Journées Équations aux dérivées partielles

Jean-Yves Chemin

Interactions totalement non linéaires

Journées Équations aux dérivées partielles (1987), p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1987____A12_0>

INTERACTIONS TOTALEMENT NON LINEAIRES

par J.Y. CHEMIN

Introduction :

On cherche à décrire les singularités d'une solution réelle assez régulière de l'équation

$$(E) \qquad F\left(x,u,\partial^{\alpha}u\right)_{|\alpha|\leq m}=0$$

sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$, F étant une fonction C^{∞} de ses arguments.

Soit $p(\text{resp } p_m)(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m}\left(\text{resp} \sum_{|\alpha|=m}\right) \partial F/\partial u_{\alpha}.\xi^{\alpha}$, on fait les hypothèses suivantes :

(H_1) p_m est strictement hyperbolique par rapport à ξ_1.
(H_2) toute bicaractéristique (i.e. courbe intégrale de H_{p_m}, le champ hamiltonien de p_m) issue d'un point (x,ξ) de $T^*\Omega\cap(x_1>0)$, tel que $p_m(x,\xi)=0$, rencontre $T^*\Omega\cap(x_1<0)$.

On cherche à décrire les singularités d'une solution u de (E) dans l'avenir, à partir, soit de leur connaissance dans le passé, soit de la connaissance de la régularité des traces de u sur l'hyperplan $(x_1=0)$.

Théorème fondamental (J-M. Bony [4]) : Soit $u\in H^s_{loc}(\Omega)$,$s>\frac{n}{2}+m+1$ réelle solution de (E) :

- $WF_{2s-\frac{n}{2}-m}(u)\subset \text{Car}p_m=\{(x,\xi)/p_m(x,\xi)=0\}$.
- Soit F_{σ} la réunion des bicaractéristiques issues des points de $WF_{\sigma}(u)\cap\text{Car}p_m$ $\cap(x_1<0)$, pour tout $\sigma\leq 2s-\frac{n}{2}-m-1$, $WF_{\sigma}(u)\subset F_{\sigma}$.

Ce théorème signifie que le comportement des singularités microlocales H^{σ} de u est, pour $\sigma\leq 2s-\frac{n}{2}-m-1$, linéaire vis-à-vis du symbole principal du linéarisé.

On cherche, soit à obtenir des comportements de singularités de type linéaire, soit à contrôler l'apparition des singularités nées d'interaction non linéaires, pour un niveau de singularités allant au delà du seuil $2s-s_0$. On présentera ici, d'une part des résultats relatifs à la dimension *un* d'espace (i.e. $n=2$), ainsi qu'à l'ordre 1, d'autre part, des résultats relatifs au cas de données initiales conormales par rapport à un point.

Le lien entre ces deux types de résultats provient des outils utilisés pour leur démonstration ; à savoir le calcul paradifférentiel précisé, et l'étude de l'action itérée de champs de vecteurs peu réguliers.

Le plan sera le suivant :

1. Résultat en dimension 2 ou à l'ordre 1.

2. Calcul paradifférentiel précisé.

3. Action itérée de champs de vecteurs peu réguliers.

4. Problème de Cauchy à données singulières en un point.

Pour les détails relatifs aux paragraphes 1, 2 et 3, nous renvoyons le lecteur à [5].

1. Résultats en dimension *2* **ou à l'ordre** *1* **.**

On suppose que u est une solution réelle $C^r_{loc}(\Omega)$, $r > m+1$, de l'équation (E) dans un ouvert Ω de $\mathbf{R}^2$ vérifiant (H_1) et (H_2).

La dimension *2* et (H_1) assure que $p_m = \prod_{i=1}^m z_i$, les z_i étant des champs de vecteurs dont les coefficients sont des fonctions C^∞ de la solution u.

