Journées Équations aux dérivées partielles

Daniel Gourdin

Classes d'opérateurs faiblement hyperboliques non linéaires

Journées Équations aux dérivées partielles (1988), p. 1-16
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1988____A5_0>

CLASSES D'OPERATEURS FAIBLEMENT HYPERBOLIQUES NON LINEAIRES.

par
Daniel GOURDIN

I - INTRODUCTION.

Dès que l'on se place dans les classes de Gevrey d'indice élevé, dans les espaces de Sobolev ou dans C^∞, il est bien connu que le problème de Cauchy non caractéristique même local, pour les équations et systèmes linéaires hyperboliques non stricts, n'est pas bien posé sans hypothèse supplémentaire sur l'indice maximum de la classe de Gevrey ou sur le type d'hyperbolicité faible de l'opérateur.

C'est ce qui apparaît aussi en non linéaire dans les travaux suivants.

1) J. Leray et Y. Ohya ont résolu en 1967 le problème de Cauchy sur des bandes, pour des équations et des systèmes diagonaux quasi-linéaires faiblement hyperboliques, dont la partie principale est un produit de facteurs strictement hyperboliques dans des espaces de Gevrey d'indice majoré en fonction de l'ordre de multiplicité des facteurs ([11]).

Les équations et systèmes étudiés se retrouvent dans des problèmes de Géométrie différentielle et de Physique des fluides relativistes.

2) Dans l'article "Ondes asymptotiques et approchées pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires" ([1]), Madame Y. Choquet-Bruhat, en 1969, a construit des développements asymptotiques de la forme $u \sim \sum_{p=0}^{+\infty} \omega^{-p} u_p(x,\omega_\varphi)$ au voisinage d'une solution $u_0(x)$ de ce système

en utilisant une phase ψ attachée au linéarisé en u_0 , sous une hypothèse de divisibilité du polynôme sous caractéristique par le facteur double pour le linéarisé en u_0. Elle généralise ainsi au non linéaire des résultats et techniques dus à J. Leray ([16]) et à J. Vaillant ([13], [18]) pour les systèmes linéaires et elle donne des applications à la magnétohydrodynamique relativiste.

3) Dans l'article intitulé "Effectively hyperbolic equations", N. Iwasaki ([9]) a obtenu en 1985 des résultats de résolubilité locale C^∞ en prolongeant aux opérateurs non linéaires la notion d'hyperbolicité effective introduite par Madame Olenik en 1970 pour les opérateurs linéaires d'ordre 2, Ivrii-Petkov en 1974 et L. Hörmander en 1977 pour les opérateurs linéaires faiblement hyperbolique d'odre quelconque à caractéristiques de multiplicité variable au plus deux ; N. Iwasaki applique ses résultats aux équations d'Euler, aux équations hyperboliques de Monge-Ampère et à certaines équations des ondes non linéaires.

Dans ce travail ([5], [6], [17]), nous décrivons d'autres classes d'opérateurs non linéaires faiblement hyperboliques dont les linéaires sont à caractéristiques de multiplicité constante et pour lesquels les problèmes de Cauchy C^∞ local est bien posé. Nous utilisons pour cela la théorie de Nash-Moser et la méthode de N. Iwasaki.

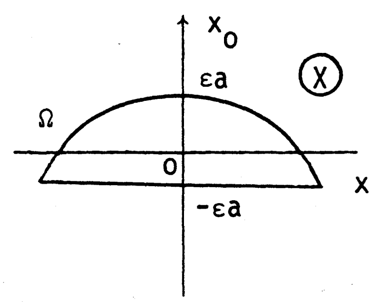
Dans un autre travail, nous aborderons le cas des systèmes et nous donnerons des applications ([15]).

II - HYPOTHESES ET RESULTATS.

$X = (x_0, x) \in \Omega = \Omega(a,\varepsilon)$ ouvert de $\mathbb{R}^{r+1}$, contenant 0, d'équation

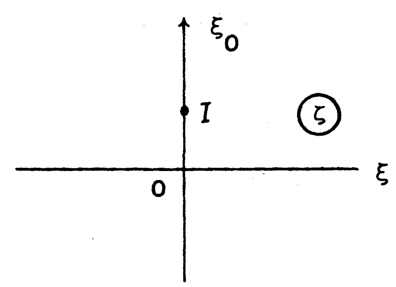
$$\Omega(a,\varepsilon) = \{X \in \mathbb{R}^{r+1} \ ; \ - a\varepsilon < x_0 < \varepsilon(a - |x|^2)\}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$, $x = (x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, et $\varepsilon > 0$, $a > 0$ donnés.



