

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ABDEREMANE MOHAMED

JEAN NOURRIGAT

**Borne inférieure du spectre de l'opérateur de Schrödinger**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1988), p. 1-4

<[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1988\\_\\_\\_\\_A15\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1988____A15_0)>

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

BORNE INFERIEURE DU SPECTRE DE L'OPERATEUR  
DE SCHRODINGER

A. Mohamed et J.Nourrigat

Le point de départ de ce travail est un théorème de Fefferman-Phong [1] sur l'équation de Schrödinger avec champ électrique polynomial. Nous généralisons ce résultat en introduisant aussi un champ magnétique , puis en considérant des potentiels qui ont seulement un "comportement polynomial".

1.Opérateurs à coefficients polynomiaux.

L'un des résultats de [1] compare la borne inférieure  $\lambda_o(V)$  du spectre de l'opérateur  $P = - \Delta + V(x)$  , où  $V$  est un polynôme  $\geq 0$  , à une quantité  $\lambda_1(V)$  explicitement associée à  $V$  de la manière suivante , en notant  $Q(x , h)$  la boule de centre  $x$  et de rayon  $h$  dans  $\mathbb{R}^n$  .

$$(1) \quad \lambda_1(V) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \inf_{x > 0} \left( \frac{1}{h^n} \int_{Q(x, h)} V(y) dy + \frac{1}{h^2} \right)$$

Plus précisément , on pose :

$$(2) \quad \lambda_o(V) = \inf_{\substack{\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ \psi \neq 0}} \frac{(P\psi, \psi)}{\|\psi\|^2}$$

Le résultat suivant est démontré dans [1] :

**Théorème 1** Pour tout entier  $r$  ,il existe  $C > 1$ , tel qu'on ait , pour tout polynôme  $V \geq 0$  , de degré  $\leq r$  :

$$(3) \quad C^{-1} \leq \frac{\lambda_1(V)}{\lambda_o(V)} \leq C$$

Tout d'abord , nous allons associer au potentiel  $V$  une autre quantité , qui

sera aussi équivalente à  $\lambda_1(V)$ . On pose :

$$(4) \quad M(x) = \sum_{|\alpha| \leq r} |\partial_x^\alpha V(x)|^{\frac{1}{|\alpha|+2}}$$

En utilisant des équivalences de normes sur l'espace des polynômes de degré  $\leq r$ , on montre facilement la proposition suivante :

**Proposition 2** Pour tout entier  $r$ , il existe  $C > 0$  tel que, pour tout polynôme  $V \geq 0$  de degré  $\leq r$ , on ait, avec les notations ci-dessus :

$$(5) \quad C^{-1} \leq \frac{\lambda_1(V)}{\inf_{x \in \mathbb{R}^n} M(x)^2} \leq C$$

On peut alors préciser le Théorème 1 .

**Proposition 3.**(cf. [3]) Pour tout entier  $r$ , il existe  $C > 0$  tel que, pour tout polynôme  $V \geq 0$  de degré  $\leq r$ , on ait, avec les notations ci-dessus :

$$(6) \quad \|M(x) f\|^2 \leq (Pf, f) \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Si l'on introduit un champ magnétique  $B$ , l'opérateur devient :

$$(7) \quad P = \sum_{j=1}^n (D_{x_j} - A_j(x))^2 + V(x)$$

où le champ  $B = (B_{jk})$  est lié au potentiel  $A$  par :

$$(8) \quad B_{jk}(x) = \frac{\partial A_j}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_j}$$

On pose maintenant, si les  $A_j$  et  $V$  sont des polynômes de degré  $\leq r$  :

$$(9) \quad M(x) = \sum_{|\alpha| \leq r} \left( |\partial^\alpha B(x)|^{\frac{1}{|\alpha|+2}} + |\partial^\alpha V(x)|^{\frac{1}{|\alpha|+2}} \right)$$

On a l'analogue de la Proposition 3 :

**Proposition 4.** (cf. [3]) Pour tout entier  $r$ , il existe  $C > 0$  tel que, pour tout polynômes  $V \geq 0$  et  $A_1, \dots, A_n$ , de degré  $\leq r$ , on ait, avec les notations ci-dessus :

$$(10) \quad \|M(x) f\|^2 \leq (Pf, f) \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

La borne inférieure de  $M(x)^2$  est donc un équivalent de la borne inférieure du spectre de  $P$ , définie comme en (2) .

En utilisant des équivalences de normes sur l'espace des polynômes de degré  $\leq r$ , on peut interpréter la formule (10), comme la formule (1), en

considérant les moyennes du symbole de l'opérateur  $P$  dans les images de la boule unité de  $\mathbb{R}^{2n}$  par certaines applications symplectiques .