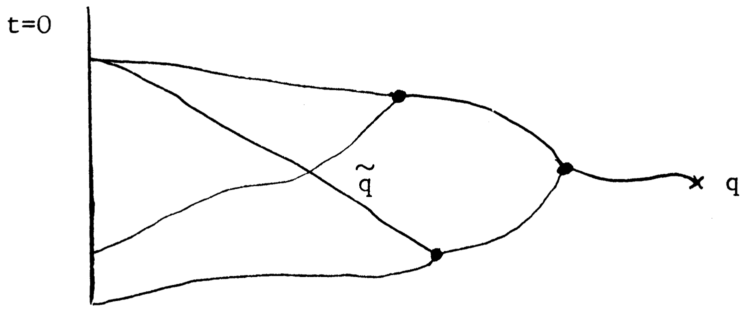
On va maintenant définir un indice de régularité pour u ; soit q un point de Ω, $\mathcal{A}_i(q)$ désigne l'ensemble des graphes A formés de points et de courbes intégrales des z_j, $j \in \{1, ..., m\}$, joignant ces points, et tels que

. q est un point de A,

. la courbe intégrale de z_i passant par q est la courbe de A passant par q,

. de tout point du graphe autre que q, il arrive les courbes intégrales de z_j et z_k avec $j \neq k$, et il en repart z_l avec $l \neq k$ et $l \neq j$.

Un exemple d'élément de $\mathcal{A}_i(q)$ est donné par le schéma suivant :



Les points du type $\tilde{q}$ ne sont pas des points du graphe d'interaction, car ils ne rendent pas compte d'interaction au niveau de régularité où l'on va se placer.

Définition 1 : Soit u une solution de (E) sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^2$, $u \in C^r_{loc}(\Omega)$, $r > m+1$, vérifiant (H_1) et (H_2) ; soit τ une fonction de $\Omega \cap (x_1 = 0)$ dans $[r, +\infty[$ telle que, pour tout $q' \in \Omega \cap (x_1 = 0)$, $u \in C^{\tau(q')}$ en q'.

(*i*) $\rho_i(q) = \operatorname{Inf}_{A \in \mathcal{A}_{i(q)}} \left(m + 1 + \sum_{q' \in A \cap (x_1=0)} \tau(q') - m - 1\right)$, les points de $A \cap (x_1 = 0)$ étant comptés avec multiplicité.

(*ii*) $\rho(q) = \operatorname{Inf}_{1 \leq i \leq m} \rho_i(q)$.

Théorème 1.1 : Sous les hypothèses de la Définition 1, pour tout $q \in \Omega$, $u \in C^{\rho(q)}$ près de q.
De plus, pour tout $i \in \{1, ..., m\}$, u est microlocalement $C^{\rho_i(q)}$ en $\left(q, \mathrm{Car} z_{i|q}\right)$.

Remarques :

1. On a le même théorème en remplaçant les espaces C^σ par $H^{\sigma+\frac{n}{2}}$.

2. J. Rauch et M. Reed ont démontré ce théorème dans [11],lorsque (E) est semi linéaire ; les champs de vecteurs $(z_i)_{1\leq i\leq m}$ sont alors C^∞.

3. P. Godin a démontré ce résultat lorsque $m = 2$, dans [9] ; le comportement des singularités est alors linéaire vis-à-vis de p_2.

Théorème 1.2 :

(i) Soit $\sigma \in]0,1[$ tel que, pour tout $m \in \mathbf{N}$, $\sigma \neq \frac{m}{m+2}$, soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$, et soit u solution réelle $C^{1+\sigma}_{\text{loc}}(\Omega)$ $\left(\text{resp} H^{\frac{n}{2}+1+\sigma}_{\text{loc}}(\Omega)\right)$ de (E_1) $F(x, u, \text{grad} u)$, sur Ω.
Si $(x, \xi) \in T^*\Omega$ est un point elliptique du linéarisé, i.e. $\sum_{i=1}^n \partial F/\partial u_i . \xi \neq 0$ alors u est microlocalement $C^{1+2\sigma+k_0\sigma}$ $\left(\text{resp} H^{\frac{n}{2}+1+2\sigma+k_0\sigma}\right)$ en (x, ξ), avec $k_0 = \left[\frac{2\sigma}{1-\sigma}\right]$.

(ii) On a le même résultat si u est complexe et f holomorphe en $(u, \text{grad} u)$.

Corollaire : Si u est une solution réelle (resp complexe) de $F(x, u, \text{grad} u) = 0$ sur Ω, avec $u \in \bigcap_{\epsilon>0} C^{2-\epsilon}_{\text{loc}}(\Omega)$, $f \in C^\infty$ (resp et holomorphe en $(u, \text{grad} u)$), alors u est C^∞ microlocalement en tout point elliptique du linéarisé.

