Journées Équations aux dérivées partielles

Michael Beals
Max Bezard

Équations de champs non linéaires : des solutions non nécessairement bornées

Journées Équations aux dérivées partielles (1992), p. 1-13
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1992____A20_0>

EQUATIONS DE CHAMPS NON LINEAIRES : DES SOLUTIONS NON NECESSAIREMENT BORNEES

Michael Beals
Rutgers University

Max Bezard
Ecole Polytechnique

I - Introduction

Depuis les travaux de Bachelot et Klainerman [1, 21], il est bien connu que les propriétés d'invariance (lorentzienne et conforme) de systèmes d'équations aux dérivées partielles apparaissant naturellement en théorie lagrangienne des champs imposent aux non linéarités quadratiques rencontrées une structure algébrique très particulière appelée forme compatible ou condition nulle, et qui avait été mise en évidence par Hanouzet et Joly [15].

Cette observation s'est révélée capitale pour prouver l'existence globale en temps de solutions très régulières, de faible amplitude, pour des systèmes d'équations d'ondes [21], ou pour le système de Dirac - Klein - Gordon [1]. Par ailleurs, pour ces mêmes systèmes issus de la physique, il est naturel de s'intéresser à d'éventuelles solutions peu régulières, c'est-à-dire correspondant à des données de Cauchy dont la masse, la charge et l'énergie sont finies. Cependant, jusque récemment, les résultats d'existence locale de solutions ne prenaient pas en compte la structure très particulière des non linéarités rencontrées, et résultaient d'un schéma classique dû à Segal [30] et Kato [18]. Les solutions ainsi obtenues sont toujours bornées.

Initialement motivés par des considérations d'analyse harmonique, de nombreux travaux ont tiré profit de la forme particulière du symbole principal, pour obtenir des estimées L^p linéaires pour l'équation des ondes, l'équation de Klein - Gordon, ou pour des opérateurs hyperboliques à coefficients variables [20, 24, 27]. Ces estimations uniformes en temps reposent sur des conditions de courbure dans les phases des opérateurs intégraux de Fourier qui définissent les paramétrix. Un autre type d'inégalité apparait pour la première fois dans un article de Strichartz [35], où l'on montre que les moyennes en temps d'une solution d'équation des ondes jouissent de meilleures propriétés de régularité que les solutions à une date fixée.

Cet effet régularisant des moyennes en temps est lié une fois de plus aux propriétés de courbure du cône d'onde, comme le prouve l'article de Kenig - Ruiz - Sogge [20] qui reprouve et généralise légèrement l'inégalité de Strichartz. Ces inégalités ont trouvé un champ d'application dans l'étude d'équations des ondes semi-linéaires par les travaux de Brenner, Kapitanski, Shatah, Struwe [9, 10, 19, 31]. Signalons enfin que cet effet régularisant en temps est la clé de la continuité $L^p, p > 2$ de l'opérateur maximal sphérique dans $\mathbf{R}^2$, démontrée par Sogge [32, 33].

Partant de ces considérations, il est alors naturel d'espérer combiner les idées de non linéarités compatibles et d'estimations L^p en espace et temps pour des solutions d'équations des ondes, et c'est ce programme qu'ont récemment entrepris Klainerman et Machedon [22] d'une part, et Ponce et Sidéris d'autre part [28]. En utilisant la forme exacte de la paramétrix de l'équation des ondes dans l'espace de Minkowski, conjuguée à un lemme géométrique dû à Lindblad [23], les auteurs montrent dans [22] l'existence et l'unicité de solutions pour des systèmes d'équations des ondes à non linéarités compatibles pour des données de Cauchy dans $H^2(\mathbf{R}^3)\times H^1(\mathbf{R}^3)$. Ce niveau de régularité est plus faible que celui obtenu par la théorie générale [18] qui requiert des données de Cauchy dans $H^s(\mathbf{R}^3)\times H^{s-1}(\mathbf{R}^3)$ avec $s>\frac{5}{2}$, mais la méthode employée, outre sa longueur, possède deux défauts : d'une part elle est strictement limitée à l'équation des ondes, et elle ne permet pas d'autre part de comprendre ce qui arrive entre le seuil $s=2$ obtenu et le seul $s>\frac{5}{2}$ usuel.

En utilisant l'inégalité de Strichartz [36], Ponce et Sidéris [28] ont montré qu'il y a existence locale et unicité de solutions pour ces mêmes systèmes à non linéarités quadratiques, sans aucune condition de compatibilité, pour $2<s\leq 2,5$.