$\zeta = (\xi_0, \xi)$ est la variable duale de X, où $\xi_0 \in R$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_r) \in \mathbb{R}^r$.

$I = (1,0) = (1,0,\ldots,0)$.



On considère l'opérateur aux dérivées partielles Φ non linéaire d'ordre m

$$(1) \qquad \Phi \ : \ C^\infty_R(\Omega) \to C^\infty_R(\Omega)$$

défini par $\Phi(y)(X) = p(X, \nabla^m y(X))$, $\forall\, y \in C^\infty_R(\Omega)$, $\forall\, X \in \Omega$

où

$$(2)\quad \begin{cases} \nabla^m y = \{\dfrac{\partial^\alpha y}{\partial X^\alpha} = \partial^\alpha y \ ; \ |\alpha| \leq m\}, \quad y \in C_R^\infty(\Omega) \\ p \in C_R^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^N) \text{ fonction des variables } X \text{ et } Y = \{y_\alpha\}_{|\alpha|\leq m} \\ N = \mathrm{Card}\{\alpha \in \mathbb{N}^{r+1} \ ; \ |\alpha| \leq m\}. \end{cases}$$

On suppose ϕ faiblement (resp. strictement) hyperbolique dans relativement à ξ_0 (<==> à I) et à un ouvert U de $\mathbb{R}^N$ contenant 0, c'est-à-dire

$$(3)\qquad q_m(X,Y,\ ) = \sum_{|\alpha|=m} \frac{\partial p}{\partial y_\alpha}(X,Y)\zeta^\alpha$$

admet m racines (zéros) réelles en ξ_0, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^r$, $\forall\, X \in \Omega$, $\forall\, Y \in U$ éventuellement égales en certains points $\xi = 0, X, Y$ (resp. distinctes 2 à 2, $\forall\, \xi \neq 0, \forall\, X, \forall\, Y$).

Nous allons considérer deux classes particulières de tels opérateurs Φ non linéaires et faiblement hyperboliques.

1) Définition de la classe $H_{m,2}(\Omega)$.

C'est la classe des opérateurs Φ vérifiant (1) (2) pour lesquels $\exists\, U$ ouvert $\ni 0$ dans $\mathbb{R}^N$ tel que (3) soit réalisé ainsi que

(H1) $\mathrm{Supp}\, p(X,0) \subset \Omega^+ = \Omega \cap ([0,+\infty[\times \mathbb{R}^r)$

(H2) $\inf\limits_{X\in\Omega} |q_m(X,0,I)| > 0$

(H3) $q_m(X,Y,\zeta) = [H_0(X,Y,\zeta)]^2 \prod\limits_{s=1}^{\sigma} H_s(X,Y,\zeta)$

$H_s(X,Y,\zeta) = H_s'(X,Y).H_s''(X,Y^s,\zeta)$

où $H_s' \in C_R^\infty(\Omega \times U)$

H_s'' est C^∞ en X et $Y^s = \{y_\alpha\}_{|\alpha|\leq\rho_s}$ et polynomial de $d^o\rho_s$ en ζ.

(H4) $R(X,Y,\zeta) = \prod_{s=0}^{\sigma} H_s(X,Y,\zeta)$ est strictement hyperbolique dans Ω

relativement à ξ_0 et à U.

(H5) $H_s''(X,Y,\zeta) = H_s''(X,\zeta)$ $(\forall\, s)$ sinon $m = 2$.

(H6) $q'_{m-1} = \sum_{|\alpha|=m-1} \frac{\partial p}{\partial y_\alpha}(X,Y)\zeta^\alpha$

$$- \frac{1}{2}\sum_{\lambda=0}^{r}\left[\frac{\partial^2 p}{\partial x_\lambda \partial y_\alpha}(X,Y) + \sum_{|\beta|\leq m-1}\frac{\partial^2 p}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}(X,Y)y_{\beta+1_\lambda}\right]\alpha_\lambda\, \zeta^{\alpha-1_\lambda}$$

vérifie : il existe $K[X,Y,\zeta]$, C^∞ en X et Y, polynomial en ζ tel que $q'_{m-1} = H_0(X,Y,\zeta)K(X,Y,\zeta)$ où $1_\lambda = (0,\dots,1,\dots,0)$ (1 à la $\lambda^{\text{ème}}$ colonne).

