JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

MOHAMMED TAZI HEMIDA

Régularité L^p maximale pour une classe d'opérateurs à caractéristiques multiples

Journées Équations aux dérivées partielles (1988), p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1988____A16_0>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

REGULARITE L^p MAXIMALE POUR UNE CLASSE D'OPERATEURS A CARACTERISTIQUES MULTIPLES

Mohammed Tazi Hemida

Université de Rennes 1

Departement de Mathematiques

Campus de Beaulieu

35042 Rennes Cedex France

Introduction

On étudie la régularité L^p maximale pour certains opérateurs différentiels dans $\mathbb{R}^n$,qui s'expriment de manière polynomiale par rapport à certains champs de vecteurs . Ces opérateurs sont un cas particulier de ceux dont l'hypoellipticité, et la régularité dans les espaces construits à partir de L^2, ont été étudiées par Boutet de Monvel - Grigis - Helffer [3] .

Plus précisément,on considère un système U_1, ..., U_p de champs de vecteurs réels ,C^∞,dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$,dont les symboles seront notés $u_j(x,\xi)$ $(1 \leq j \leq p)$ .On désigne par V la variété caractéristique:

$$V = \{ (x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \ , \ u_j(x, \xi) = 0 \ , j = 1 \ , ... \ , p \}$$

et l'on fait l'hypothèse suivante:

(H_1) Les différentielles $du_j(x,\xi)$ ($1 \leq j \leq p$) sont linéairement indépendantes en tout point de V.

On considère un opérateur différentiel dans Ω de la forme suivante:

$$(0.1) \qquad P(x,D) = \sum_{|\alpha|+2|\beta| \leq m} a_{\alpha\beta}(x) D_x^\beta U^\alpha$$

où,pour toute suite $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ d'entiers compris entre 1 et p ,on pose :

$$U^\alpha = U_{\alpha_1} o\, U_{\alpha_2} o \ldots o\, U_{\alpha_m} \qquad et \qquad |\alpha| = m$$

La notation D_x^β est classique ,et les $a_{\alpha\beta}$ sont des fonctions C^∞ dans Ω ,à valeurs complexes.

On fait sur l'opérateur $P(x, D)$ les mêmes hypothèses que dans [3]. Autrement dit , nous supposons ,en notant $p_m(x, \xi)$ le symbole principal de cet opérateur:

($H\,2$) Pour tout compact K dans Ω , il existe un réel positif C_K tel que :

$$|p_m(x,\xi)| \geq C_K \left(\sum_{j=1}^{p} |u_j(x,\xi)| \right)^m$$

pour tout (x, ξ) dans $K \times \mathbb{R}^n$.

D' autre part ,nous faisons la même hypothèse d'injectivité qui, dans [3] , assure l'hypoellipticité avec perte de $m/2$ dérivées.Pour ne pas rappeler cette condition, nous écrirons seulement:

($H\,3$) Pour toute distribution f dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, pour tout s réel,et pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$,on a l'implication suivante:

$$Pf \in H^s_{loc}(\omega) \qquad \Rightarrow \qquad f \in H^{s+m/2}_{loc}(\omega)$$

Le résultat principal est le suivant:

<u>Théorème 0.1</u>Sous les hypothèses (H 1), (H 2) *et* (H 3) ,pour tout réel$p$ tel que $1 < p < +\infty$ et pour tout compact $K' \subset \Omega$, il existe une

constante $C_{K'}$ positive telle que :

$$\sum_{|\alpha|+2|\beta|\leq m} \| D_x^\beta U^\alpha(x, D_x) f \|_{L^p} \leq C_{K'} (\| Pf \|_{L^p} + \| f \|_{L^p})$$

pour tout f dans $C_0^\infty(K')$.

L'idée de la preuve consiste à montrer que la paramétrixe à gauche de l'opérateur $P(x, D)$, construite sous les hypothèses ci-dessus dans [3] ,a en fait son symbole dans la classe S_ρ^{-m} introduite dans Nagel-Stein [6]. Le théorème 0.1 découle alors des résultats de continuité L^p démontrés pour cette classe d'opérateurs dans [6] .Il serait probablement possible aussi d'utiliser les classes d'opérateurs introduites par Beals-Greiner [1].

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEALS - GREINER Pseudodifferential operators associated to hyperplan bundles *Rendiconti del Seminario Matematico* , *Univesità e Politecnico di Torino* , (1982) , 7 – 41 .

[2] BOUTET DE MONVEL Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudodifferential operators .
CPAM 27 , (1974) , 585 – 639 .

[3] BOUTET DE MONVEL- GRIGIS - HELFFER Parametrixes d ' opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques multiples .
Asterisque 34–35 , (1976) , 93 – 121 .

[4] DEBBAJ Régularité holdérienne maximale de certains problèmes aux limites elliptiques singuliers .
Comm In Partial Differential Equations , 11 (8) , (1986) , 795 – 850 .

[5] HORMANDER Fourier integral operators I
Acta Mathematica 127 , (1971) , 79 – 183 .

[6] NAGEL - STEIN Lectures on pseudodifferential operators : regularity theorems and applications to non elliptic problems .

Princeton Univercity Press (1979) , 1 – 156 .

[7] METIVIER Cours DEA Rennes (1981) .

[8] ROTHSCHILD - STEIN Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. *Acta . Mat* , 137 , (1977), 248–315 .