Notre but sera ici de prouver tous ces résultats sans autre outil que de simples estimations L^2 et de montrer que ces propriétés d'existence locale et d'unicité s'étendent sans difficultés au cas de systèmes d'équations de Klein - Gordon, et au cas de systèmes de Dirac - Klein - Gordon dans l'espace de Minkowski.

Nous montrons en un certain sens que le cas $n=3$ est particulier et qu'aucune condition de compatibilité n'est utile pour l'analogue de ces résultats en dimension supérieure.

De plus, ayant en vue des applications à des systèmes dont le symbole principal n'est pas à coefficients constants, nous détaillons une généralisation de l'estimation de Strichartz pour des opérateurs intégraux de Fourier.

Les détails des preuves paraitront ultérieurement [3, 4].

II - Les systèmes à coefficients constants

• Considérons un système d'équations d'ondes couplées de manière quadratique dans $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$:

$$\square\, u^I = Q^I(U,U) \qquad \text{où } Q^I \text{ est une forme quadratique en } U=(u^1,\cdots u^\ell)$$

Théorème 1.— *Si les données initiales* $U_0=(u^1(0)\cdots u^\ell(0)$ *et* $U_1=(\partial_t u^1(0)\cdots\partial_t u^\ell(0))$ *sont dans* $H^{\frac{n-3}{2}}(\mathbf{R}^n)$ *et* $H^{\frac{n-5}{2}}(\mathbf{R}^n)$ *respectivement, si* $n\geq 5$, *il existe pour un* $T^*>0$ *une unique solution* $U(t,x)$ *au système précédent et* $U(t,x)\in H^{\frac{n-3}{2}}(]0,T^*[\times\mathbf{R}^n)$.

Remarque : il n'est pas difficile de trouver un analogue pour $n = 3$ ou 4 :

$$\text{Si } U_0 \in H^{\frac{n-1}{2}+\delta}(\mathbf{R}^n), \quad U_1 \in H^{\frac{n-3}{2}+\delta}(\mathbf{R}^n) \quad \text{avec} \begin{cases} \delta > 0 \text{ si } n = 3 \\ \delta \geq 0 \text{ si } n = 4 \end{cases}$$

la conclusion reste inchangée dans le résultat précédent, et $U(t,x) \in H^{\frac{n-1}{2}+\delta}(]0,T^*[\times \mathbf{R}^n)$

• Considérons à présent un système d'équations d'ondes couplées par les gradients de manière quadratique :

$$\square\, u^I = G^I(U) Q^I(DU) \quad I = 1 \cdots m, \ U = (u^I)$$

où G^I sont des fonctions C^∞ de leur argument et Q^I sont des formes quadratiques en $DU = (\partial_t U, \partial U, \cdots \partial_m U)$.

Théorème 1.2.— *Si les données initiales $U_0(x)$ et $U_1(x)$ sont dans $H^{\frac{n+1}{2}+\delta}(\mathbf{R}^n)$ et $H^{\frac{n-1}{2}+\delta}(\mathbf{R}^n)$ respectivement, avec $0 < \delta$ si $n = 3$ et $0 \leq \delta$ si $n \geq 4$, alors il existe un T^* et une unique solution au système précédent $U(t,x)$ avec :*

$$U(t,x) \in H^{\frac{n+1}{2}+\delta}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n)$$

• Venons en au cas des non linéarités compatibles dans l'espace de Minkowski $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ sur lequel les coordonnées seront notées : $(t,x) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$.

Introduisons pour $u, v \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^4)$ les formes quadratiques suivantes :

$$Q_0(Du, Dv) = \partial_t u\ \partial_t v - \nabla u . \nabla v$$
$$Q_{\alpha\beta}(Du, Dv) = \partial_\alpha u\ \partial_\beta v - \partial_\beta u\ \partial_\alpha v = \frac{\partial u}{\partial x^\alpha}\frac{\partial v}{\partial x^\beta} - \frac{\partial u}{\partial x^\beta}\frac{\partial v}{\partial x^\alpha} \quad \alpha, \beta = 0,1,2,3$$

Considérons alors un système d'équations d'ondes couplées :

$$\square\, u^I = \sum_{\alpha\beta JK} F^I_{\alpha\beta,JK}(U) Q_{\alpha\beta}(Du^J, Du^K) + \sum_{JK} F^I_0(U) Q_0(Du^J, Du^K)$$

où les $F^I_{\alpha\beta,JK}, F^I_0$ sont des fonctions C^∞ de leurs arguments

Théorème 1.3.— *(Klainerman - Machedon). Si $U_0 \in H^2(\mathbf{R}^3)$, si $U_1 \in H^1(\mathbf{R}^3)$, il existe un $T^* > 0$, une unique solution $U(t,x)$ au système précédent, avec les données de Cauchy $U(0,x) = U_0(x)$ et $\partial_t U(0,x) = U_1(x)$. De plus $U \in H^2(]0,T^*[\times \mathbf{R}^3)$.*