2) Définition de la classe $C_{m,d}(\Omega)$.

Ce sont les opérateurs de la forme :

(C_1) $\Phi(y)(X) = p(X,\nabla^m y(X)) =$

$$= g(X,(h)^{d_1}(h_2)^{d_2}\dots(h_\mu)^{d_\mu}y(X),$$

$$e_1(h_1)^{d_1-1}(h_2)^{d_2-2}\dots(h_\mu)^{d_\mu-1}y(X)\ ,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$e_j(h_1)^{(d_1-j)_+}(h_2)^{(d_2-j)_+}\dots(h_\mu)^{(d_\mu-j)_+}y(X),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$e_{d-1}(h_1)^{(d_1-d+1)_+}(h_2)^{(d_2-d+1)_+}\dots(h_\mu)^{(d_\mu-d+1)_+}y(X),\{\partial^\alpha y(X)\}_{|\alpha|\leq m-d})$$

où

(C_2) $d = \sup\{d_k \ ; \ 1 \leqslant k \leqslant \mu\}$; $(d_k-j)_+ = \sup(d_k-j,0)$.

(C_3) les h_j (resp. e_j) sont des opérateurs aux dérivées partielles linéaires, à coefficients $C_R^\infty(\Omega)$, d'ordre ρ_j (resp. $\theta_j = m-j-\sum_{k=1}^{\mu} \rho_k(d_k-j)_+$) et $x_0 = 0$ n'est pas caractéristique pour les h_j.

(C_4) $\sum_{k=1}^{\mu} d_k\rho_k = m$

(C_5) $g(X,v_m,v_{m-1},\dots,v_{m-d+1},\{\omega_\alpha\}_{|\alpha|\leqslant m-d}) \in C_R^\infty(\Omega,\mathbb{R}^{N'})$

$N' = d + \mathrm{card}\{\alpha \in \mathbb{N}^{r+1} ; \ |\alpha| \leqslant m-d\}$

(C_6) $\mathrm{Supp}\ g(X,0,\dots,0,\{0\}) \subset \Omega^+$

(C_7) $\inf_{X\in\Omega} \left| \dfrac{\partial g}{\partial v_m} (X,0,\dots,0,\{0\})\right| > 0$

(C_8) $h_1 \dots h_\mu$ strictement hyperbolique dans Ω relativement à ξ_0.

Définissons :

$C_+^\infty(\Omega) = \{y \in C_R^\infty(\Omega) \ ; \ \mathrm{supp}\ y \subset \Omega^+\}$.

3) <u>On obtient le</u> :

<u>Théorème</u> ([5], [6]).

Soit $\Phi \in H_{m,2}(\Omega) \cup C_{m,d}(\Omega)$. *Alors pour toute* $f \in C_+^\infty(\Omega)$, *il existe* $\Omega_0 = \Omega(a_0,\varepsilon_0)$ *avec* $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega = \Omega(a,\varepsilon)$ *et* $y \in C_+^\infty(\bar{\Omega}_0)$ *unique tel que* $\Phi(y) = p(X,\nabla^m y) = f$ *dans* $\bar{\Omega}_0$.

Exemples :

$$\Omega = \mathbb{R}^2 \ , \quad m = 2, \quad \frac{\partial}{\partial x_0} = \partial_0 \ , \quad \frac{\partial}{\partial x_1} = \partial_x \ , \quad \frac{\partial}{\partial x_0 \partial x_1} = \partial^2_{0,x} \ .$$

(E_1) $\Phi_1(y) = \partial_0^2 y + y^2 \partial_x^2 y - 2y\partial^2_{0,x} y - (\partial_0 y)(\partial_x y) + y(\partial_x y)^2 + b(X,y)$

$\Phi_1 \in H_{2,2}(\mathbb{R}^2)$ si supp $b(X,0) \subset R^+ \times R$.

