

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PIERRE CARTIER

ANDRÉ VOROS

## **Nouvelle interprétation de la formule des traces de Selberg**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1988), p. 1-8

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1988\\_\\_\\_\\_A13\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1988____A13_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

JOURNEES "EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES"  
ST JEAN DE MONTS, 30/05 AU 3/06 1988.

NOUVELLE INTERPRETATION DE LA FORMULE DES TRACES DE SELBERG

par

P. CARTIER\*

*Centre de Mathématiques, Ecole Polytechnique,  
91128 Palaiseau Cedex*

et

A. VOROS\*

*Service de Physique Théorique de Saclay,  
Laboratoire de l'Institut de Recherche Fondamentale  
du Commissariat à l'Energie Atomique  
91191 Gif-sur-Yvette Cedex, FRANCE*

\* Chercheurs CNRS

Saclay PhT-88/126

N.B. Ceci est la présentation par un des auteurs (A.V.) d'un travail mené en collaboration [1].

### 1. Notations.

Soit  $\Sigma$  une surface *compacte* de genre  $g$  munie d'une métrique à *courbure constante*  $K$ , la formule de Gauss-Bonnet impliquant :  
 $-K \times \text{Aire}(\Sigma) = 4\pi(g - 1)$ . Dans la suite,  $\Sigma$  sera soit la *sphère*  $S^2$  (avec  $K = +1$ ,  $g = 0$ ), soit *une surface hyperbolique*  $X$  (avec  $K = -1$ ,  $g \geq 2$ ). Si  $-\Delta_\Sigma$  est le laplacien positif sur  $\Sigma$ , on lui associe un opérateur "presque positif" :

$$P_\Sigma = (-\Delta_\Sigma + K/4)^{1/2}, \quad (1)$$

où la racine carrée est prise *positive* sur chaque sous-espace propre où  $P_\Sigma^2$  est positif. Dans le cas hyperbolique, on note  $\{\lambda_n\}$  le spectre de  $(-\Delta_X)$  et  $\{\rho_n = (\lambda_n + K/4)^{1/2}\}$  le spectre de  $P_X$  ; les premières valeurs  $\lambda_n + K/4$  sont négatives (ainsi,  $\lambda_0 = 0$ ) et pour ces cas, nous conviendrons *par exemple* que  $\text{Arg } \rho_n = -\pi/2$ .

On note  $\mathcal{P}$  l'ensemble des *géodésiques périodiques*, orientées et primitives de la surface hyperbolique  $X$ , et  $\tau(p)$  la *longueur* de  $p \in \mathcal{P}$ . Le *spectre des longueurs* de toutes les géodésiques périodiques, primitives ou répétées est  $\{m\tau(p) \mid p \in \mathcal{P}, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ . Ce spectre est mis en *dualité* avec le spectre de valeurs propres de  $P_X$  par la *formule des traces de Selberg* [2],

$$\text{Tr } h(P_X) = \sum_{n=0}^{\infty} h(\rho_n) = (g-1) \int_{-\infty}^{+\infty} h(\rho) \rho \tanh \pi \rho \, d\rho + \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{m=1}^{\infty} R_{p,m} \hat{h}(m\tau(p)), \quad (2)$$

où  $\hat{h}(\tau) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\rho) e^{-i\tau\rho} d\rho$ , et  $R_{p,m}$  est le "poids hyperbolique"

$$R_{p,m} = \tau(p) / 2 \sinh(m\tau(p)/2) \quad (3)$$

Dans (2), la fonction test  $h(\rho)$  doit être définie et *analytique* dans une bande  $|\text{Im } \rho| < \frac{1}{2} + \varepsilon$  pour que la série sur les géodésiques converge, décroissante pour  $|\rho| \rightarrow \infty$  comme  $o(|\rho|^{-2-\delta})$  pour que les deux autres termes convergent, et de surcroît  $h(\rho)$  doit être *paire*.

