

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DIDIER ROBERT

H. TAMURA

## **Limite semi-classique de l'amplitude de diffusion**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1988), p. 1-9

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1988\\_\\_\\_\\_A11\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1988____A11_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# LIMITE SEMI-CLASSIQUE DE L'AMPLITUDE DE DIFFUSION

D. ROBERT

H. TAMURA

Université de Nantes

Université de Nagoya

France

Japon

## I- L'amplitude de diffusion

La manière la plus directe et naturelle d'introduire l'amplitude de diffusion est la suivante. Considérons l'équation de Schrödinger stationnaire :

$$(1) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + V \Psi = \lambda \cdot \Psi, \quad \lambda > 0$$

$\Delta$  étant l'opérateur de Laplace sur  $\mathbb{R}^n$  et  $V$  un potentiel.

On pose :  $h = \hbar / \sqrt{m}$

Soit  $\omega \in S^{n-1}$  une direction fixée sur la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ . Cherchons une solution de (1) vérifiant la condition de radiation sortante :

$$(2) \quad \Psi(x) = \exp\left(\frac{i\sqrt{2\lambda}}{h} \langle x, \omega \rangle\right) + A \cdot \frac{\exp\left(\frac{i\sqrt{2\lambda}}{h} |x|\right)}{|x|^{(n-1)/2}} + o(|x|^{(1-n)/2})$$

pour  $|x| \rightarrow +\infty$ ,  $\theta = \frac{x}{|x|} \in S^{n-1}$  étant fixé.

Pour  $V$  assez régulier et vérifiant la condition de décroissance :  $V(x) = O(|x|^{-\rho})$ ,  $\rho > \frac{n+1}{2}$  on montre ([Re-Si]) que le problème ((1)+(2)) a une solution unique qui définit l'amplitude de diffusion  $A$ , fonction de  $\omega$ ,  $\theta$ ,  $\lambda$ ,  $h$ , que l'on notera :

$$A(\omega \rightarrow \theta ; \lambda, h).$$

$\omega$  étant une direction entrante,  $\theta$  une direction sortante. Rappelons que le terme sphérique

$$|x|^{(1-n)/2} \cdot \exp\left(\frac{i\sqrt{2\lambda} \cdot |x|}{h}\right)$$

provient du noyau de Green de l'opérateur :  $-\frac{\hbar^2}{2}\Delta - \lambda$  ( $n \geq 3$ ).

Malheureusement cette définition naturelle ne marche plus pour des potentiels plus généraux, à courte portée.

A partir de maintenant on fait sur  $V$  l'hypothèse :

$$(V) \quad \left[ \begin{array}{l} V \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ et pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ on a :} \\ \partial_x^\alpha V(x) = O(|x|^{-\rho-|\alpha|}) \text{ où } \rho \text{ est fixé } > 1. \end{array} \right.$$

Sous cette hypothèse  $A$  se définit par l'intermédiaire du noyau de la matrice de diffusion.

Fixons quelques notations :

$$P(\hbar) = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta + V, \quad P_0(\hbar) = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta$$

$$U(t, \hbar) = \exp(-i\frac{t}{\hbar} P(\hbar)), \quad U_0(t, \hbar) = \exp(-i\frac{t}{\hbar} P_0(\hbar))$$

Les dynamiques  $U$  et  $U_0$ , sous l'hypothèse  $(V_\rho)$ , engendrent un système de diffusion décrit par un opérateur de diffusion  $S(\hbar)$  (unitaire sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ )

$S(\hbar) : \Psi_-^0 \rightarrow \Psi_+^0$  où  $\Psi_-^0$  et  $\Psi_+^0$  sont définis par la propriété suivante :

il existe  $\Psi \in \mathcal{H}_{ac}(P(\hbar))$  de sorte que :

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \|U_0(t, \hbar) \Psi_\pm^0 - U(t, \hbar) \Psi\| = 0$$

où  $\mathcal{H}_{ac}(P(\hbar))$  désigne le sous-espace absolument continu de  $P(\hbar)$ .