(E_2) $\Phi_2(y) = \sin(\partial_0^2 y - 2\partial^2_{0,x} y + \partial_x^2 y) + x(\partial_0 y - \partial_x y)^4 + b(X,y)$

$\Phi_2 \in C_{2,2}(\mathbb{R}^2)$ si supp $b(X,0) \subset R^+ \times \mathbb{R}$.

III - ESQUISSE DE LA DEMONSTRATION.

Le théorème classique d'inversion locale "$F : E \to E$ (E de Banach) est inversible au voisinage de e_0 si $F'(e_0)$ est inversible dans $L(E,E)$" n'est plus vrai lorsque E est de Fréchet, cependant

1) Le théorème de Nash-Moser donne un résultat d'inversion locale pour les espaces de Fréchet gradués réguliers ([7], [8], [9], [12], [14]) :

Hypothèse : E est un espace de Fréchet avec une famille croissante de semi-normes $|\ |_n$ et des opérateurs de régularisation (ou de lissage) S_θ : $E \to E$ linéaires vérifiant :

$$\text{(i)} \quad \begin{cases} |(1-S_\theta)(x)|_k \leqslant C\, \theta^{-(n-k)} |x|_n \ , \ C = C_{k,n} \ , \quad \theta \geqslant 1 \\ |S_\theta x|_n \leqslant C\, \theta^{n-k} |x|_k \ , \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \quad x \in E \end{cases}$$

Φ : $U \to E$ opérateur non linéaire dans un voisinage U de e_0 dans E.

(ii) $|\phi(x)|_n \leqslant C(1 + |x|_{n+d_1}) \quad \forall x \in U$

(iii) $\phi'(x)v = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}(\phi(x+tv) - \phi(x))$ dérivée de Gateaux, vérifie

$$|\phi'(x)v|_n \leqslant C(|x|_{n+d_2}|v|_\ell + |v|_{n+d_2}) \text{ , } \forall x \in U, \forall v \in E$$

$d_1 \geqslant 0$ et $d_2 \geqslant 0$ indépendants de n.

(iv) $\phi'(x)$ admet un inverse $L(x)$ vérifiant : $\forall x \in U, y \in E$
$|L(x)y|_n \leqslant C(|x|_{n+d}|y|_d + |y|_{n+d})$.

$d \geqslant 0$ indépendant de n ; les constantes C peuvent dépendre de n mais sont indépendantes de $y \in E$, $v \in E$ et $x \in U$ (on dit que ϕ, ϕ', L sont régulières).

Conclusion : Alors il existe Ψ unique régulière définie dans un voisinage V de $\phi(e_0)$ telle que $\phi(\Psi(y)) = y, \forall y \in V$.

On utilise ce théorème dans $E = C^\infty_+(\bar{\Omega}_0)$ gradué par la chaîne des espaces de Sobolev sur Ω_0 (ou à partir de la chaîne des classes höldériennes sur $\bar{\Omega}_0$ de façon équivalente). Les opérateurs de lissage S_θ ont été construits par Nash-Moser.

Par la formule de Taylor et l'hypothèse $\operatorname{supp} p(X,0) \subset \Omega^+$, on a :

(4) $$\phi : C_+(\bar{\Omega}_0) \longrightarrow C^\infty_+(\bar{\Omega}_0)$$

et les inégalités (ii) et (iii) sont usuelles pour les opérateurs aux dérivées partielles non linéaires sous la forme :

(5) $|\phi(y)|_s \leqslant C_s(1 + |y|_{s+m})$

(6) $|\phi'(u)y|_s \leqslant C_s(|y|_{s+m} + |u|_{s+m}|y|_m)$.

Montrons l'inégalité (iv).

2) Eléments de la preuve du théorème.

Soit $N_s = \mathrm{Card}\{\alpha \in \mathbb{N}^{r+1},\ |\alpha| \leqslant m+s\}$; montrons la

Proposition 1 ([5], [6]).