On peut rapprocher les inégalités (6) et (10) d' un résultat antérieur de [2] , où l'on considère un système  $X_1, \dots, X_p$  d'opérateurs dans  $\mathbb{R}^n$  , chacun d'eux étant de la forme suivante :

$$(11) \quad X = A_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + A_2(x_1) \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + A_n(x_1, \dots, x_{n-1}) \frac{\partial}{\partial x_n} + i B(x)$$

où les  $A_j$  et  $B$  sont des polynômes réels , ne dépendant que des variables indiquées . On suppose aussi qu'il existe un entier  $r$  tel que les commutateurs itérés de longueur  $\geq r$  des opérateurs  $X_1, \dots, X_p$  sont nuls . Les systèmes de cette forme servent de modèles microlocaux pour les systèmes pseudodifférentiels sous-elliptiques (cf.[4] ).

On associe à ce système une fonction poids  $M(x)$  de la manière suivante :

$$(12) \quad M(x) = \inf_{\xi \in \mathbb{R}^n} \sum_{|I| \leq r} |X_I(x, \xi)|^{1/|I|}$$

où l'on note  $X_I$  les commutateurs itérés de  $X_1, \dots, X_p$  , et  $|I|$  la longueur du crochet correspondant . L'analogie des inégalités (6) et (10) s'énonce ainsi :

**Proposition 5.** (cf. [2] ) Pour tout entier  $r$  , il existe  $C > 0$  tel que , sous les hypothèses ci-dessus , on ait :

$$(13) \quad \|M(x) f\|^2 \leq C \left( \sum_{j=1}^p \|X_j f\|^2 \right) \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Notons que la constante  $C$  ne dépend que de l'entier  $r$  , et non des opérateurs  $X_1, \dots, X_p$  .

Les inégalités (6) , (10) et (13) donnent des critères simples pour les propriétés d'injection compacte . Dans le cas de la Proposition 4 , posons :

$$D = \{ f \in L^2 , P f \in L^2 \}$$

**Corollaire 6** Sous les hypothèses de la Proposition 4 , l'injection de l'espace  $D$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  est compacte si , et seulement si la fonction  $M(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $|x| \rightarrow +\infty$  .

La condition du Corollaire 6 est nécessaire , car , si elle n'est pas vérifiée , on peut faire une rotation d'axes telle que  $B(x)$  et  $V(x)$  deviennent indépendants de l'une des coordonnées et l'injection de  $D$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  ne peut évidemment pas être compacte dans ce cas .

## 2 . Potentiels à comportement polynomial .

On suppose seulement ,(avec les notations de la Proposition 4) , que  $V(x)$  et  $B(x)$  sont dans  $C^{r+1}(\mathbb{R}^n)$  .Le comportement polynomial va s'exprimer de la manière suivante . En posant :

$$(14) \quad m^*(x) = 1 + \sum_{|\alpha| \leq r} |\partial^\alpha V(x)| + \sum_{|\alpha| \leq r-1} |\partial^\alpha B(x)|$$

on suppose qu'il existe  $C > 0$  tel que :

$$(15) \quad \sum_{|\alpha|=r+1} |\partial^\alpha V(x)| + \sum_{r \leq |\alpha| \leq r+1} |\partial^\alpha B(x)| \leq C m^*(x)$$

On définit maintenant la fonction poids  $M(x)$  de la manière suivante :

$$(16) \quad M(x) = 1 + \sum_{|\alpha| \leq r} |\partial^\alpha V(x)|^{\frac{1}{|\alpha|+2}} + \sum_{|\alpha| \leq r-1} |\partial^\alpha B(x)|^{\frac{1}{|\alpha|+2}}$$

**Théorème 7** (cf. [3] ) Soient  $V \geq 0$  et  $A_1, \dots, A_n$  des fonctions vérifiant les hypothèses ci-dessus . Alors , il existe  $C > 0$  tel que :

$$(17) \quad \|M(x)f\|^2 \leq C ( (Pf, f) + \|f\|^2 ) \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

De plus , l'injection du domaine  $D$  dans  $L^2(\mathbb{R}^n)$  est compacte si , et seulement si la fonction  $M(x)$  tend vers  $+\infty$  quand  $|x| \rightarrow \infty$  .

On trouvera dans [3] un encadrement de la fonction  $N(\lambda)$  associée à l'opérateur  $P$  quand la condition ci-dessus est satisfaite .

[1] C.L.Fefferman The uncertainty principle . Bull. A.M.S. 9 (2) (1983) p. 129-206.

[2] J. Nourrigat Inégalités  $L^2$  et représentations de groupes nilpotents .  
J.Funct. Analysis 74 (2) (1987) p. 300-327 .

[3] A.Mohamed , J.Nourrigat Encadrement du  $N(\lambda)$  pour un opérateur de Schrödinger avec des champs électrique et magnétique . Préprint.

[4] J.Nourrigat Systèmes sous-elliptiques . Préprint.