Soit  $\mathcal{J}_\hbar$  l'opérateur unitaire de  $L^2(\mathbb{R}^n)$  sur  $L^2(]0, +\infty[, L^2(S^{n-1}))$ , diagonalisant  $P_0(\hbar)$ .

On définit alors la matrice de diffusion à l'énergie  $\lambda > 0$  comme étant l'opérateur unitaire  $S(\lambda, \hbar)$  de  $L^2(S^{n-1})$  tel que :

$$(\mathcal{J}_\hbar \cdot S(\hbar) \mathcal{J}_\hbar^* u)(\lambda, \omega) = (S(\lambda, \hbar) u(\lambda, \cdot))(\omega)$$

pour tout  $\omega \in S^{n-1}$

$S(\lambda, \hbar)$  a la structure suivante :

$$S(\lambda, \hbar) = I_d - 2i\pi.T(\lambda, \hbar)$$

où  $T(\lambda, \hbar)$  est un opérateur compact dans  $L^2(S^{n-1})$ , de noyau distribution  $C^\infty$

en dehors de la diagonale de  $S^{n-1} \times S^{n-1}$  ([Is-Ki]).

Le lien avec l'amplitude de diffusion est le suivant :

$$(3) \quad A(\omega \rightarrow \theta ; \lambda, h) = C(\lambda, h) \cdot T(\theta, \omega ; \lambda, h)$$

$$\omega \neq \theta, \quad C(\lambda, h) = -2\pi \cdot (2\lambda)^{-(n-1)/4} (2\pi h)^{(n-1)/2} \cdot e^{-i(n-3)\pi/4}$$

est une constante de normalisation

(3) sert de définition pour A sous l'hypothèse ( $V_\rho$ )

Notre objectif ici est de décrire le comportement de A lorsque  $h \downarrow 0$ . Une version plus détaillée de ce travail est à paraître ([Ro-Ta]<sub>2</sub>). On s'attend naturellement à retrouver des quantités liées à la mécanique classique, en vertu du principe de correspondance de Böhr. Nous allons maintenant rappeler des éléments de la théorie de la diffusion en mécanique classique (Hunziker [Hu], Simon [Si]).

## II- Diffusion en mécanique classique

Les trajectoires classiques sont les solutions du système hamiltonien :

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{dq}{dt} = p & ; & \frac{dp}{dt} = -\nabla V(q) \\ q(0) = x & ; & p(0) = \xi \end{cases}$$

Soit  $\lambda > 0$  un niveau d'énergie non captif c'est-à-dire vérifiant :

$$(6) \quad \forall R > 0 \quad \exists T(R) > 0 \quad \text{tel que :}$$

$$\left\{ |x| < R, |t| > T(R), \frac{|\xi|^2}{2} + V(x) = \lambda \right\} \Rightarrow |q(t)| > R$$

L'opérateur de diffusion  $S_{cl}$  en mécanique classique est défini de manière analogue à la situation quantique :

$$S_{cl} : (a_-, b_-) \rightarrow (a_+, b_+)$$

où

$$(a_{\pm}, b_{\pm}) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$$

et

$$(7) \quad \lim_{t \rightarrow \pm\infty} (|q(t) - a_{\pm} - b_{\pm} t| + |p(t) - b_{\pm}|) = 0$$

avec  $(q, p)$  vérifiant (5) et (6) (en particulier  $(q, p)$  est une trajectoire d'énergie  $\lambda > 0$ , non captive).

Notons que par la conservation de l'énergie on a :

$$|b|^2 = 2\lambda$$

$S_{cl}$  est une transformation canonique dans  $T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ .

Pour préparer l'énoncé de notre résultat nous introduisons une hypothèse complémentaire.

Fixons une direction entrante  $\omega \in S^{n-1}$ . Soit  $\Lambda_{\omega}$  l'hyperplan vectoriel orthogonal à  $\omega$ .