Soit $\Phi \in H_{m,r}(\Omega)$ (resp. $C_{m,d}(\Omega)$). *Il existe* $\Omega_0 = \Omega(a_0,\varepsilon_0)$, $\bar{\Omega}_0 \subset \Omega(a,\varepsilon) = \Omega$ *et* U_0 *voisinage borné de* 0 *dans* $\mathbb{R}^N$, $\bar{U}_0 \subset U$ *tel que le problème de Cauchy (à données nulles)*

(7) $$\Phi'(u)y = f$$

soit bien posé dans $C_+^\infty(\bar{\Omega}_0)$,

$$\forall\, u \in V_0 = \{z \in C_+^\infty(\bar{\Omega}_0)\ ;\{\partial^\alpha z(X)\}_{|\alpha|\leqslant m} \in U_0,\ X \in \bar{\Omega}_0\ .$$

De plus pour tout $s_0 \in \mathbb{N}$, *tout* $U_{s_0+\ell}$ *voisinage borné de* 0 *dans* $\mathbb{R}^{N_{s_0+\ell}}$ *avec* $\mathrm{proj}|_{\mathbb{R}^N} U_{s_0+\ell} = U_0$, *et* $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}$, $\exists$ *une constante* $C_{s_0+2\alpha} > 0$ *indépendante de* $y \in C_+^\infty(\bar{\Omega}_0)$ *et de*

$$u \in V_{s_0+\ell} = \{z \in C_+^\infty(\bar{\Omega}_0)\ ;\ \{\partial^\alpha z(X)\}_{|\alpha|\leqslant m+s_0+\ell} \in U_0\ ,\ X \in \bar{\Omega}_0\}$$

vérifiant :

(8) $||y||_{s_0+2\alpha+m-\ell} \leqslant C_{s_0+2\alpha}(||\phi'(u)y||_{s_0+2\alpha} + |a(u)|_{s_0+2\alpha}\cdot||\phi'(u)y||_{s_0})$

où $a(u)$ *désigne les coefficients de* $\Phi'(u)$, $|a(u)|_s$ *est la norme höldérienne d'ordre* s *de* $a(u)$ *sur* $\bar{\Omega}_0$, $||z||_s$ *est la norme de Sobolev de* $W^{s,2}(\Omega_0)$ *et* $\ell = 2$ (resp. d).

<u>Preuve</u> : Elle est très longue ; donnons en quelques aperçus

(9) $$\Phi'(u)y = \sum_{|\alpha|\leq m} \frac{\partial p}{\partial u_\alpha}(X,\nabla^m u)\partial^\alpha y .$$

Si $\Phi \in \mathcal{H}_{m,2}(\Omega)$, alors l'hypothèse (H6) signifie que le polynôme sous caractéristique de $\phi'(u)$ est divisible par le facteur double $H_0(X,Y,\zeta)$ du polynôme caractéristique de $\Phi'(u)$: $q_m(X,Y,\zeta) = H_0^2 \prod_{s=1}^{\sigma} H_s(X,Y,\zeta)$.

Si $\Phi \in \mathcal{C}_{m,d}(\Omega)$, on a :

(10) $\Phi'(X,\nabla^m u) =$

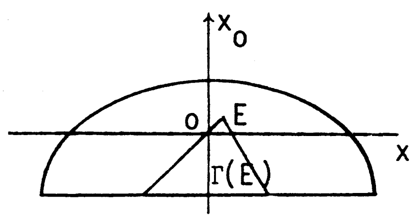
$$= \sum_{k=0}^{d-1} \frac{\partial g}{v_{m-k}}(X,\ldots,e_j(h_1)^{(d_1-j)_+}\ldots(h_\mu)^{(d_\mu-j)_+}u,\ldots\{\partial^\alpha u\}_{|\alpha|\leq m-d})e_k(h_1)^{(d_1-k)_+}\ldots$$

$$(h_\mu)^{(d_\mu-k)_+} + \sum_{|\alpha|\leq m-d} \frac{\partial g}{\partial\omega_\alpha}(X,\ldots,\{\partial^\beta u\}_{|\beta|\leq m-d})\partial^\alpha$$

qui a pour polynôme caractéristique :

$$q_m = \frac{\partial g}{\partial v_m}(X,\ldots,e_j(h_1)^{(d_1-j)_+}\ldots(h_\mu)^{(d_\mu-j)_+}u,\ldots,\{\partial^\alpha\ \}_{|\alpha|\leq m-d})(H_1)^{d_1}\ldots(H_\mu)^{\alpha_\mu}.$$