• Considérons le cas de m particules de masses $m_I > 0$ couplées dans un systèmes de Klein - Gordon

$$(\square + m_I^2)u^I = \sum_{\alpha\beta, JK} F^I_{\alpha\beta,JK}(U)\ Q_{\alpha\beta}(Du^J, Du^K) + \sum_{JK} F^I_0(U)\ Q_0(Du^J, Du^K)$$

où les F^I_0 et $F^I_{\alpha\beta,JK}$ sont C^∞ en leurs arguments.

Théorème 1.4.— *Si $U_0 \in H^2(\mathbf{R}^3)$, si $U_1 \in H^1(\mathbf{R}^3)$, il existe un $T^* > 0$, une unique solution $U(t,x)$ sur $[0, T^*[\times\mathbf{R}^3$ au système précédent, avec les données de Cauchy $U(0,x) = U_0(x)$ et $\partial_t U(0,x) = U_1(x)$. De plus $U \in H^2(]0, T^*[\times\mathbf{R}^3)$.*

• Venons en au système de Dirac - Klein - Gordon [5, 14].

Rappelons que les matrices de Pauli $\sigma^j, j = 1,2,3$ sont définies par :

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Définissons les matrices de Dirac γ^μ, $\mu = 0,1,2,3,5$ par :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} id & 0 \\ 0 & -id \end{pmatrix} \qquad \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^j \\ -\sigma^j & 0 \end{pmatrix} \qquad j = 1,2,3 \quad \text{et} \quad \gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$$

de sorte que

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & id \\ id & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^0\gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & id \\ -id & 0 \end{pmatrix}$$

Considérons deux réels positifs m, M.

L'opérateur de Dirac est défini par : $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^4; \mathbf{C}^4) \mapsto -i\gamma^\mu\partial_\mu\psi + M\psi = \mathcal{D}\psi$

Le système de Dirac - klein - Gordon est donné par

$$(DKG)\begin{cases} \mathcal{D}\psi = -i\gamma^\mu\partial_\mu\psi + M\psi = \varphi V\psi \\ \square\,\varphi + m^2\varphi = \tilde{\psi}F \end{cases}$$

$$\text{où} \begin{cases} V \text{ est une matrice } 4\times 4 \text{ telle que } \tilde{V}\gamma^0 = \gamma^0 V \\ \tilde{\psi} \text{ est le vecteur transposé conjugué de } \psi \\ F = ig_0\gamma^0\gamma^5 + g_1\gamma^0 \qquad g_0, g_1 \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Théorème 1.5.— *Si $(\varphi_0, \varphi_1) \in H^2(\mathbf{R}^3) \times H^1(\mathbf{R}^3)$ et $\psi_0 \in H^1(\mathbf{R}^3; \mathbf{C}^4)$ sont fixés, il existe pour un $T^* > 0$ une unique solution au système (DKG) précédent $(\varphi, \psi) \in H^2(]0, T^*[\times\mathbf{R}^3) \times H^1(]0, T^*[\times\mathbf{R}^3)$, avec les données de Cauchy $\varphi(0,x) = \varphi_0, \partial_t\varphi(0,x) = \varphi_1, \psi(0,x) = \psi_0$*

Remarque : Nous montrerons donc, dans le cas de ce système de Dirac - Klein - Gordon, qu'il peut exister des solutions dont le champ de spineurs ψ n'est pas nécessairement borné. C'est à notre connaissance la première fois que de telles solutions sont considérées.

III - Les lemmes clé :

La preuve des résultats précédents repose sur l'estimation de la norme d'opérateur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n}) \to C^{\infty}(\mathbf{R}^{n+1})$ donnés par :

$$TF(t,x) = \int\int e^{i(x(\xi+\eta)+t(|\xi|\pm|\eta|))}\ m(\xi,\eta)\ \hat{F}(\xi,\eta)\ d\xi\ d\eta$$

Lemme 1.— *T s'étend en un opérateur continu de $L^2(\mathbf{R}^{2n})$ dans $L^2(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n)$ sous l'une des hypothèses suivantes :*

i) $|m(\xi,\eta)| \leq C|\xi|^{-\frac{n-1}{2}+\delta}|\eta|^{-\delta}$ *pour un certain* $\delta > 0$

$$\text{avec} \left| \begin{array}{ll} 0 < \delta \leq \dfrac{n-1}{4} & \text{si } n=3 \\ 0 \leq \delta \leq \dfrac{n-1}{4} & \text{si } n \geq 4 \end{array} \right.$$

ii) $|m(\xi,\eta)| \leq C\langle\xi\rangle^{-2\delta}|\xi|^{-\frac{n-1}{2}+\delta}$ *pour un certain* $\delta > 0$

$$\text{avec} \left| \begin{array}{lll} 0 < \delta & & \text{si } n=3 \\ 0 \leq \delta & & \text{si } n \geq 4 \\ \langle\xi\rangle & = & (1+|\xi|^2)^{1/2} \end{array} \right.$$

Remarque : Cette estimation est invariante par la rotation $\xi \to \eta\ \eta \mapsto -\xi$ dans $\mathbf{R}^{2n}$ et on peut indifféremment remplacer η par ξ dans les hypothèses précédentes.

Remarque : Si $u_j(t,x) = \int e^{i(x.\xi+t|\xi|)}\hat{f}_j(\xi)\frac{d\xi}{|\xi|^{s_j}}$ est une solution de l'équation des ondes, avec $f_j \in L^2$, $s_1 = \frac{n-1}{2} - \delta$, $s_2 = \delta$ on voit que

$$||u_1 u_2||_{L^2(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n)} \leq C||f_1||_{L^2}\ ||f_2||_{L^2}$$

En particulier, si $n = 3$ et $\delta = 1/2$, on obtient exactement l'inégalité de Strichartz [36].

Le cas des formes compatibles dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3$ n'est pas plus difficile.

Considérons le cas homogène : $\square\, u = \square\, v = 0$, $u_{t=0} = v_{t=0} = 0$, $\partial_t u_{|t=0} = f$, $\partial_t u_{|t=0} = g$.

Alors $\hat{u}(t,\xi) =$ sin $\frac{t|\xi|}{|\xi|}\hat{f}(\xi)$, $\hat{v}(t,\xi) =$ sin $\frac{t|\xi|}{|\xi|}\hat{g}(\xi)$ de sorte que pour toute forme compatible, $\widehat{Q}(Du, Dv)$ s'écrit sous la forme d'une somme de termes de type

$$\int e^{it(|\xi-\eta|\pm|\eta|)} q_{\pm}(\xi-\eta,\eta)\hat{f}(\xi-\eta)\hat{g}(\eta)d\eta$$

et de leurs conjugués.

Ainsi si $Q = Q_{a,b}$ $\qquad q(\xi,\eta) = \dfrac{\xi_a\eta_b - \xi_b\eta_a}{|\xi||\eta|}$

Lemme 2.—

$$|Q(Du,Dv)|_{L^2(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^3)} \leq C|f|_{L^2}|g|_{H^1}$$

Preuve : Nous nous contentons d'esquisser la preuve dans le cas $Q_{a,b}$ pour une phase $|\xi-\eta|+|\eta|$; les détails des autres cas ne sont pas plus compliqués et se trouvent dans notre travail [3].

Soit $h \in L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^3)$

$$\int Q(Du,Dv)\bar{h}\ dt\ dx = \int\int\int e^{it(|\xi-\eta|+|\eta|)}\ q(\xi-\eta,\eta)\ \hat{f}(\xi-\eta)\ \hat{g}(\eta)\ \hat{\bar{h}}(t,\xi)\ dt\ d\xi\ d\eta$$

$$= \int\int \hat{\bar{h}}(|\xi-\eta|+|\eta|,\xi)\ q(\xi-\eta,\eta)\ \hat{f}(\xi-\eta)\ \hat{g}(\eta)\ d\xi\ d\eta$$

Par l'inégalité de Cauchy - Schwarz

$$|\int Q(Du,Dv)\bar{h}(t,x)\ dt\ dx| \leq \left(\int\int |\hat{\bar{h}}(|\xi-\eta|+|\eta|,\xi)|^2\ |q(\xi-\eta,\eta)|^2\ \frac{d\xi d\eta}{\langle\eta\rangle^2}\right)^{1/2} ||\hat{f}||_{L^2}||\langle\eta\rangle\hat{g}||_{L^2}$$

$$\leq \left(\int\int |\hat{\bar{h}}(|\xi-\eta|+|\eta|,\xi)|^2\ |q(\xi-\eta,\eta)|^2\ \frac{d\xi d\eta}{\langle\eta\rangle^2}\right)^{1/2} ||f||_{L^2}||g||_{H^1}$$

Estimons alors l'intégrale sur $\hat{\bar{h}}$ pour cela introduisons des coordonnées polaires $\xi = \lambda\omega$, $\quad \eta = \rho\sigma$, $\quad \omega,\sigma \in S^2$, $\lambda,\rho > 0$

$$\int\int |\hat{\bar{h}}(|\xi-\eta|+|\eta|,\xi)|^2\ |q(\xi-\eta,\eta)|^2\ \frac{d\xi d\eta}{\langle\eta\rangle^2}$$

$$\leq \int\int\int\int |\hat{\bar{h}}(|\lambda\omega-\rho\sigma|+\rho,\lambda\omega)|^2\ |q(\omega-\sigma,\sigma)|^2\lambda^2\ d\lambda\ d\varphi\ d\omega\ d\sigma$$

à ω, σ fixés, introduisons le changement de variable $\tilde{\rho} = \rho + |\lambda\omega - \rho\sigma|$ on voit facilement que $\frac{d\tilde{\rho}}{d\rho} = 0 \Leftrightarrow 1 = \frac{\rho - \lambda(\omega.\sigma)}{|\rho\sigma - \lambda\omega|} \Leftrightarrow \omega = \sigma$.

A cause des propriétés d'annulation de $q(\omega - \sigma, \sigma)$, on voit que $(\frac{d\rho}{d\tilde{\rho}})|q(\omega - \sigma, \sigma|^2$ reste uniformément borné, ce qui autorise ce changement de variable ; on se ramène à estimer $\int\int\int\int |\hat{\hat{h}}(\tilde{\rho}, \lambda\omega)|^2 \ \lambda^2 \ d\lambda \ d\tilde{\varphi} \ d\omega \ d\sigma$, ce qui est évidemment controlé par $|\hat{h}|_{L^2}$, c'est-à-dire par $|h|_{L^2}$.

On peut ainsi essayer de combiner les idées des lemmes 1 et 2 précédents.

Lemme 3.— *Soit un opérateur de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^6)$ dans $\mathcal{S}(\mathbf{R}^4)$ donné par la formule*

$$TF(t,x) = \int e^{(t(|\xi| \pm |\eta|) + x(\xi + \eta))} \ m_{\pm}\left(\frac{\xi}{|\xi|}, \frac{\eta}{|\eta|}\right) \ d\xi \ \frac{d\eta}{|\eta|}$$

où $m_{\pm}(\omega, \sigma)$ est une fonction $C^{\delta}(S^2 \times S^2)$ pour un $\delta > 0$, et telle que $m_{\pm}$ s'annule pour $\omega = \pm\sigma$. Alors T s'étend en un opérateur continu de $L^2(\mathbf{R}^6)$ dans $L^2(\mathbf{R}^4)$.

Enfin signalons que de telles méthodes permettent de prouver très simplement les inégalités suivantes

Lemme 4.— *Si $u_j, j = 1 \cdots 4$ sont des solutions de l'équation des ondes homogène, avec des données de Cauchy $u_j(0,x) = 0, \ \partial u_j(0,x) = f_j(x)$. Si les fonctions f_i sont toutes dans $L^2(\mathbf{R}^3)$ et si Q désigne une des formes compatibles, on a :*

$$|\int_{\mathbf{R}^4} u_1 \ u_2 Q(Du_3, Du_4) \ dx \ dt| < C \prod_{j=1}^{4} ||f_j||_{L^2}$$

IV - Généralisation d'une inégalité de Strichartz.

Considérons une solution de l'équation des ondes $\square\, u = 0$ dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, avec les données de Cauchy $u_{t=0} = 0$, $\partial_t u_{|t=0} = f$ de sorte que

$$u(t,x) = \frac{1}{2i}\left(\int e^{i(x.\xi+t|\xi|)}\,\hat{f}(\xi)\,\frac{d\xi}{|\xi|} - \int e^{i(x.\xi-t|\xi|)}\,\hat{f}(\xi)\,\frac{d\xi}{|\xi|}\right)$$

Etudier la continuité L^p de $u(t,x)$ revient à étudier la continuité L^p des opérateurs $\int e^{i(x.\xi\pm t|\xi|)}\,\hat{f}(\xi)\,\frac{d\xi}{\langle\xi\rangle}$.

A $t = 1$ fixé, une telle étude a été faite par Peral, Beals, et généralisée par Seeger - Sogge - Stein [2, 24, 27, 29].

Proposition 1.— *L'opérateur $f \to \int e^{i(x.\xi\pm|\xi|)}\hat{f}(\xi)\,\frac{d\xi}{\langle\xi\rangle^m}$ est continu de $L^p(\mathbf{R}^n) \to L^p(\mathbf{R}^n)$ si et seulement si $m \leq -(n-1)|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}|$.*

L'inégalité de Strichartz considère des normes L^p en espace et temps.