2. Calcul paradifférentiel précisé

Pour démontrer le théorème de J-M. Bony, il faut transformer l'équation (E) en l'équation paradifférentielle linéaire suivante : $T_p u \in H^{2s-\frac{n}{2}-2m}$, où T_p est l'opérateur paradifférentiel de symbole p, (voir [4]). La limitation à $2s - s_0$ des singularités traitées par ce théorème provient des deux faits suivants :

. T_p est défini modulo un opérateur $s - \frac{n}{2} - m$-régularisant, i.e. envoyant H^σ dans $H^{s-\frac{n}{2}-2m} + \sigma$.

. Le reste est dans $H^{2s-\frac{n}{2}-2m}$.

Le calcul différentiel précisé a pour but de fournir une méthode relativement générale pour contourner ces deux obstacles :

Définition 2.1 : Une fonction $T \in C^\infty\left(\mathbf{R}^{2n}; \mathbf{R}\right)$ telle que :

(i) $\text{Supp} T \subset \{(\xi, \eta)/, |\xi| \leq \epsilon |\eta|\}$
(ii) $\text{Supp}(1-T) \backslash B(0, c) \subset \{(\xi, \eta)/ |\xi| \geq \epsilon_1 |\eta|\}$

(ϵ et ϵ_1 étant deux réels tels que $0 < \epsilon_1 < \epsilon < 1$)

(iii) $|\partial^\alpha T(\xi,\eta)| \leq C_\alpha(1+|\xi,\eta|)^{-|\alpha|}$,
étant supposée donnée, on appelle paraproduit, et on note encore T, l'opérateur envoyant $\mathcal{E}' \times \mathcal{E}'$ dans $\mathcal{S}'$ défini par :

$$T_v w(x) = (2\pi)^{-2n} \int e^{ix(\xi+\eta)} T(\xi,\eta)\hat{v}(\xi)\hat{w}(\eta)d\xi d\eta \tag{2.1}$$

Pour les propriétés opératoires de T dans les H^σ et les C^σ, nous renvoyons à [4]. A l'aide d'intégration par parties, on démontre, dans [5], que Supp Sing $T_v w \subset$ Supp$v \cap$ Supp Sing$w$; ceci permet de localiser T sur un ouvert Ω de $\mathbf{R}^n$ modulo un opérateur infiniment régularisant. Soit $a(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x).\xi^\alpha$, avec $a_\alpha \in L^\infty_{\text{loc}}(\Omega)$, on notera encore T_a l'opérateur défini par $T_a v = \sum_{|\alpha|\leq m} T_{a_\alpha} D^\alpha v$.

Etudions maintenant le reste R ; il provient de la paralinéarisation d'une fonction non linéaire. Le théorème de paralinéarisation de Bony-Meyer (voir [4] et [10]) dit que si $v \in C^r$, $f(v) \equiv T_{f'(v)}.v(C^r)$.

Soit k un entier strictement positif ; la donnée d'une fonction $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, réalisant une partition de l'unité dyadique, permet de construire dans [5], explicitement et de manière récurrente, une suite d'opérateurs $\left(M^{\beta,k}(a,v)\right)_{1\leq\beta\leq k}$, linéaires en a, β -linéaires en v tels que : $M^{\beta,k}(a,v)$ envoie $C^{\rho_0}\times C^\sigma$ $\left(\text{resp}C^{\rho_0} \times H^{\frac{n}{2}+\sigma}\right)$ dans $C^{\beta\sigma+\text{Inf}(\rho_0,0)}$ $\left(respH^{\frac{n}{2}+\beta\sigma+\text{Inf}(\rho_0,0)}\right)$ pour $\sigma + \text{Inf}(\rho_0, 0) > 0$. L'intérêt de ces opérateurs apparaît dans le théorème suivant :

Théorème d'approximation 2.1 :

(i) Soit $v \in C^r$ $\left(\text{resp}H^{\frac{n}{2}+r}\right)$, $r > 0$, réelle et $f \in C^\infty$, pour tout $k' \leq k$:

$$\left\| f(v) - \sum_{\beta=1}^{k'} M^{\beta,k}\left(f^{(\beta)}(v), v\right)\right\|_{C^r\left(\text{resp}H^{\frac{n}{2}+r}\right)} \leq C$$

la constante C ne dépendant que de $\|v\|_{C^r\left(\text{resp}H^{\frac{n}{2}+r}\right)}$.