Donc $\Phi(u)$ est faiblement hyperbolique, à caractéristiques de multiplicités constantes et bien décomposables au sens de De Paris ([2]). On sait ([3], [4]), par conséquent, que le problème de Cauchy est bien posé pour $\Phi'(u)$ dans les Sobolev sur des bandes $[U,V] \times \mathbb{R}^r$ de $\mathbb{R}^{r+1}$. Pour ε_0 assez petit, les portions de $\frac{1}{2}$ cône de dépendance de la solution par rapport aux données et au second membre, $\Gamma(E)$ où $E = (e_0,e)$ se trouvent dans $\Omega(a_0,\varepsilon_0)$ lorsque $E \in \Omega(a_0,\varepsilon_0) = \Omega_0$



Par conséquent, dans de tels domaines Ω_0 , on a des problèmes de Cauchy bien posés dans $C_+^\infty(\bar{\Omega}_0)$ pour $\Phi'(u)$ et on obtient des inégalités d'énergie du type

(11) $$||z||_{s+m-\ell} \leq C_s||\Phi'(u)z||_s \quad , \quad \forall z \in C_+^\infty(\bar{\Omega}_0)$$

où $C_s > 0$ est indépendant de z et de u pourvu que $u \in V_s = \{y \in C_+^\infty(\bar{\Omega}_0) \; ; \; \{\partial^\alpha y\}_{|\alpha| \leq m+s} \in U_s \, , \, X \in \bar{\Omega}_0\}$ où U_s est un voisinage borné de 0 dans $\mathbb{R}^{N_s}$ avec $\ell = 2$ (resp. d) (cette indépendance se démontre au prix de nombreux lemmes en tenant compte du fait que u intervient à l'ordre m dans ϕ'. Il s'agit d'améliorer cette inégalité pour démontrer (8) en vue de (iv). On utilise pour cela la proposition suivante :

Proposition 2 ([5], [6]).

Pour $\forall \Phi \in H_{m,2}(\Omega)$ (resp. $C_{m,d}(\Omega)$), *on a :*

(12) $$\langle D_X\rangle^{2\alpha}\Phi'(X,\nabla^m u)y = \bar{\omega}(X,\nabla^{m+\ell}u)\langle D_X\rangle^{2\alpha} y + L(u)y$$

où $\ell = 2$ (resp. d), $\langle D_X\rangle^{2\alpha}$ *est l'opérateur de symbole* $(1 + |\xi|^2)^\alpha$, $\bar{\omega}(X,\nabla^{m+\ell}u)$ *est un opérateur composé d'un opérateur aux dérivées partielles linéaires en* X *à coefficients dépendant de* X *et des dérivées* $\nabla^{m+\ell}u$ *de* u *avec* $\langle D_X\rangle^{-2\alpha}$, *faiblement hyperbolique, de même symbole principal que* Φ' *et vérifiant les mêmes hypothèses que* Φ' (*c'est-à-dire bien décomposable*), $L(u)y$ *est une relation bilinéaire des dérivées des coefficients* (*notés* $a(X,\nabla^m u)$) *de* $\phi'(X,\nabla^m u)$ *et des dérivées de* y [*l'ordre de dérivation de* a *est* 2α, *celui de* y *est* $2\alpha+m-3$ (resp. $2\alpha+m-d-1$), *l'ordre total est* $2\alpha+m$].

Preuve :

Si $\Phi \in H_{m,2}(\Omega)$, on peut écrire en posant $q = \sigma(\Phi')$

$$<D_X>^{2\alpha} \phi' = \tilde{\omega} <D_X>^{-2\alpha} \text{ avec}$$

$$\tilde{\omega} = <D_s>^{2\alpha} \phi' <D_X>^{-2\alpha}$$

$$\sigma(\tilde{\omega}) = \sum_{\beta=0}^{2\alpha} \frac{1}{\beta!} (D_X^\beta q) \frac{\partial_\xi^\beta (1+|\xi|^2)^\alpha}{(1+|\xi|^2)^\alpha} .$$

La proposition 2 est démontrée en prenant :

$\bar{\omega}$ l'opérateur de symbole $\sigma(\bar{\omega}) = \sum_{|\beta|=0}^{2} \frac{1}{\beta!} (D_X^\beta q) \frac{\partial_\xi^\beta (1+|\xi|^2)^\alpha}{(1+|\xi|^2)^\alpha}$ et

$L(u)$ l'opérateur de symbole $\sigma(L) = \sum_{|\beta|=3}^{2\alpha} \frac{1}{\beta!} (D_X^\beta q)\, \partial_\xi^\beta (1+|\xi|^2)^\alpha$.