Proposition 2.— *L'opérateur $f \to \int e^{i(x.\xi\pm t|\xi|)}\hat{f}(\xi)\,\frac{d\xi}{\langle\xi\rangle^m}$ est continu de $L^2(\mathbf{R}^n)$ dans $L^p(\mathbf{R}^{n+1})$ si $m \leq -(n-1)|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}|+\frac{1}{p}$; $2\frac{n+1}{n-1} \leq p < \infty$.*

Remarque : on voit que les conditions sur m font apparaître un gain de régularité entre proposition 1 et proposition 2.

Considérons maintenant un opérateur intégral de Fourier général défini par une distribution lagrangienne $K(t,x,y) \in I^{m-\frac{1}{4}}((\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n)\times\mathbf{R}^n\ ;\ C')$ où C est une relation canonique de $T^*\mathbf{R}^n - 0$ dans $T^*(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n) - 0$ (notations Hörmander vol. 4).

Typiquement, de tels opérateurs apparaissent lors de la résolution du problème de Cauchy pour des opérateurs strictement hyperboliques en t $(\partial_t^2 - P(t,x,D_x))u = 0$ où $P(t,x,D)$ est un opérateur fortement elliptique d'ordre 2.

La continuité L^p d'opérateurs intégraux de Fourier décrits localement par des intégrales oscillantes $\int e^{i(x.\eta-\varphi(y,\eta))}d\eta, (x,y,\eta) \in \mathbf{R}^{3n}$ a été décrite par Beals et Seeger - Sogge - Stein et on retrouve des résultats analogues à la proposition 1 en supposant que $\varphi(x,y,\eta)$ est une amplitude appartenant à une classe de symboles $S^m_{1,0}$ et que la phase $\varphi(y,\eta)$ satisfait les hypothèses de non dégénérescence usuelles. Cela fournit donc une borne à $t > 0$ fixé.

On peut alors s'intéresser à un analogue de l'inégalité de Strichartz.

Les opérateurs intégraux de Fourier qui interviennent alors sont associés à des relations canoniques $\mathcal{C}$ de $T^*(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n)\times T^*(\mathbf{R}^n)$ et on suppose

H1) le rang de la projection de $\mathcal{C}$ sur $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ est $n+1$

H2) le rang de la projection de $\mathcal{C}$ sur $T^*\mathbf{R}^n$ est $2n$

H3) si $(t_0,x_0)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$, la projection de $\mathcal{C}$ sur $T^*_{(t_0,x_0)}\mathbf{R}^n$ est une hypersurface conique régulière de dimension n, notée $\Gamma_{(t_0,x_0)}$.

Ces conditions de rang sont celles qui permettent d'écrire localement les opérateurs qui nous intéressent à partir de distributions lagrangiennes du type

$$\int e^{i(\varphi(t,x,\eta)-y.\eta)}a(t,x,y,\eta)d\eta \text{ avec } a\in S^m(\mathbf{R}^{n+1}\times T^*\mathbf{R}^n)$$

et où φ est une phase réelle homogène de degré 1 en η.

En tout point (t,x) nous avons défini un cône d'onde $\Gamma_{(t,x)}$, hypersurface conique régulière de $T^*_{(t,x)}\mathbf{R}^n$. Par comparaison avec le cas de l'équation des ondes pour lequel $\Gamma_{(t,x)}=\{(\tau,\xi)/\tau^2-|\xi|^2=0\}$, on impose une condition de courbure.

H4) en tout point $(t,x)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$, en toute direction (τ,ξ) du cône d'onde local $\Gamma_{t,x}$, $(n-1)$ courbures de $\Gamma_{(t,x)}$ en (τ,ξ) sont non nulles.

Remarque : comme $\Gamma_{t,x}$ est un ensemble conique de dimension n, on impose ici d'avoir un nombre maximal de courbures non nulles.

De telles hypothèses sont évidemment vérifiées dans le cas d'une équation strictement hyperbolique d'ordre 2 du type équation des ondes :

$$\partial_t^2-P(t,x,D_x)\qquad \text{où}\qquad |P(t,x,\xi)|>c|\xi|^2$$

Théorème.— *[4]. Sous les hypothèses précédentes, si* $K(t,x,y)\in I^{m-\frac{1}{4}}(\mathbf{R}^{n+1}\times\mathbf{R}^n\ ;\ \mathcal{C})$ *si* $2\frac{n+1}{n-1}\le p<\infty$, *si* $m\le-(n-1)|\frac{1}{2}-\frac{1}{p}|+\frac{1}{p}$ *alors l'opérateur intégral de Fourier* $f\mapsto\int K(t,x,y)f(y)dy$ *est continu de* $L^2_{\mathrm{comp}}(\mathbf{R}^n)$ *dans* $L^p_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n)$.

Les détails de la preuve paraîtront prochainement. Indiquons simplement que le lemme clé est dû à Stein [34] (th. 10 p. 349) et est le suivant.

Considérons un opérateur d'intégrale oscillante

$$T_\lambda f(x) = \int_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{i\lambda\phi(x,\theta)}\psi(x,\theta)\ f(\theta)d\theta$$

qui envoie les fonctions définies sur $\mathbf{R}^{n-1}$ sur des fonctions définies sur $\mathbf{R}^n$.

On suppose que ψ est C_0^∞ et que la phase réelle ϕ vérifie, en tout point (x^0, θ^0), les hypothèses $H_1)$ $H_2)$ suivantes.

$H_1)$ pour (x^0, θ^0) fixé, la forme bilinéaire $B(y, \sigma)$ définie sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{n-1}$ par $B(u, v) = (\sigma.\nabla_\theta)(y.\nabla_x)\phi(x^0, \theta^0)$ est de rang $n-1$.

$H_2)$ Soit alors $\bar{y}$ l'unique élément de $\mathbf{R}^n$ à homothétie près tel que $\theta \mapsto (\bar{y}, \nabla_x\phi(x,\theta))$ possède un point critique en (x^0, θ^0) : on suppose que ce point critique est non dégénéré, i.e. det $(\nabla_\theta^2(\bar{y}, \nabla_x\phi(x,\theta))) \neq 0$.

Proposition 3.—

$$||T_\lambda f||_{L^q} \leq C\lambda^{-\frac{n}{q}}\ ||f||_{L^p} \qquad \text{où} \begin{cases} q = \dfrac{n-1}{n+1}p' \\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1 \end{cases}$$

i) $n = 2 \qquad 1 \leq p < 4$

ii) $n \geq 3 \qquad 1 \leq p \leq 2.$

Remarque : On peut aussi traiter, grâce aux travaux de Greenleaf, le cas où seules les courbures sont non nulles en tout point C de tout cône d'onde local $\Gamma_{(t,x)}$ avec $1 \leq k \leq n-1$. De même on peut aussi considérer des amplitudes $a(t, x, y, \eta)$ dans des classes exotiques : $S^m_{\rho,1-\rho} \qquad 0 \leq \rho \leq \frac{1}{2}$.

V - Problèmes.

L'existence de solutions non bornées aux systèmes étudiés ci-dessus soulève quelques questions que nous voudrions évoquer pour conclure :

1) Il est naturel de demander si la propagation des singularités pour les systèmes semi-linéaires ci-dessus dans l'intervalle de $2 \leq s \leq 2,5$, est régie par l'optique géométrique comme c'est le cas pour des solutions bornées $s > 2,5$?

2) L'interaction de deux singularités conormales manifeste-t-elle la structure non linéaire de ces systèmes ?

3) Dans le cas de l'interaction de trois ondes, la structure de non linéarité compatible permet-elle de préciser les résultats de Bony, Chemin, Melrose et Ritter [6, 7, 8, 11, 12, 25, 26] ? Nait-il effectivement une singularité plus faible portée par le cône d'onde ?

4) D'autres systèmes à coefficients constants de la physique présentent des non linéarités quadratiques : c'est le cas en particulier du système de Maxwell - Dirac et du système de Yang - Mills. Dans ces deux cas l'invariance de jauge permet-elle de faire apparaître la non linéarité sous une forme compatible ?

5) Les travaux de Chemin sur le calcul paradifférentiel bilinéaire [12] permettent de formuler aisément une généralisation des formes compatibles pour des équations hyperboliques d'ordre 2 à coefficients variables. Peut-on alors démontrer un analogue de notre lemme 2 ?

Références

[1] A. Bachelot - *Problème de Cauchy global pour les systèmes de Dirac - Klein - Gordon.* Ann. IHP Phys. Theor. **48** (1988) 383-428.

[2] M. Beals - *L^p boundedness of Fourier integral operators.* Memoirs AMS **264** (1982).

[3] M. Beals, M. Bezard - *Low regularity local solutions for field equations.* preprint.

[4] M. Bezard - *Une généralisation d'une inégalité de Strichartz.* Note CRAS à paraître.

[5] J. Björken, S. Drell - *Relatvistic quantum mechanics.* Mc Graw Hill.