La particule classique "libre" issue de  $z \in \Lambda_{\omega}$  (à  $t=0$ ), d'énergie  $\lambda > 0$  et de direction  $\omega$ , voyage sur la trajectoire :

$$t \rightarrow (\sqrt{2\lambda} \omega t + z, \sqrt{2\lambda} \cdot \omega)$$

Posons :  $S_{cl}(z, \sqrt{2\lambda} \omega) = (q_{\infty}(z, \lambda), \sqrt{2\lambda} \cdot P_{\infty}(z, \lambda))$

avec :  $P_{\infty}(z, \lambda) \in S^{n-1}$

$P_{\infty}(z, \lambda)$  indique la direction asymptotique de sortie ( $t \rightarrow +\infty$ ) de la trajectoire  $q_1(t)$  de direction asymptotique d'entrée  $\omega(t \rightarrow -\infty)$ .

On définit alors la densité angulaire du flux de sortie :

$$d_{ang}(z, \lambda) = \left| \det \left( p_{\infty}, \frac{\partial p_{\infty}}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial p_{\infty}}{\partial z_{n-1}} \right) \right|$$

$(z_1, \dots, z_{n-1}) = z$  étant un système de coordonnées sur  $\Lambda_{\omega}$ .

Notons que

$$\frac{\partial p_{\infty}}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial p_{\infty}}{\partial z_{n-1}}$$

sont des vecteurs tangents à  $S^{n-1}$  et que si  $d\sigma(\theta)$  désigne l'élément d'aire euclidienne sur  $S^{n-1}$  on a :

$$d\sigma(\theta) = d_{\text{ang}}(z, \lambda). dz$$

Introduisons la définition suivant :

**Définition :**

Soit  $\theta \in \omega$ .  $\theta$  est dit régulier si :

$$p_{\infty}(z, \lambda) = \theta, z \in \Lambda_{\omega} \Rightarrow d_{\text{ang}}(z, \lambda) \neq 0$$

ie  $\left\{ \frac{\partial p_{\infty}}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial p_{\infty}}{\partial z_{n-1}} \right\}$  est une base de  $T_{\theta} S^{n-1}$ .

Lorsque  $\theta$  est régulier, par le théorème des fonctions implicites il existe un voisinage  $\mathcal{U}_{\theta}$  de  $\theta$  sur  $S^{n-1}$  tel que l'équation en  $z : p_{\infty}(z, \lambda) = \tilde{\theta}$ ,  $\tilde{\theta} \in \mathcal{U}_{\theta}$  se résolve par :  $z = W_j(\tilde{\theta}, \lambda)$ ,  $j = 1, \dots, \ell(\theta, \lambda)$ .

On définit alors la section différentielle efficace (classique) par :

$$\sigma_{\text{cl}}(\omega \rightarrow \theta, \lambda) = \sum_{j=1}^{\ell(\theta, \lambda)} \frac{1}{d_{\text{ang}}(W_j(\theta, \lambda), \lambda)}$$

**III- Le résultat.**

**Théorème :**

Sous les hypothèses suivantes :

- (i)  $(V_{\rho})$  (avec  $\rho > 1$ )
- (ii)  $\lambda > 0$  niveau d'énergie non captif
- (iii)  $\omega \in S^{n-1}$  étant fixé,  $\theta \in S^{n-1}$  est régulier.

On a l'asymptotique :

$$(*) \quad A(\omega \rightarrow \theta ; \lambda, h) = \sum_{j=1}^{\ell(\theta, \lambda)} \frac{1}{\sqrt{d_{\text{ang}}(W_j(\theta, \lambda), \lambda)}} e^{i \left( h^{-1} S_j - \mu_j \frac{\pi}{2} \right)} + O(h)$$

pour  $h \downarrow 0$

où :

$$S_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{|p_1(t, W_j, \lambda)|^2}{2} - V(q_1(t, W_j, \lambda)) - \lambda \right) dt - \sqrt{2\lambda} \langle q_\infty(W_j, \lambda), \theta \rangle$$

$\mu_j \in \mathbb{Z}$  étant l'indice de Maslov de la trajectoire  $(q_1, p_1)$  sur la variété lagrangienne décrite par :

$$x = q_1(t, z, \lambda), \quad \xi = p_1(t, z, \lambda), \quad z \in \Lambda_\omega, \quad t \in \mathbb{R}$$

$(q_1, p_1)$  étant la trajectoire introduite dans II.