(ii) On a le même résultat avec v complexe et f holomorphe près des valeurs de v.

Remarques :

1. Si $v \in C^\sigma$, $a \in C^{\rho_0}$ avec $\sigma + \inf(\rho_0, 0) > 0$

$$M^{1,k}(a,v) = \sum_{p \le q+N_k} \varphi\left(2^{-p}D\right)a \quad \varphi\left(2^{-q}D\right)v$$
$$\equiv T_a v\left(C^{\sigma+\mathrm{Inf}(\rho_0,0)}\right)$$

2. Pour des applications à l'interaction contrôlée, voir [6] et [7].

3. Action itérée des champs de vecteurs peu réguliers.

Définition 3.1 : Soient $Z = (z_1, ..., z_N)$ une famille de N champs de vecteurs sur $\mathbf{R}^n$, à coefficients C^σ, et T un paraproduit sur $\mathbf{R}^n$, $C^{r,k}(Z)$ $\left(\mathrm{resp} H^{r,k}(Z)\right)$ est l'ensemble des v dans C^r $(\mathrm{resp} H^r)$ tels que, pour tout $I = (i_1, ..., i_l)$, $l \le k$, $i_j \in \{1, ..., N\}$ $T_{z_{i_1}} ... T_{z_{i_l}} v \in C^{r+(\delta-1)l}$ $\left(\mathrm{resp} H^{\frac{n}{2}+r+(\delta-1)l}\right)$, avec $\delta = \mathrm{Inf}(r,1)$.

Des espaces de ce type ont été également introduits par S. Alinhac dans [1] pour l'étude d'interaction d'ondes simples dans les équations non semi-linéaires.

En supposant (H_{k-1}) : les coefficients des champs sont $C^{\sigma,k-1}(Z)$, on démontre, dans [5], des inégalités disant que ces "parachamps" se comportent vis-à-vis des produits d'une manière pas trop éloignée de celle des champs de vecteurs à coefficients C^∞ ; une modification formelle mineure laissée au lecteur permet d'adapter le cas d'un seul champ, traité dans [5], à celui de plusieurs traités ici. On peut alors démontrer, sous cette hypothèse, que les espaces $C^{r,k}(Z)$ et H $^{r,k}(Z)$ sont indépendants d'un paraproduit T utilisé pour les définir. De plus, notamment grâce à l'étude de l'opérance des opérateurs $\left(M^{\beta,k}\right)_{1\le\beta\le k}$ dans les $C^{\sigma,k}(Z)$, on construit, pour $k \le \left[\frac{2\sigma}{1-\sigma}\right]$, un calcul paradifférentiel analogue à celui construit par J-M. Bony dans [4].
Illustrons maintenant l'intérêt de cette méthode par la démonstration du Théorème 1.2 :

Ce théorème est trivial dans le cas semi-linéaire ; en effet, soit z un champ de vecteurs à coefficients C^∞, soit $f \in C^\infty$ et $u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, si $z(x,D)u = f(x,u)$, alors pour tout $k \in \mathbf{N}$, $Z^k u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, d'où le théorème.

Dans le cas non semi-linéaire, on peut commencer par supposer $f(x,0) = 0$. Soient alors φ et χ deux fonctions de $C_0^\infty(\Omega)$ et (x,ξ) un point elliptique du linéarisé tel que χ vaille 1 près de Suppφ, et φ vaille *1* près de x :

$$\varphi f\left(x, u(x), \partial u(x)\right) = \varphi f\left(x, \chi u(x), \partial \chi u(x)\right)$$

Dans la suite on note encore f la fonction φf, et u la fonction χu.

Posons $z = \sum_{i=1}^n \partial_i f\left(x, u, \partial_j u\right).\xi_i$ et, T étant un paraproduit sur $\mathbf{R}^n$, $Z = T_z$. On va démontrer $\left(R_{k_0+1}\right)u \in C^{1+\sigma,k_0+1}(Z)$ et que les coefficients de z sont dans $C^{\sigma,k_0}(Z)$.