[6] J.M. Bony - *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires.* Ann. Sci. ENS **14** (1981) 209-246.

[7] J.M. Bony - *Interaction des singularités.* séminaire Goulaouic - Schwartz 1981-1982.

[8] J.M. Bony - *Interaction des singularités pour des équations de Klein - Gordon non linéaires.* séminaire Goulaouic - Meyer - Schwartz 1983-1984.

[9] P. Brenner - *On $L^p - L^{p'}$ estimates for the wave equation.* Math. Z **145** (1975) 251-254.

[10] P. Brenner, W. Von Wahl - *Global classical solutions of non linear wave equations.* Math. Z **176** (1981) 87-121.

[11] J.Y. Chemin - *Interaction de 3 ondes dans les équations semi-linéaires strictement hyperboliques.* CPDE **12** (1987) 1203-1225.

[12] J.Y. Chemin - *Calcul symbolique bilinéaire et interaction contrôlée dans les équations aux dérivées partielles non linéaires strictement hyperboliques.* Bull. SMF **116** (1988) 341-383.

[13] J. Ginibre, G. Velo - *The Cauchy problem for coupled Yang - Mills and scalar fields in Lorentz gauge.* Ann. IHP Phys. Theor. **36** (1982) 59-78.

[14] C. Greiner - *Relativistic quantum mechanics.* Springer.

[15] B. Hanouzet, J.L. Joly - *Applications bilinéaires compatibles avec un système hyperbolique.* C.R. Acad. Sci. Paris **301** (1985) 491-494.

[16] L. Hörmander - *The analysis of linear partial differential operators.* Springer 4 Vol.

[17] L. Hörmander - *Nonlinear hyperbolic differential equations.* Course in lund (1988).

[18] T. Hughes, T. Kato, J. Marsden - *Well posed quasi linear second order hyperbolic systems with applications to nonlinear elastodynamics and general relativity.* Archive Rat. Mech. Anal. **63** (1977) 273-294.

[19] L. Kapitanski - *The Cauchy problem for a semi-linear wave equation.* preprint.

[20] C. Kenig, A. Ruiz, C. Sogge - *Uniform Sobolev inequalities and unique continuation for second order constant coefficient differential operators.* Duke Math. J. Vol. **55** (1987) 329-347.

[21] S. Klainerman - *The null condition and global existence for non linear waves.* AMS Lect. Appl. Math. **23** (1986) 293-325.

[22] S. Klainerman, M. Machedon - *Space-time estimates for null forms and the local existence theorem.* Preprint (1991).

[23] H. Lindblad - *Blow-up for solutions of* $\Box u = |u|^p$ *with small initial data.* CPDE **15** (1990) 757-821.

[24] B. Marshall, W. Strauss, S. Wainger - $L^p - L^q$ *estimates for the Klein - Gordon equation.* JMPA **59** (1980) 417-440.

[25] R. Melrose, Ritter - *Interaction of progressing waves for semi-linear wave equation* I Ann. Math. **121** (1985) 149-236.

[26] R. Melrose, Ritter - *Interaction of progressing waves for semi-linear wave equation* II Arkiv. for Math. **25** (1987) 91-114.

[27] J. Peral - L^p *estimates for the wave equation.* JFA **36** (1980) 114-145.

[28] G. Ponce, T. Sideris - *Local regularity of non linear wave equations in three space dimensions.* to appear CPDE.

[29] A. Seeger, C. Sogge, E. Stein - *Regularity properties of Fourier integral operators.* Ann. Math. Vol. **134** (1991) 231-251.

[30] I. Segal - *Nonlinear semi-groups.* Ann. Math. **78** (1963) 339-364.

[31] J. Shatah, M. Struwe - *Regularity results for nonlinear wave equations.* Preprint.

[32] C. Sogge - *Propagation of singularities and maximal functions in the plane.* Inv. Math. **104** (1991) 349-376.

[33] C. Sogge, E. Stein - *Averages over hypersurfaces smoothness of generalized Radon transforms.* J. Anal. Math. Vol **54** (1990) 165-188.

[34] E. Stein - *Beijing lectures in harmonic analysis.* Princeton Univ. Press.

[35] W. Strauss - *Nonlinear wave equations.* CBMS conference AMS **73**.

[36] H. Strichartz - *Restrictions of Fourier transforms to quadratic surfaces and decay of solutions of wave.* Duke Math. J. Vol. **44** (1977) 705-714.

[37] Y. Zheng - *Regularity of weak solutions to a two dimensional modified Dirac - Klein - Gordon system of equations.* Preprint MSRI (1991).