### Commentaires :

1) Sous les mêmes hypothèses on peut obtenir l'asymptotique complète en  $h$ ,  $h \downarrow 0$  (modulo  $O(h^\infty)$ ).

2) Si  $\ell(\theta, \lambda) = 1$  (ie si  $p_\infty(z, \lambda) = \theta$  a une unique solution  $z$ ) (\*) implique :

$$\lim_{h \downarrow 0} |A(\omega \rightarrow \theta, \lambda; h)|^2 = \sigma_{c\ell}(\omega \rightarrow \theta, \lambda).$$

3) Auparavant Vainberg [Va] et Protas [Pr] ont obtenu (\*) lorsque

$$V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ et } \lambda > \sup_{x \in \mathbb{R}^n} V(x)$$

puis Yajima [Ya] a obtenu un résultat semblable sous l'hypothèse  $(V_\rho)$  au sens de la convergence  $L^2$  en  $\lambda$  et  $\theta$  sans faire l'hypothèse (6) sur  $\lambda$ . Ici le fait de fixer l'énergie  $\lambda$  nous a amené à faire cette hypothèse. Sans cela (cas par exemple du puits dans une île - Cf [Ge-Ma-Ra]) l'amplitude de diffusion est probablement exponentiellement grande (en  $O(e^{\gamma/h})$ ,  $\gamma > 0$ ) au voisinage des énergies résonantes dues à la présence de pôles de la matrice  $S$  très près de l'axe réel.

### IV- Schéma de démonstration du théorème (on renvoie à [Ro-Ta]<sub>2</sub>

pour les détails)

1) On part d'une formule de représentation de l'opérateur  $T(\lambda, h)$  due à Isozaki-Kitada ([Is-Ki]) :

$$T(\lambda, h) = T_1(\lambda, h) - T_2(\lambda, h)$$

où :

$$T_1(\lambda, h) = F_0(\lambda) J_{+a}^*(h) (K_{+b}(h) - K_{-b}(h)) F_0^*(\lambda)$$

$$T_2(\lambda, h) = F_0(\lambda) K_{+a}^* R(\lambda + i0, h) (K_{+b}(h) + K_{-b}(h)) F_0^*(h)$$

avec :

$$(F_0(\lambda)u)(\omega) = c_0(\lambda, h) \int e^{\frac{i\sqrt{2\lambda}}{h} \langle x, \omega \rangle} u(x) dx$$

$J_{+a}$ ,  $K_b$  étant des opérateurs intégraux de Fourier, localisés dans des zones sortantes (+) entrantes (-) de l'espace de phase, associés à des fonctions de phase  $\varphi$  vérifiant l'équation de Hamilton Jacobi :

$$\frac{1}{2} |\nabla_x \varphi_{\pm}(x, \xi)|^2 + V(x) = \frac{|\xi|^2}{2}$$

plus une condition convenable à l'infini dans une zone sortante  $\Sigma_+$  (respectivement entrante  $\Sigma_-$ ).

Les zones entrantes (resp. sortantes) sont caractérisées par :  $x \cdot \xi \leq \sigma |x| |\xi|$  (resp  $x \cdot \xi \geq \sigma |x| |\xi|$ ) pour un réel  $\sigma \in ]-1, 1[$  ;  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$ .

Les amplitudes  $a$  et  $b$  sont définies en résolvant des équations de transport.

2) Un argument de phase non stationnaire facile permet de se débarrasser de  $T_1$  (ici seule la condition  $\theta \neq \omega$  intervient).

3) En utilisant des contrôles de la résolvante et en tronquant en temps grâce à la condition (6) de non capture on se ramène à la construction d'une paramétrix globale pour  $e^{-ith^{-1}P(h)}$  pour  $|t| \leq T_0$ ,  $T_0 > 0$  fixé, assez grand avec des données initiales oscillantes.

Pour voir cela on part de l'égalité :



$$(9) \quad R(\lambda + i0, h) = ih^{-1} \int_0^{T_0} e^{ih^{-1}t(\lambda - P(h))} dt + e^{ih^{-1}T_0\lambda} R(\lambda + i0, h) e^{-ih^{-1}T_0 P(h)}$$

D'autre part, utilisant des arguments de commutateurs, des estimations microlocales sur  $R(\lambda + i0, h)$  et (8) on montre que :

$$(10) \quad T_2(\theta, \omega; \lambda, h) = \langle R(\lambda + i0, h) g_{-b} e^{ih^{-1}\phi_-}, g_{+a} e^{ih^{-1}\phi_+} \rangle + O(h^\infty)$$

où :

$$\phi_+ = \phi_+(x, \sqrt{2\lambda} \cdot \theta)$$

$$\phi_- = \phi_-(x, \sqrt{2\lambda} \cdot \omega)$$

$$g_{\pm b} = e^{\pm ih^{-1}\phi_{\pm}} [\chi, P_0(h)] b_{\pm} e^{ih^{-1}\phi_{\pm}}$$

et  $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\text{Supp } \chi$  assez grand.

Utilisant (9), (10) et les propriétés de support de  $g_b$  on obtient :

$$(11) \quad T(\theta, \omega, \lambda, h) = ih^{-1} \int_0^{T_0} e^{ih^{-1}t\lambda} \langle U(t, h) g_{-b} e^{ih^{-1}\phi_-}, g_{+a} e^{ih^{-1}\phi_+} \rangle dt + O(h^\infty)$$

3) On applique la théorie de Maslov et on termine la démonstration à l'aide du théorème de la phase stationnaire. C'est à ce stade de la démonstration qu'intervient l'hypothèse  $\theta$  régulier.

### **BIBLIOGRAPHIE**

[Ge-Ma-Ro] C. Gérard - A. Martinez - D. Robert

Breit-Wigner formulas for the scattering phase and the total scattering cross sections in the semi-classical limit. Preprint

[Hu] Hunziker

The S-matrix in classical mechanics Comm. Math. Phys. 8, 282-299 (1968)

[Is-Ki] H. Isozaki-H. Kitada

Scattering matrices for two body Schrödinger operators-Papers  
College Arts Sci. Univ. Tokyo 35 (1985) 81-107

[Pr] Yu N Protas

Quasiclassical asymptotics of the scattering amplitude for the  
scattering of a plane wave by inhomogeneities of the medium - Math.  
USSR Sbornik. Vol. 45 (1983) n° 4- 487-507

[Si] B. Simon

Wave operators for Classical Particle Scattering Comm. Math. Phys. 23,  
37-48 (1971)

[Ro-Ta]<sub>1</sub> D. Robert-H. Tamura

Semi-classical estimates for resolvents and asymptotics for total  
scattering cross-sections. Ann. I.H.P. Physique Théorique vol. 46 n° 4.  
1987. p. 415-442.

[Ro-Ta]<sub>2</sub> D. Robert-H. Tamura

Asymptotic behaviour of Scattering Amplitudes in Semi-classical and  
Low Energy Limits. Preprint Nagoya and Nantes Universities - To  
appear -

[Re-Si] M. Reed-B. Simon

Methods of modern mathematical physics III scattering theory.  
Academic Press 1979

[Ya] K. Yajima

The quasi-classical limit of scattering amplitude - $L^2$ -approach for  
short range potentials. Japan J. Math. 13 (1987) 77-126

[Va] BR Vainberg

Quasi classical approximation in stationary scattering problems. Func.  
Anal. Appl. 11 (1977)