(R_1) est clairement vraie. Supposons (R_j) avec $j \le k_0$.
Les coefficients de Z sont des fonctions C^∞ de u et des ∂_j, u, donc sont dans $C^{\sigma,j}(Z)$. Il vient alors

$$Zu + T_{\partial_0 f(x,u,\partial u)} . u \in C^{2\sigma,j}(Z).$$

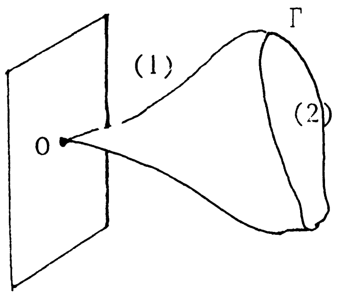
Vu que $\partial_0 f(x,u,\partial u) \in C^{\sigma,j}(Z)$, on a $T_{\partial_0 f(x,u,\partial u)} u \in C^{1+\sigma,j}(Z)$, qui est inclus dans $C^{2\sigma,j+1}(Z)$, d'où : $Zu \in C^{2\sigma,j}(Z)$, or $u \in C^{1+\sigma,j+1}(Z)$, ce qui démontre (R_{j+1}) . D'où il vient (R_{k_0+1}) et le théorème par un analogue, dans ce cadre, de l'ellipticité microlocale pour le champ Z.

Pour le Théorème 1.1, on utilise, à l'instar de J. Rauch et M. Reed dans [11], des espaces $\overset{m}{\underset{i=1}{+}} C^{\rho_i,k_i}(Z_i)$; le mécanisme est le même, en plus lourd techniquement.

4. Problème de Cauchy d'ordre 2 à données singulières en un point

On suppose que u est une solution réelle $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega), s > \frac{n}{2} + 3$, de l'équation (E) lorsque $m = 2$, et que $\gamma_0(u)$ et $\gamma_1(u)$ sont très régulières, sauf en l'origine.

Définition 4.1 : Γ désigne la projection sur Ω de la réunion des bicaractéristiques nulles passant par 0.
On appellera, par abus, Γ le cône d'onde issu de 0.
On sait, d'après les résultats de M. Sablé-Tougeron démontrés dans [13],d'une part, et d'autre part, de ceux démontrés par l'auteur dans [6] et [7], que, localement près de H, la régularité de u est la suivante :



(1) u est C^∞

(2) u est H^{3s-s_1}

On cherche à s'affranchir de la limitation à $3s - s_1$ concernant la zone (2), c'est-à-dire à obtenir un comportement des singularités, analogue au cas linéaire.

Lorsque $n = 2$, H. Bahouri et B. Dehman dans [2], et P. Godin dans [3], et le Théorème 1.1, mettent en évidence le comportement linéaire des singularités de u : u est très régulière en dehors de Γ qui est, dans ce cas, la réunion de deux courbes.

Nous supposerons désormais $n \ge 3$. Dans ce cas, M. Beals prouve, dans

[3], l'existence d'une solution u de l'équation $\partial_t^2 u - \sum_{i=1}^{n-1} \partial_{x_i}^2 u = \beta u^3$, avec $\beta \in C_0^\infty\left(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^{n-1}\right)$, telle que, pour $i \in \{0,1\}$, $\gamma_i u$ soit H^{s-i}, et C^∞ en dehors de l'origine, et telle que u ne soit pas H^{3s+s_2} dans la zone (2)

Il convient donc de faire des hypothèses sur la nature de la singularité des traces de u si l'on veut obtenir un comportement de type linéaire. L'hypothèse que nous ferons ici est que les traces sont conormales par rapport à 0. Plus précisément :

Définition 4.2 : Soit Σ une sous-variété lisse d'un ouvert Ω' de $\mathbf{R}^n$; on dit qu'une distribution H^s est conormale (d'ordre k) par rapport à Σ si elle appartient à l'ensemble $H^{s,k}(\Sigma)$ des v dans $H^s_{\text{loc}}(\Omega')$ tels que, si $z_1, ..., z_l$ sont $l \leq k$ champs de vecteurs tangents à Σ, à coefficients C^∞, alors $z_1(x,D)...z_l(x,D)v \in H^s_{\text{loc}}(\Omega')$.