Ces restrictions classiques sur la fonction  $h(\rho)$  peuvent être

largement affaiblies, comme nous allons le voir, en approfondissant l'analogie avec la *formule sommatoire de Poisson*,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n) = 2\pi \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \hat{h}(2\pi m) \quad (4)$$

## 2. La formule des déterminants [3]

La formule sommatoire de Poisson peut se comprendre à partir des deux formules classiques pour  $\sinh \pi\kappa$ ,

$$\sinh \pi\kappa = \pi\kappa \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \kappa^2/n^2) \quad (5')$$

$$\sinh \pi\kappa = \frac{1}{2} e^{\pi\kappa} (1 - e^{-2\pi\kappa}) \quad (5'')$$

Supposant un peu d'analyticité pour  $h(\rho)$ , on évalue de deux manières l'intégrale prise sur le contour de la Fig.1,

$$(2\pi i)^{-1} \int_C h(-i\kappa) d \log \sinh \pi\kappa$$

Si l'on utilise (5') et la formule des résidus, on obtient immédiatement le *membre de gauche* de (4) ; en revanche, si l'on utilise (5'') dans le demi-plan  $\text{Re } \kappa > 0$  et la formule symétrique dans  $\text{Re } \kappa < 0$ , on trouve le *membre de droite* de (4) . Cette preuve est "microanalytique" au sens où elle revient à décomposer la distribution réelle  $\sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\rho - n)$  en la différence des valeurs au bord de la fonction analytique  $-1/2 \tanh(i\pi\rho)$  pour  $\text{Im } \rho \rightarrow \pm 0$ .

L'analogie des formules (5) dans le cas de Selberg s'obtiendrait en utilisant  $h(\rho) = -\log(\rho^2 + \kappa^2)$  dans (2) ( $\kappa$  joue le rôle d'un paramètre), mais la formule ainsi écrite *diverge* car  $h(\rho) \neq o(|\rho|^{-2-\delta})$ . Toutefois, elle

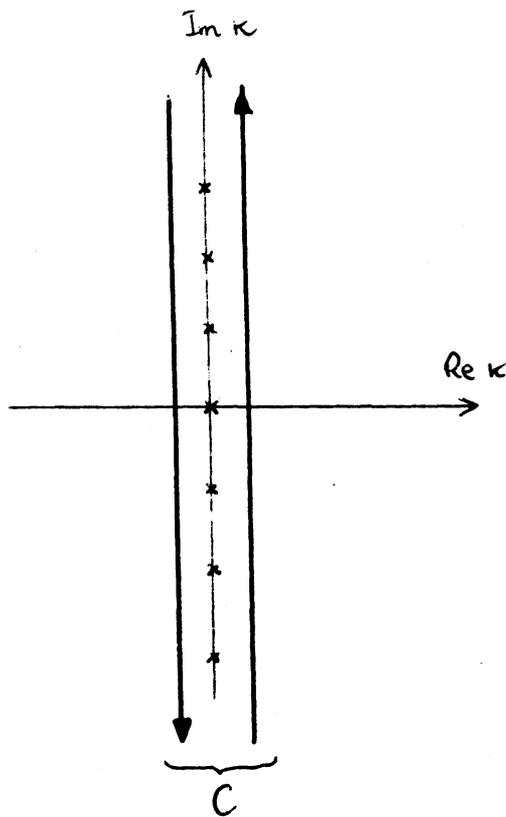


Fig. 1

devient convergente si on lui applique à deux reprises l'opérateur  $d/d(\kappa^2)$ : elle se transforme ainsi dans la formule des traces classique pour  $h(\rho) = (\rho^2 + \kappa^2)^{-2}$ , qui exprime la fonction  $\text{Tr}(P_X^2 + \kappa^2)^{-2}$ .

Si l'on introduit la *fonction zêta généralisée*,

$$\zeta_\Sigma(s, a) = \text{Tr}(-\Delta_\Sigma + a)^{-s} = \text{Tr}(P_\Sigma^2 - K/4 + a)^{-s} \quad (\text{Re } s > 1, a \notin \mathbb{R}^-), \quad (6)$$

on voit alors qu'on peut *retirer* ces deux dérivations en  $\kappa^2$  grâce à l'équation fonctionnelle :

$$\zeta_\Sigma(s, a) = s \int_a^{+\infty} \zeta_\Sigma(s+1, a') da' \quad (7)$$

En particulier, appliquant deux fois (7) à  $\sum_{n=0}^{\infty} (\rho_n^2 + \kappa^2)^{-2} = \zeta_X(2, \kappa^2 - 1/4)$ , on trouve  $\frac{\partial}{\partial s} \zeta_X(s, \kappa^2 - 1/4)_{s=0}$ , mais ceci est par *définition*  $-\log \det(P_X^2 + \kappa^2)$ , où  $\det$  désigne le *déterminant fonctionnel* d'un opérateur (ou déterminant zêta-régularisé) [4].

Tous calculs faits, la formule des traces régularisée puis exponentiée se réduit à :

$$\det(P_X^2 + \kappa^2) = \left[ e^{\kappa^2} \det(P_{S^2} + \kappa) \right]^{-(2g-2)} \mathfrak{z}\left(\frac{1}{2} + \kappa\right), \quad (8')$$

où

$$\mathfrak{z}\left(\frac{1}{2} + \kappa\right) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \prod_{k=0}^{\infty} \left( 1 - e^{-\tau(p)\left(\frac{1}{2} + \kappa + k\right)} \right) \quad (\text{Re } \kappa > 1/2) \quad (8'')$$

est la *fonction zêta de Selberg* [2].

Les formules (8'-8'') sont analogues à (5'-5''). L'apparition de l'opérateur  $P$  sur la sphère  $S^2$  dans (8') sera expliquée plus loin.

### 3. Une extension de la formule des traces [1]

Si l'on suppose que la fonction test  $h(\rho)$  est bien paire et analytique dans  $|\text{Im } \rho| < \frac{1}{2} + \varepsilon$ , on peut retrouver à partir de (8) la formule des traces classique (2), en évaluant de deux manières l'intégrale prise sur le contour  $C$  de la fig.2,

$$(4i\pi)^{-1} \int_C h(-i\kappa) d \log \det(P_X^2 + \kappa^2),$$

par analogie avec la preuve précédente de la formule sommatoire de Poisson.

Mais le même raisonnement peut s'étendre à des fonctions  $h(\rho)$  ayant des propriétés d'analyticité différentes, simplement en changeant le contour d'intégration! Le cas le plus intéressant est celui où la fonction  $h(\rho)$ , non paire, est analytique dans un secteur  $|\text{Arg } \rho| < \frac{\pi}{2} + \theta_0$ , et où l'on intègre sur le contour  $C'$  de la Fig.2.

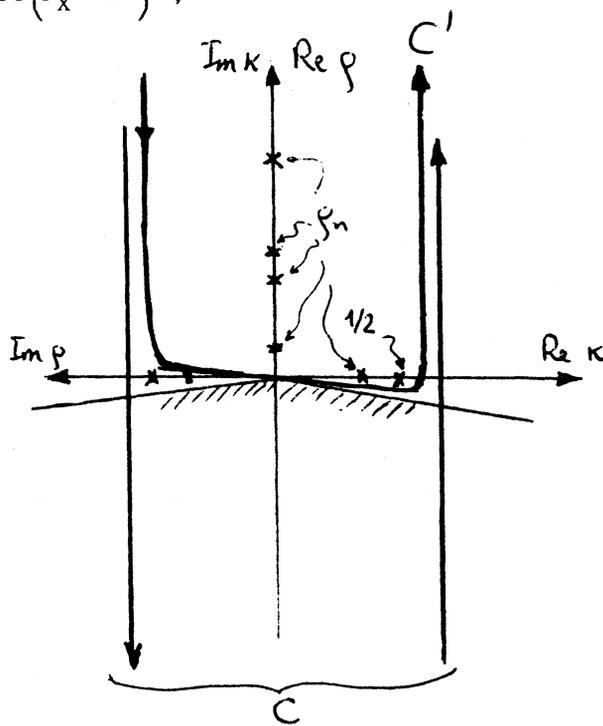


Fig. 2.

Sous des hypothèses de décroissance très peu restrictives (permettant les déformations de contour), on obtient ainsi une formule des traces nouvelle:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h(\rho_n) = (2g - 2) \int_0^{\infty} h(\rho) \tanh \pi \rho d\rho + \int_0^{\infty} h_-(\kappa) d \log Z_X \left( \frac{1}{2} + \kappa - i0 \right) \quad (9)$$

où l'on a posé

$$h_-(\kappa) = (2\pi i)^{-1} [h(-i\kappa) - h(+i\kappa)] \quad (|\text{Arg } \kappa| < \theta_0) \quad (10)$$

(Le décalage  $\kappa \rightarrow \kappa - i0$  dans (9) correspond à la convention :  $\text{Arg } \rho_n = -\pi/2$  si  $\rho_n^2 < 0$ ).

#### 4. Interprétation nouvelle de la formule des traces.

La formule des traces étendue (9) s'applique à la fonction  $h(\rho) = e^{-t\rho}$ . On obtient ainsi une formule pour  $\mathcal{O}_X(t) = \text{Tr } e^{-tP_X}$  ( $\text{Re } t > 0$ ) :

$$\Theta_X(t) = (2g - 2) \left[ t^{-2} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m (t + 2\pi m)^{-2} \right] + \pi^{-1} \int_0^{\infty} \sin t\kappa \, d \log Z_X \left( \frac{1}{2} + \kappa - i0 \right) \quad (11)$$

L'intégrale fournit une fonction *impaire et méromorphe* de  $t$ , ayant ses pôles tous *simples* aux points  $t = \pm im \tau(p)$ , le résidu correspondant étant  $(2\pi)^{-1} R_{p,m}$  (tout ceci découle de (8)). La *formule de Poisson sur une variété* prédit effectivement ces singularités, qu'elle situe aux longueurs des géodésiques périodiques sur la dite variété [5].

La formule (11) établit ainsi pour  $\Theta_X(t)$  un *prolongement méromorphe*, mais avec encore d'autres pôles, qui sont *doubles* et situés sur *l'axe réel négatif*, aux points  $-2\pi m (m \in \mathbb{N})$ . Nous interprétons ces pôles comme les contributions des *géodésiques périodiques complexes*, dont les longueurs sont  $2\pi im (m \in \mathbb{Z})$ , et qui apparaissent sous le changement  $t \rightarrow it$ , impliquant  $K \rightarrow -K$ . En effet, dans la direction de temps imaginaire, la géométrie de  $X$  devient la géométrie de la sphère  $S^2$ , dont les géodésiques périodiques sont bien connues. La sphère admet en outre une formule sommatoire de Poisson exacte,

$$\Theta_{S^2}(t) = \text{Tr } e^{-t P_{S^2}} = 2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m (t - 2\pi im)^{-2}, \quad (12)$$

à laquelle le terme sommatoire de (11) présente une forte ressemblance, qui est rendue évidente par *l'équation fonctionnelle*

$$\Theta_X(t) + \Theta_X(-t) = (2 - 2g) \Theta_{S^2}(it). \quad (13)$$

Ces résultats confirment l'hypothèse de Balian et Bloch [6] que la mécanique quantique peut être formulée de manière exacte par resommation de termes associés aux trajectoires classiques réelles *et complexes*. Ici, le problème quantique est de trouver le spectre du laplacien sur  $X$ , et les trajectoires classiques sont les géodésiques périodiques sur la même surface. Sur les fonctions test  $h(\rho) = e^{-t\rho}$  (indexées par  $t > 0$ ), la formule des traces de Selberg s'est révélée être une formule sommatoire de Poisson indexée par les périodes réelles et complexes du flot géodésique sur  $X^{\mathbb{C}}$ . On peut également décrire ces contributions du flot complexifié comme la manifestation d'un *effet tunnel bidimensionnel* dans le problème. On ne sait par ailleurs *effectivement* expliciter la décomposition de Balian-Bloch que dans les cas à *une dimension*, en s'appuyant sur des

techniques d'équations différentielles *ordinaires* [7].

Notre interprétation de la formule des traces de Selberg constitue donc le premier indice en faveur de la généralisation de [7] aux équations aux *dérivées partielles*.

### 5. La fonction zêta généralisée.

Nous mentionnons brièvement une autre application de la formule (9) aux fonctions zêta généralisées  $\zeta_{\Sigma}(s, a)$  définies par (6). Nous allons voir que du point de vue de leur dépendance par rapport à la variable  $s$ , ces fonctions deviennent particulièrement simples dans le cas de *surfaces à courbure constante* si l'on se place en  $a = K/4$ , alors que le choix plus traditionnel est  $a = 0$  (Minakshisundaram - Pleijel).

En effet, commençant par  $K = +1$ ,  $\zeta_{S^2}(s, a)$  s'exprime en termes de la fonction zêta de Riemann pour (et seulement pour)  $a = +1/4$  :

$$\zeta_{S^2}(s, +1/4) = (2^{2s} - 2) \zeta(2s - 1) \quad (14)$$

Mais il est également vrai dans le cas hyperbolique ( $K = -1$ ) que  $\zeta_X(s, a)$  prend sa forme la plus simple pour  $a = -1/4$  ; toutefois, pour  $a < 0$  ce résultat découle de la formule des traces *étendue* (9), qui donne :

$$\zeta_X(s, -1/4) = (1-g)(\cos \pi s)^{-1} \zeta_{S^2}(s, +1/4) + \pi^{-1} \sin \pi s \int_0^{\infty} \kappa^{-2s} d \log Z_X \left( \frac{1}{2} + \kappa - i0 \right) \quad (15)$$

(comparer à [8] pour le cas  $a \geq 0$ ). Il faut comprendre (15) comme une identité reliant *deux prolongements méromorphes*, celui de  $\zeta_X(s, -1/4)$  à partir de  $\operatorname{Re} s > 1$ , et celui de l'intégrale de Mellin à partir de  $\operatorname{Re} s < 1/2$  ! L'analogue de (15) pour la sphère  $S^2$  consiste à écrire la formule sommatoire de Poisson pour  $\zeta_{S^2}(s, +1/4)$ , ce qui redonne l'équation fonctionnelle de Riemann pour  $\zeta(s)$ .

## REFERENCES

- [1] P. CARTIER, A. VOROS, CRAS Série I (Sous presse) et article en préparation.
- [2] A SELBERG, *J. Ind. Math. Soc.* 20 (1956) 47-87  
D.A. HEJHAL, The Selberg Trace Formula for PSL (2,  $\mathbb{R}$ ), Vol.1, *Springer Lecture Notes Math.* 548 (1976).
- [3] A. VOROS, *Comm. Math. Phys.* 110 (1987) 439-465 (equivalent formulae in: J. FISCHER, "Approach to Selberg Trace Formula...", Springer Lecture Notes Math. 1253 (1987) ; P. SARNAK, *Comm. Math. Phys.* 110 (1987) 113-120 ; A. VOROS, *Phys. Lett. B* 180 (1986) 245-246).
- [4] D. RAY, I.M. SINGER, *Ann. Math.* 98 (1973) 154-177
- [5] J. CHAZARAIN, *Invent. Math.* 24 (1974) 65-82  
J.J. DUISTERMAAT, V.W. GUILLEMIN, *Invent. Math.* 29 (1975) 39-79.
- [6] R. BALIAN, C. BLOCH, *Ann. Phys.* 85 (1974) 514-545.
- [7] A. VOROS, *Ann. Inst. H. Poincaré* 39 A (1983) 211-338  
J. ECALLE, "Singularités Irrégulières et Résurgence Multiple", dans "Cinq Applications des Fonctions Résurgentes", pré tirage Maths-Orsay 84 T 62 (1984).
- [8] B. RANDOL, *Trans. Amer. Math. Soc.* 201 (1975) 241-246.