Si $\Phi \in C_{m,d}(\Omega)$, en écrivant Φ' bien décomposable de manière simplifiée,

$$\Phi' = \sum_{j=0}^{m} \ell_j(X,\nabla^m u, D_X)(h_1)^{(d_1-j)_+} \dots (h_\mu)^{(d_\mu-j)_+} ,$$

$$<D_X>^{2\alpha} \Phi' = \sum_{j=0}^{m} <D_X>^{2\alpha} \ell_j <D_X>^{-2\alpha} (<D_X>^{2\alpha} h_1 <D_X>^{-2\alpha})^{(d_1-j)_+} \dots (<D_X>^{2\alpha} h_\mu <D_X>^{-2\alpha})^{(d_\mu-j)_+} <D_X>^{2\alpha}$$

on a :

$$<D_X>^{2\alpha} \ell_j <D_X>^{-2\alpha} = g_j + k_j \text{ où, en posant } \Lambda_j = \sigma(\ell_j),$$

$$\sigma(g_j) = \sum_{|\beta|=0}^{d} \frac{1}{\beta!} (D_X \Lambda_j) \frac{\partial_\xi^\beta (1+|\xi|^2)^\alpha}{(1+|\xi|^2)^\alpha}$$

$$\sigma(k_j) = \sum_{|\beta|=d+1}^{2\alpha} \frac{1}{\beta!} (D_X \Lambda_j) \frac{\partial_\xi^\beta (1+|\xi|^2)^\alpha}{(1+|\xi|^2)^\alpha} .$$

La proposition 2 est démontrée avec :

$$\bar{\omega} = \sum_{j=0}^{m} g_j(<D_x>^{+2\alpha}h_1<D_x>^{-2\alpha})^{(d_1-j)_+} \dots (<D_x>^{+2\alpha}h_\mu<D_x>^{-2\alpha})^{(d_\mu-j)_+}$$

et

$$L = \sum_{j=0}^{m} k_j(<D_x>^{2\alpha}h_1<D_x>^{-2\alpha})^{(d_1-j)_+} \dots (<D_x>^{2\alpha}h_\mu<D_x>^{-2\alpha})^{(d_\mu-j)_+}<D_x>^{2\alpha}.$$

Montrons alors la proposition 1 ; d'après la proposition 2 en remplaçant dans (11) Φ' par $\bar{\omega}(X,\nabla^{m+2}u)$ (cas $\ell = 2$), on a :

$$(13) \qquad ||<D_x>^{2\alpha}y||_{s_0+m-2} < C'_{s_0}(||<D_x>^{2\alpha}\Phi'y||_{s_0} + ||Ly||_{s_0})$$

où $C'_{s_0} > 0$ est indépendant de u, si $u \in V_{s_0+2}$ (ici $\bar{\omega} = \bar{\omega}(X,\nabla^{m+2}u)$ alors que $\Phi' = \Phi'(X,\nabla^m u)$). Et en dérivant (7) par rapport à x_0, 2α fois, on obtient à l'aide de (13) :

$$(14) \qquad ||y||_{s_0+2\alpha+m-2} < C'_{s_0}(||\phi'y||_{s_0+2\alpha} + ||Ly||_{s_0})$$

où C'_{s_0} est indépendant de $u \in V_{s_0+2}$ (indépendant de 2α). A l'aide d'inégalités de convexité propres aux normes höldériennes ([8]) et de nombreux lemmes techniques, on obtient :

$$||Ly||_{s_0} \leq C'_{s_0+2\alpha}|a(u)|_{s_0+2\alpha}||\phi'(u)y||_{s_0}$$

où $C'_{s_0+2\alpha}$ est indépendant de $u \in V'_{s_0+2}$.

On a une démonstration analogue pour $\ell = d$; d'où la proposition 1. En utilisant le lemme de Sobolev, on obtient alors l'inégalité

(iv) permettant d'utiliser les conclusions du théorème de Nash-Moser. Un raisonnement analogue à celui de N. Iwasaki ([9]) achève la preuve du théorème.

Remarque : on a $C_{m,2}(\Omega) \underset{\neq}{\subset} H_{m,2}(\Omega)$ car en multiplicité 2, la disibilité du sous-caractéristique par H_0 équivaut à la bonne décomposition de De Paris. En particulier pour l'exemple (E_1), on a :

$$\Phi_1'(X,\nabla^2 y)z = (\partial_0 - y\partial_x)(\partial_0 - y\partial_x)z - (\partial_x y)(\partial_0 - y\partial_x)z$$
$$+ \left[2y(\partial_x^2 y) - 2(\partial_{0,x}^2 y) + (\partial_x y)^2 + \frac{\partial b}{0y}(X,y)\right]z .$$

donc bien décomposable.

Remarquons aussi que $\phi_1 \in H_{2,2}(\mathbb{R}^2)$ mais $\phi_1 \notin C_{2,2}(\mathbb{R}^2)$.

B I B L I O G R A P H I E

[1] Y. CHOQUET-BRUHAT - Ondes asymptotiques et approchées pour des systèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires.
JMPA t. 48 (1969), p. 117-158.

[2] J. Cl. DE PARIS - Problème de Cauchy oscillatoire pour un opérateur différentiel à caractéristiques multiples, lien avec l'hyperbolicité.
JMPA t. 51 (1972), p. 231-256.

[3] D. GOURDIN - Système faiblement hyperboliques à caractéristiques multiples.
Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Série A, t. 278 (1974), p. 269-272.

[4] D. GOURDIN - Les opérateurs faiblement hyperboliques matriciels à caractéristiques de multiplicités constantes, bien décomposables et le problème de Cauchy associé.
J. Maths Kyoto Univ. (JMKYAZ), 17-3 (1977), p. 539-566.

[5] D. GOURDIN - Opérateurs faiblement hyperboliques non linéaires.
Note aux Comptes Rendus Acad. Sc. Paris t. 306, Série I, p. 659-662 (1988).

[6] D. GOURDIN - Une classe d'opérateurs faiblement hyperboliques non linéaires.
A paraître.

[7] R.S. HAMILTON - Nash-Moser Inverse function theorem.
Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 7, n° 1, 1982, p. 65-222.

[8] L. HORMANDER - The boundary problem of physical geodesy,
Arch. Rat. Mech. Anal. (1976), 1-50.

[9] N. IWASAKI - Effectively hyperbolic equations.
J. Maths of Kyoto Univ. 25-4 (1985), p. 727-743.

[10] J. LERAY - Hyperbolic differential equations.
Cours de Princeton (1952).

.../...

[11] J. LERAY et Y. OHYA - Equations et systèmes non linéaires hyperboliques non stricts.
Math. Ann. 170 (1967), p. 167-205.

[12] S. LOJASIEWICZ J.R. et E. ZEHMDER - An inverse function theorem in Fréchet spaces.
Journal of Functional Analysis 33, 165-174 (1979).

[13] J. VAILLANT - Données de Cauchy portées pour une caractéristiques doubles, dans le cas d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles, rôle des bicaractéristiques.
JMPA 47 (1968), p. 1-40.

[14] L. HORMANDER - Implicit function theorems.
Lectures at Stanford University. Summer Quarter 1977.

[15] D. GOURDIN - Systèmes de la magnétohydrodynamique relativistes.
En préparation.

[16] L. GARDING, T. KOTAKE, J. LERAY - Uniformisation et développement asymptotique de la solution du problème de Cauchy linéaire, à données holomorphes ; analogie avec la théorie des ondes asymptotiques et approchées. (Problème de Cauchy, I bis et VI).
Bull. Soc. Math. France 92, 1964, p. 263-361.

[17] D. GOURDIN - Problèmes de Cauchy non linéaires.
Actes du Congrès "Half-year programm on Evolution Equations, Pisa - 3 - Hyperbolic equations (9 marzo - 4 aprile 1987)".
CNDR-ONAFA, Universita di Pisa, Scuola Normale Superiore di Pisa.

[18] J. VAILLANT - Caractéristiques multiples et bicaractéristiques des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants.
Ann. Institut Fourier, tome XV, Fasc. 2, 1965, p. 225-311.

UNIVERSITE DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE FLANDRES ARTOIS
U.F.R. DE MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES
59655 - VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX (France)

UNITÉ ASSOCIÉE AU C.N.R.S. n° 761