Remarques :

(i) Si $v \in H^{s,k}(\Sigma)$, alors le front d'onde H^{s+k} de v est inclus dans $N^*\Sigma$, le conormal à Σ.

(ii) Si $\Sigma = \{0\}$, $H^{s,k}(\Sigma)$ est l'ensemble des v telles que pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq k$, $x^\alpha v \in H^{s+|\alpha|}$.

Théorème 4.1 : Soit u solution $H^s_{\text{loc}}(\Omega)$ de (E), u réelle, $s > \frac{n}{2} + 8$; si, pour $i \in \{0,1\}$, $\gamma_i u \in H^{s-i,\infty}(0)$, alors, localement près de 0, on a :

(i) $\Gamma \setminus \{0\}$ est une hypersurface lisse.

(ii) $u \in H^{s,\infty}(\Gamma \setminus \{0\})$;en particulier, u est C^∞ en dehors de Γ.

Ce théorème a été démontré par N. Ritter dans [12], lorsque l'équation (E) est semi-linéaire, pour $s > \frac{n}{2} + 1$. L'idée essentielle de la démonstration dans ce cadre est de redresser le cône d'onde Γ en le cône $\Gamma_0 = \left\{(t \ , x') \ / t^2 = |x'|^2\right\}$ par l'application exponentielle associée à la gerbe des bicaractéristiques, qui est un C^∞ difféomorphisme. Cette technique est typique de l'ordre 2.

Dans le cadre non semi-linéaire, la difficulté provient de ce que l'application exponentielle est a priori peu régulière, et donc $\Gamma \setminus \{0\}$ aussi. Ainsi les champs de vecteurs tangents à $\Gamma \setminus \{0\}$, nuls en 0, que l'on est amené à utiliser sont, a priori, peu réguliers. On démontre pas à pas qu'ils vérifient une hypothèse du type (H_{k-1}), ce qui permet d'énoncer, dans [8], un théorème plus précis décrivant le cas où $\gamma_i u \in H^{s-j,k}(0)$, $j \in \{0,1\}$. La démonstration détaillée est faite dans [8].

Bibliographie

[1] S. Alinhac: Interaction d'ondes simples pour des équations complètement non linéaires. Séminaire E.D.P. de l'Ecole Polytechnique(1985-1986).

[2] H. Bahouri et B. Dehman : Propagation des singularités höldériennes de solutions d'équation non linéaire. Preprint Orsay.

[3] M. Beals : Self spreading and strength of singularities for solutions of semi-linear wave equations. Annals of Math. 118 (1983).

[4] J-M. Bony : Calcul symbolique et propagation des siongularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. Ann. Sci. E.N.S. 4ème série 14 (1981).

[5] J-Y. Chemin : Calcul paradifférentiel précisé et applications à des équations aux dérivées partielles non semi-linéaires. Preprint Ecole Polytechnique, à paraître au Duke Math. Journal.

[6] J-Y. Chemin : Onde lente et interaction contrôlée pour les équations strictement hyperboliques non linéaires. Séminaire E.D.P. de l'Ecole Polytechnique (1986-1987).

[7] J-Y. Chemin : Calcul symboloque bilinéaire et interaction contrôlée dans les équations aux dérivées partielles non linéaires. Preprint, à paraître au Bull. Soc. Math. France.

[8] J-Y. Chemin : Régularité de la solution d'un problème de Cauchy fortement non linéaire à données singulières en un point. Preprint de l'Ecole Polytechnique.

[9] P. Godin : Propagation of C^∞ regularity for fully non linear second order strictly hyperbolic equations in two variables. Trans. Amer. Math. Soc. 290 (1985).

[10] Y. Meyer : Remarque sur un théorème de J_ M. Bony. Supp. Rend. Cir. Math. Palermo N°1 (1981).

[11] J. Rauch et M. Reed : Non linear microlocal analysis of semi linear hyperbolic systems in one space dimension. Duke Math. Journal 49 (1982).

[12] N. Ritter : Progressing wave solutions to non linear hyperbolic Cauchy problems. Thèse M.I.T. (1984).

[13] M. Sablé-Tougeron : Régularité microlocale pour des problèmes aux limites non linéaires. Ann. Inst. Fourier 36.1 (1986).

Jean-Yves CHEMIN
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex