf_{\mu \in M(0,1,\eta)} (2A'(0,1,\mu))^{1/2},$$

distance géodésique généralisée entre h et l'application identité I. Bien sur, on a toujours

$$\delta'_X(I,h) \leq \delta_X(I,h).$$

Solutions du problème généralisé

Le problème généralisé a été introduit et résolu dans [Br2] (dans l'ignorance du travail de Shnirelman). Il est immédiat qu'il admet toujours une solution. (On minimise en effet une fonction sci à valeurs dans $[0,+\infty]$, non identiquement égale à $+\infty$, sur $M(t_0,t_1,\eta)$ qui est une partie compacte de $C(\Omega)'$ pour la topologie faible-*.) Le même résultat reste vrai pour n'importe quelle mesure η sur X^2, du moment que ses projections sur chaque composante du produit X^2 soient la mesure de Lebesgue. (Le résultat est démontré dans [Br2] pour $X = R^d/Z^d$ et pour des ouverts bornés réguliers quelconques dans [Ro].) Le lien entre le problème généralisé et les équations d'Euler est assez subtil. Un premier résultat de cohérence est établi dans [Br2]. Si w est solution classique des équations d'Euler et si le champ de pression correspondant vérifie l'inégalité (1) alors w minimise l'action non seulement parmi les champs de vitesse classiques (comme indiqué plus haut) mais aussi parmi tous les flots généralisés incompressibles compatibles. Autrement dit, les solutions classiques des équations d'Euler vérifie le principe de moindre action dans la classe généralisée, ce qui justifie de considérer cette dernière pour une approche globale du problème du plus court chemin. En revanche, le "phénomène de Lavrentiev"

$$\delta'_X(I,h) < \delta_X(I,h)$$

est possible dans le cas de la dimension $d = 2$. En effet, si l'on reprend les exemples de Shnirelman, on peut trouver pour $X = [0,1]^3$ des données "bidimensionnelles" h pour lesquelles

$$\delta_{[0,1]^3}(I,h) < \delta_{[0,1]^2}(I,h).$$

Or, on peut montrer [Ro] que, dans le cadre généralisé, on a pour une telle donnée h

$$\delta'_{[0,1]^3}(I,h) = \delta'_{[0,1]^2}(I,h)$$

(car l'homogénéisation de la dimension 3 vers la dimension 2, déjà mentionnée, peut être poussée jusqu'au bout dans le cadre généralisé contrairement au cadre classique). On obtient donc

$$\delta'_{[0,1]^2}(I,h) < \delta_{[0,1]^2}(I,h).$$

Ce phénomène signifie que lorsqu'on considère le problème généralisé en dimension 2, on garde trace de la dimension 3, ce qui n'est pas le cas du problème classique. C'est une question d'appréciation personnelle que de voir là un avantage ou un inconvénient. D'après une communication personnelle d'A. Shnirelman, le phénomène de Lavrentiev disparait en dimension 3, ce qui justifie pleinement l'utilisation du cadre généralisé.

Dualité et régularité de la pression

Une autre question est de trouver en quel sens les solutions généralisées sont solutions des équations d'Euler. Pour cela il faut s'intéresser au champ de pression, qui est l'inconnue duale du problème de minimisation. Pour la retrouver, on considère dans [Br3] d'autre flots généralisés que ceux de $M(t_0, t_1, \eta)$. Ce sont les flots généralisés "légèrement compressibles" qu'on construit de la manière suivante. On se donne un $\mu \in M(t_0, t_1, \eta)$, une fonction r et un champ de vecteur $x \to v(x)$ réguliers à support compact respectivement dans $]t_0, t_1[$ et l'intérieur de X. Il est important de noter que v n'est pas supposé être à divergence nulle. On considère alors la mesure image $\mu(v,r)$ de μ par l'application qui déforme les chemins de la manière suivante,

$$[t \to z(t)] \in \Omega \to [t \to g(t_0, t_0 + r(t), v)z(t)] \in \Omega,$$

où $g(.,.,v)$ est le flot associé à v. Pour chaque valeur de t, la projection $\mu(v,r)_t$ n'est plus égale à la mesure de Lebesgue mais à la mesure

$$\alpha(v,r)(t,x)dx = det D_x[g(t_0 + r(t), t_0, v)x]dx,$$

qui dépend de v et r mais pas de μ. C'est en ce sens que $\mu(v,r)$ est "légèrement compressible". (Le mot léger signifiant que $\mu(v,r)$ est obtenu à partir de μ après déformation par un champ de vecteur régulier à support compact.) On montre alors dans [Br3] qu'il existe une unique distribution p sur $]t_0,t_1[\times X$ telle que pour tout $\mu \in M(t_0,t_1,\eta)$ d'action minimale,

$$< p, \alpha(v,r) - 1 > \leq A'(t_0,t_1,\mu(v,r)) - A'(t_0,t_1,\mu)$$

soit vérifiée pour toute fonction r et tout champ de vecteur v réguliers à support compact respectivement dans $]t_0,t_1[$ et l'intérieur de X. On peut également montrer que p dépend continument de la donnée h pour la topologie L^2 forte [Ro]. Derrière cette formulation, se dissimule une forme affaiblie des équations d'Euler, comparable à celle introduite par DiPerna et Majda [DM], à savoir

$$< \partial_i p(t,x), r(t)v_i(x) > = \int_\Omega \left(\int_{t_0}^{t_1} z_i'(t) \frac{d}{dt}[r(t)v_i(z(t))]dt \right)\mu(dz)$$

(où on utilise la convention des indices répétés et le crochet de dualité des distributions). De plus, la condition d'optimalité fournit l'inégalité supplémentaire

$$< \partial_{ij} p(t,x), r^2(t)v_i(x)v_j(x) > \leq \int_\Omega \left(\int_{t_0}^{t_1} |\frac{d}{dt}[r(t)v(z(t))]|^2 dt \right)\mu(dz).$$

*

[Ar] V.I.Arnold, Ann. Institut Fourier 16 (1966) 319-361.

[AK] V.I.Arnold, B.Khesin, Annu. Rev. Fluid Mech 24 (1992) 145-166.

[Br1] Y.Brenier, Comp. Meth. in Appl. Mech. 75 (1989) 325-332.

[Br2] Y.Brenier, J.of the AMS 2 (1990) 225-255.

[Br3] Y.Brenier, A dual least action principle for the motion of an ideal incompressible fluid, Laboratoire d'analyse numérique, rapport R91030.

[Br4] Y.Brenier, A Vlasov type formulation of the Euler equations, Rapport INRIA 1070 (1989).

[BB] H.Brezis, J-P.Bourguignon, J. Funct. Analysis 15 (1974) 341-363.

[DM] R.DiPerna, A.Majda, Comm. Math. Phys. 108 (1987), 667-689.

[EB] D.Ebin, J.Marsden, Ann. of Math. 92 (1970) 102-163.

[ER] Y.Eliashberg, T.Ratiu, Invent. Math. 103 (1991) 327-340.

[Ro] M.Roesch, manuscrit.

[Sh] A.Shnirelman, Math. Sbornik USSR 56 (1987) 79-105.

[Si] B.Simon, Functional integration and quantum physics, Academic Press, New York, 1979.

[T] L.Tartar, The compensated compactness method applied to systems of conservation laws, Systems of nonlinear PDE, NATO ASI series, Reidel, Dordecht, 1983.

[Yo] L.C.Young, Lectures on the calculus of variations, 1980, Chelsea, New York.