

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

DENISE HUET

## **Stabilité et convergence dans les problèmes de perturbation singulière**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1986), p. 1-9

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1986\\_\\_\\_\\_A6\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1986____A6_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

STABILITÉ ET CONVERGENCE DANS LES  
\*\*\*\*\*

PROBLÈMES DE PERTURBATION SINGULIÈRE  
\*\*\*\*\*

par Denise HUET

U.A. 750

Département de Mathématiques

Université de Nancy I

B.P. 239

54506 Vandoeuvre lès Nancy Cedex

-----



§ 1.- INTRODUCTION.

J'expose ici quelques résultats, résumés dans [H1], qui m'ont été inspirés d'une part par la lecture des travaux de L. Frank et W. Wendt [F1], [FW1], [FW2] et d'autre part par les estimations a priori obtenues par B. Najman [N1] pour des perturbations singulières de problèmes aux limites dans des espaces de type  $L_p$ .

On désigne par  $\varepsilon$  un petit paramètre  $> 0$ . Soient, pour  $\varepsilon > 0$ ,  $H_\varepsilon$  et  $F_\varepsilon$  des espaces normés et  $A_\varepsilon$  une application linéaire de  $H_\varepsilon$  dans  $F_\varepsilon$ . On dit que la famille  $A_\varepsilon$  est inversement stable s'il existe une constante  $C > 0$  telle que l'on ait

$$(1.1) \quad \|u\|_{H_\varepsilon} \leq C \|A_\varepsilon u\|_{F_\varepsilon}$$

pour tout  $u \in H_\varepsilon$  et tout  $\varepsilon > 0$  assez petit. Lorsque  $A_\varepsilon$  est bijectif on peut considérer la solution de l'équation

$$(1.2) \quad u_\varepsilon \in H_\varepsilon \quad A_\varepsilon u_\varepsilon = f_\varepsilon$$

où  $f_\varepsilon$  est donnée dans  $F_\varepsilon$ . Sous certaines conditions (théorème 2.1), facilement vérifiables dans les applications, la stabilité inverse de  $A_\varepsilon$  implique la convergence, lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ , de  $u_\varepsilon$  vers la solution  $u$  d'une équation du type

$$(1.3) \quad Au = f$$

où  $A$  est un opérateur linéaire d'un espace normé  $H$  dans un espace normé  $F$ .

Dans le § 2 de cet exposé je montrerai comment les estimations du type (1.1) obtenues par L. Frank et W. Wendt dans des espaces de Sobolev à deux indices permettent d'obtenir la convergence de  $u_\varepsilon$  solution de (1.2) vers  $u$  solution de (1.3), convergence qui n'est pas étudiée dans [F1], [FW1], [FW2].

Souvent, on obtient, pour  $A_\varepsilon$ , une estimation a priori moins forte que (1.1), du type

$$(1.4) \quad \|u\|_{H_\varepsilon} \leq C \left\{ \|A_\varepsilon u\|_{F_\varepsilon} + \|u\|_{E_\varepsilon} \right\}$$

où  $E_\varepsilon$  est un espace normé convenable. Il est donc utile d'établir des conditions suffisantes pour qu'une estimation du type (1.4) implique la stabilité inverse de  $A_\varepsilon$ . C'est ce que je ferai dans le § 3 de cet exposé (lemme 3.1). Je donnerai ensuite des applications à des problèmes différentiels dans des espaces de type  $L_p$ .

§ 2.- CONVERGENCE PROPRE ET ESPACES DE SOBOLEV A DEUX INDICES.

Approximation et convergence propres [Aul], [St1], [St2].

Soient  $E$  et  $(E_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  des espaces normés. On désigne par  $\Pi E_\varepsilon$  le produit cartésien usuel et par  $(u_\varepsilon)$  un élément de  $\Pi E_\varepsilon$ . On dit que  $(u_\varepsilon)$  et  $(v_\varepsilon)$  sont équivalents si  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{E_\varepsilon} = 0$ .

Soit  $R$  une application linéaire  $u \mapsto R(u)$  de  $E$  dans l'ensemble des classes d'équivalence. On dit que  $(E_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  et  $R$  constituent une approximation propre de  $E$  notée  $\mathcal{A}(E, \Pi E_\varepsilon, R)$  si, quels que soient  $u \in E$ ,  $(u_\varepsilon) \in R(u)$  on a  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon\|_{E_\varepsilon} = \|u\|_E$ . On dit alors que  $u_\varepsilon \in E_\varepsilon$  converge proprement vers  $u \in E$ , quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ , et on écrit  $u_\varepsilon \hookrightarrow u (E_\varepsilon, E, R)$  si  $(u_\varepsilon) \in R(u)$ .

Exemple 2.1 : Soit  $E$  un espace normé. On prend, pour  $\varepsilon > 0$ ,  $E_\varepsilon = E$ ,  $\|\cdot\|_{E_\varepsilon} = \|\cdot\|_E$ , et, pour  $u \in E$

$$(2.1) \quad T(u) = \{(u_\varepsilon) \in \Pi E_\varepsilon ; \|u_\varepsilon - u\|_E \rightarrow 0 \text{ avec } \varepsilon\}.$$

Alors  $\mathcal{A}(E, \Pi E_\varepsilon, T)$  est une approximation propre de  $E$ , appelée approximation triviale et  $u_\varepsilon \hookrightarrow u (E_\varepsilon, E, T)$  si et seulement si  $u_\varepsilon$  converge vers  $u$  dans  $E$  au sens usuel.

Exemple 2.2.[H3] : Soient  $D$  et  $E$  des espaces de Banach tels que  $D \subset E$ ,  $D$  étant dense dans  $E$  et l'injection de  $D$  dans  $E$  étant continue. On pose

$$E_\varepsilon = D \quad \text{et} \quad \|u\|_{E_\varepsilon} = \varepsilon^\alpha \|u\|_D + \|u\|_E$$

avec  $\alpha > 0$  et, pour  $u \in E$

$$(2.2) \quad S(u) = \{(u_\varepsilon) \in \Pi E_\varepsilon ; \forall \delta > 0, \exists \varphi \in D \text{ et } \varepsilon_0 > 0 \text{ tels que} \\ \|u - \varphi\|_E \leq \delta \quad \text{et} \quad \|u_\varepsilon - \varphi\|_{E_\varepsilon} \leq \delta \text{ pour } \varepsilon \leq \varepsilon_0\}.$$

$\mathcal{A}(E, \Pi E_\varepsilon, S)$  est une approximation propre de  $E$  et  $u_\varepsilon \hookrightarrow u (E_\varepsilon, E, S)$  si et seulement si  $u_\varepsilon \rightarrow u$  dans  $E$  et  $\varepsilon^\alpha u_\varepsilon \rightarrow 0$  dans  $D$ .

On a le théorème de convergence propre suivant.

Théorème 2.1 : Soient  $F, F_\varepsilon, H, H_\varepsilon$  des espaces normés,  $\mathcal{A}(F, \Pi F_\varepsilon, P)$  et  $\mathcal{A}(H, \Pi H_\varepsilon, Q)$  des approximations propres de  $F$  et  $H$  respectivement.

Soit  $A_\varepsilon$  [resp.  $A$ ] une application linéaire continue de  $H_\varepsilon$  dans  $F_\varepsilon$  [resp. de  $H$  dans  $F$ ]. On fait les hypothèses suivantes

H1 :  $A$  est surjectif,  $A_\varepsilon$  est bijectif pour  $\varepsilon > 0$ .

H2 (condition de compatibilité) : Il existe un sous-espace  $\Phi$  de  $H$ , dense dans  $H$ , et pour tout  $\varphi \in \Phi$ , il existe  $(\varphi_\varepsilon) \in Q(\varphi)$  tels que  $A_\varepsilon \varphi_\varepsilon \hookrightarrow A\varphi (F_\varepsilon, F, P)$ .

H3 : La famille  $A_\varepsilon$  est inversement stable, i. e.  $\exists C > 0$  telle que

$$(2.3) \quad \|u\|_{H_\varepsilon} \leq C \|A_\varepsilon u\|_{F_\varepsilon} \quad \forall u \in H_\varepsilon.$$

Alors  $A$  est bijectif et la condition  $A_\varepsilon u_\varepsilon \hookrightarrow Au (F_\varepsilon, F, P)$  implique  $u_\varepsilon \hookrightarrow u (H_\varepsilon, H, Q)$ .

De nombreuses applications de ce théorème à des problèmes de perturbations singulières ont été données dans [H2] [H3]. Dans toutes ces applications la vérification de l'hypothèse H2 est pratiquement triviale.

Espaces  $\mathcal{H}_\varepsilon^s$ ,  $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ . [F1].

On pose

$$(2.4) \quad \mathcal{H}_\varepsilon^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ H^{s_1+s_2}(\mathbb{R}^n) \text{ muni de la norme} \right. \\ \left. \|u\|_{\varepsilon, \mathbb{R}^n}^s = \left\| \langle \xi \rangle^{s_1} \langle \varepsilon \xi \rangle^{s_2} \hat{u} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right\}$$

(où, pour  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $\langle \xi \rangle = (1+|\xi|^2)^{1/2}$ ), et, lorsque  $\Omega$  est un ouvert régulier de  $\mathbb{R}^n$

$$(2.5) \quad \mathcal{H}_\varepsilon^s(\Omega) = \left\{ H^{s_1+s_2}(\Omega) \text{ muni de la norme} \right. \\ \left. \|u\|_{\varepsilon, \Omega}^s = \inf_{\ell} \left\| \langle \xi \rangle^{s_1} \langle \varepsilon \xi \rangle^{s_2} \hat{\ell u} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right\}$$

l'infimum étant pris sur tous les prolongements possibles  $\ell u \in H^{s_1+s_2}(\mathbb{R}^n)$  de  $u$  (pour toute distribution tempérée  $T$ ,  $\hat{T}$  désigne sa transformée de Fourier [Sc1]). Lorsque le bord  $\partial\Omega$  de  $\Omega$  est une variété compacte on définit  $\mathcal{H}_\varepsilon^s(\partial\Omega)$  de manière usuelle, à l'aide de cartes locales.

On a le

Théorème 2.2 :  $X$  désigne soit  $\mathbb{R}^n$ , soit un ouvert régulier de  $\mathbb{R}^n$ , soit la frontière d'un ouvert régulier borné. Soit  $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$ . Pour  $u \in H^{s_1}(X)$ , on pose

1°) lorsque  $s_2 \geq 0$  :

$$(2.6) \quad Q_X^s(u) = \{(u_\varepsilon) \in \prod \mathcal{H}_\varepsilon^s(X) ; \forall \delta > 0, \\ \exists \varphi \in H^{s_1+s_2}(X) \text{ et } \varepsilon_0 > 0 \text{ tels que } \|u-\varphi\|_X^{s_1} \leq \delta \\ \text{et } \|u_\varepsilon - \varphi\|_{\varepsilon, X}^s \leq \delta \text{ pour } \varepsilon \leq \varepsilon_0\}$$

( $\|\cdot\|_X^{s_1}$  désigne la norme dans l'espace de Sobolev usuel  $H^{s_1}(X)$ ).

2°) lorsque  $s_2 < 0$  :

$$(2.7) \quad Q_X^s(u) = \{(u_\varepsilon) \in \prod \mathcal{H}_\varepsilon^s(X), \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon - u\|_{\varepsilon, X}^s = 0\}.$$

Alors  $\mathcal{A}(H^{s_1}(X), \prod \mathcal{H}_\varepsilon^s(X), Q_X^s)$  est une approximation propre de  $H^{s_1}(X)$ .

De plus, lorsque  $s_2 \geq 0$ , la condition  $u_\varepsilon \hookrightarrow u$  ( $\mathcal{H}_\varepsilon^s(X), H^{s_1}(X), Q_X^s$ ) implique  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon - u\|_X^{s_1} = 0$ .

Application.

Exemple 2.3 : On considère le problème de perturbations singulières elliptique et coercif [Fl], relatif à l'opérateur  $Q(x, \varepsilon, D)$  d'ordre  $2(r_1+r_2)$  avec  $r_1 \geq 0$  et  $r_2 > 0$  :

$$(2.8) \quad \begin{cases} Q(x, \varepsilon, D)u_\varepsilon = f \text{ dans } \Omega \\ \pi_0 B_j(x, \varepsilon, D)u_\varepsilon = g_j \text{ sur } \partial\Omega, 1 \leq j \leq r_1+r_2, \end{cases}$$

où  $B_j$  est d'ordre  $m_j + p_j$  avec  $m_1 \leq \dots \leq m_{r_1} < m_{r_1+1} \leq \dots \leq m_{r_1+r_2}$  et où  $\pi_0$  est l'opérateur de restriction à  $\partial\Omega$ , et le problème limite

$$(2.9) \quad \begin{cases} Q(x, 0, D)w = f \text{ dans } \Omega \\ \pi_0 B_j(x, 0, D)w = g_j \text{ sur } \partial\Omega, 1 \leq j \leq r_1 \end{cases}$$

où  $Q(x,0,D)$  est d'ordre  $2r_1$  et  $B_j(x,0,D)$  d'ordre  $m_j$ .

On pose  $\nu = (2r_1, 2r_2)$ . Soit  $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2$  avec  $s_2 \geq r_2$ ,

$$m_{r_1} + \frac{1}{2} < s_1 < m_{r_1+1} + \frac{1}{2} \text{ et } s_1 + s_2 \geq \max_{1 \leq j \leq r_1+r_2} \{m_j + p_j\} + \frac{1}{2}.$$

Lorsque les problèmes (2.8) et (2.9) admettent une solution unique, la solution  $u_\varepsilon$  de (2.8) satisfait à l'inégalité

$$(2.10) \quad \|u_\varepsilon\|_{\varepsilon, \Omega}^s \leq C \left\{ \|f\|_{\varepsilon, \Omega}^{s-\nu} + \sum_{j=1}^{r_1} \|g_j\|_{\varepsilon, \partial\Omega}^{\tau_j} + \sum_{j=r_1+1}^{r_1+r_2} \varepsilon^{\alpha_j} \|g_j\|_{\varepsilon, \partial\Omega}^{\sigma_j} \right\}$$

avec  $\tau_j = (s_1 - m_j - \frac{1}{2}, s_2 - p_j)$ ,  $\sigma_j = (0, s_1 + s_2 - m_j - p_j - \frac{1}{2})$ ,

$$\alpha_j = -s_1 + m_j + \frac{1}{2} > 0 \text{ pour } j \geq r_1 + 1.$$

On peut alors appliquer le théorème 2.1 en associant à ces problèmes les espaces :

$$F_\varepsilon = \mathcal{H}_\varepsilon^{s-\nu}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{r_1} \mathcal{H}_\varepsilon^{\tau_j}(\partial\Omega) \times \prod_{j=r_1+1}^{r_1+r_2} \mathcal{H}_\varepsilon^{\sigma_j}(\partial\Omega)$$

$$F = H^{s_1-\nu_1}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{r_1} H^{s_1-m_j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$$

les opérateurs  $A_\varepsilon$  et  $A$  définis par

$$A_\varepsilon u = \left( Q(x, \varepsilon, D)u, \prod_{j=1}^{r_1} \pi_o B_j(x, \varepsilon, D)u, \prod_{j=r_1+1}^{r_1+r_2} \varepsilon^{\alpha_j} \pi_o B_j(x, \varepsilon, D)u \right)$$

$$Au = \left( Q(x, 0, D)u, \prod_{j=1}^{r_1} \pi_o B_j(x, 0, D)u \right)$$

et l'approximation propre  $\mathcal{A}(F, \Pi F_\varepsilon, R)$  définie pour  $u = (u_o, \prod_1^{r_1} u_j) \in F$  par

$$R(u) = \left( Q_\Omega^{s-\nu} u_o, \prod_1^{r_1} Q_{\partial\Omega}^{\tau_j} u_j, 0 \right).$$

L'hypothèse H2 est équivalente à la condition suivante, facilement vérifiable



$$(2.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \text{ , on a} \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|Q(x, \varepsilon, D)\varphi - Q(x, 0, D)\varphi\|_{\varepsilon, \Omega}^{s-\nu} = 0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|B_j(x, \varepsilon, D)\varphi - B_j(x, 0, D)\varphi\|_{\varepsilon, \partial\Omega}^{\tau_j} = 0 \quad 1 \leq j \leq r_1 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varepsilon^{\alpha_j} B_j(x, \varepsilon, D)\varphi\|_{\varepsilon, \partial\Omega}^{\sigma_j} = 0 \quad r_1 + 1 \leq j \leq r_1 + r_2 \end{array} \right.$$

Par suite  $u_\varepsilon$  converge vers  $w$  dans  $H^{s_1}(\Omega)$ .

Remarque : Dans le cas particulier où

$$Q(x, \varepsilon, D) = \varepsilon^{2r_2} R(x, D) + Q(x, 0, D)$$

$$\text{et} \quad B_j(x, \varepsilon, D) = B_j(x, D) \quad 1 \leq j \leq r_1 + r_2$$

les conditions (2.11) sont trivialement vérifiées puisque l'on a

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varepsilon^{2r_2} R(x, D)\varphi\|_{\varepsilon, \Omega}^{s-\nu} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2r_2} \|R(x, D)\varphi\|_{\Omega}^{s_1-\nu_1} = 0$$

et, pour  $r_1 + 1 \leq j \leq r_1 + r_2$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varepsilon^{\alpha_j} B_j(x, D)\varphi\|_{\varepsilon, \partial\Omega}^{\sigma_j} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{\alpha_j} \|B_j(x, D)\varphi\|_{\partial\Omega}^0 = 0.$$

La démonstration du théorème 2.2 et d'autres applications seront données dans [H4].

### § 3.- STABILITE INVERSE D'UNE FAMILLE D'OPERATEURS SATISFAISANT A UNE INEGALITE DU TYPE (1.4) ET APPLICATIONS.

Soient  $G$  et  $E$  des espaces normés,  $H$  un espace de Banach réflexif tels que  $G \subset H \subset E$  avec injections continues. Pour  $\varepsilon > 0$ , on désigne par  $H_\varepsilon$  l'espace  $G$  muni d'une norme  $\|\cdot\|_\varepsilon$  dépendant de  $\varepsilon$ . Soient, pour  $\varepsilon > 0$ ,  $F_\varepsilon$  un espace normé et  $A_\varepsilon$  une application linéaire de  $H_\varepsilon$  dans  $F_\varepsilon$ . En utilisant un argument de compacité on montre facilement, (cf. [H4]), le

Lemme 3.1 : On fait les hypothèses suivantes :

h1 : L'injection de  $H$  dans  $E$  est compacte.

h2 : Il existe une constante  $C > 0$  telle que l'on ait

$$(3.1) \quad \|u\|_H \leq C \|u\|_E$$

pour tout  $u \in G$  et tout  $\varepsilon > 0$ .

h3 : Il existe une constante  $C > 0$  telle que l'on ait

$$(3.2) \quad \|u\|_{H_\varepsilon} \leq C \{ \|A_\varepsilon u\|_{F_\varepsilon} + \|u\|_E \}$$

pour tout  $u \in G$  et tout  $\varepsilon$  assez petit.

h4 : Les conditions  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ ,  $u_n \in G$  converge faiblement vers  $u_0$  dans  $H$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_{\varepsilon_n} u_n\|_{F_{\varepsilon_n}} = 0$  impliquent  $u_0 = 0$ .

Alors la famille  $A_\varepsilon$  est inversement stable.

Applications à des problèmes différentiels dans des espaces de type  $L_p$ ,  
 $1 < p < \infty$ .

Exemple 3.1. Problème de Dirichlet : Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^n$ . Pour  $s \in \mathbb{R}$ ,  $W_p^s(\Omega)$ ,  $\overset{\circ}{W}_p^s(\Omega)$  sont les espaces de Sobolev usuels. Pour  $p$  fixé, lorsqu'aucune confusion n'est possible, on note  $\|\cdot\|_s$  la norme dans  $W_p^s(\Omega)$ . Soient  $A$  et  $B$  des opérateurs différentiels linéaires, fortement elliptiques à coefficients réguliers, d'ordre  $2m$  et  $2m'$  avec  $m > m' \geq 0$ . On pose  $A_\varepsilon = \varepsilon A + B$  et on suppose que, pour  $f \in W_p^{-m'}(\Omega)$ , les problèmes de Dirichlet

$$(3.3) \quad u_\varepsilon \in \overset{\circ}{W}_p^m(\Omega) \quad A_\varepsilon u_\varepsilon = f$$

et

$$(3.4) \quad w \in \overset{\circ}{W}_p^{m'}(\Omega) \quad Bw = f$$

admettent une solution unique. Dans [N1], B. Najman a montré qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que l'on ait

$$(3.5) \quad \|u\|_{m'} \leq C \{ \|A_\varepsilon u\|_{-m'} + \|u\|_0 \}$$

pour tout  $u \in \overset{\circ}{W}_p^m(\Omega) \cap W_p^{2m-m'}(\Omega) = G$  et tout  $\varepsilon > 0$  assez petit. De plus, l'hypothèse h4 est trivialement vérifiée lorsqu'on prend  $H_\varepsilon = G$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{m'}$ ,  $H = \overset{\circ}{W}_p^{m'}(\Omega)$ ,  $F_\varepsilon = W_p^{-m'}(\Omega)$  et  $E = L_p(\Omega)$ . En utilisant le lemme 3.1, on obtient donc, pour la solution de (3.3), l'estimation

$$(3.6) \quad \|u_\varepsilon\|_{m'} \leq C \|A_\varepsilon u_\varepsilon\|_{-m'}.$$

Grâce à (3.6), on peut alors, comme dans le cas  $p = 2$ , montrer que  $u_\varepsilon$  converge vers  $w$  dans  $\overset{\circ}{W}_p^{m'}(\Omega)$  et préciser la rapidité de convergence par interpolation (cf. [H5]), faire apparaître une couche limite à la frontière en améliorant la convergence à l'intérieur de  $\Omega$  (cf. [H6]), construire des correcteurs comme dans [L1], etc...

Notons que des estimations a priori, pour la solution de (3.3), dans des normes dépendant de  $\varepsilon$ , ont été obtenues dans [Gul].

Exemple 3.2. Conditions aux limites générales : On remplace maintenant, dans les problèmes (3.3) et (3.4) les conditions de Dirichlet par des conditions aux limites générales.

Le cas où  $m' = 0$ ,  $B = I$  a été élucidé dans [H7] en utilisant les estimations établies par S. Agmon [Agl] pour la résolvante associée au problème (3.3). C'est ce lien entre les problèmes de perturbation singulière et l'étude des résolvantes associées qui a été exploité par G. Grubb [Gr1], lorsque  $p = 2$ .

Lorsque  $m' \neq 0$ , l'hypothèse h4 du lemme 3.1 est encore satisfaite en posant  $F_\varepsilon = E = L_p(\Omega)$  et en choisissant convenablement  $G, H_\varepsilon, H$  (cf. [H1] et [H4]). Mais dans ce cas, des estimations a priori du type (3.2) ne sont pas connues.

D'autres applications du lemme 3.1 seront données dans [H4].

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [Agl] S. AGMON : On the eigenfunctions and the eigenvalues of general boundary value problems ;  
Comm. Pure App. Math. 15, 1962, 119-147.
- [Au1] J.P. AUBIN : Approximations des espaces de distributions et des opérateurs différentiels ;  
Bull. Soc. Mat. France 12, 1967, 1-139.
- [F1] L.S. FRANK : Coercive singular perturbations I : a priori estimates ;  
Ann. Mat. Pura Appl. 119, 1979, 41-113.

- [FW1] L.S. FRANK and W.D. WENDT : Coercive singular perturbations II : reduction to regular perturbations and applications ;  
Comm. Partial. Diff. Equ. 7, 1982, 469-535.
- [FW2] L.S. FRANK and W.D. WENDT : Coercive singular perturbations III : Wiener-Hopf operators ;  
Jour. Anal. Math. 43, 1984, 88-135.
- [Gr1] G. GRUBB : Une méthode pseudo-différentielle pour les perturbations singulières elliptiques ;  
Compt. Rend. Acad. Sc. Paris 301, 1985, 427-430 et exposé aux Journées de Saint Jean de Monts 1986.
- [Gu2] M. GUEUGNON : Perturbations singulières dans les espaces  $L_p$  ;  
Compt. Rend. Acad. Sc. 301, 1985, 555-558.
- [H1] D. HUET : Convergence propre et perturbations singulières coercives ;  
Compt. Rend. Acad. Sc. Paris 301, 1985, 435-437 et  
Stabilité inverse d'une famille d'opérateurs dépendant d'un paramètre ;  
Compt. Rend. Acad. Sc. Paris 301, 1985, 675-677.
- [H2] D. HUET : Perturbations singulières de problèmes elliptiques ;  
Lect. Notes in Math., Springer Verlag 594, 1977, 288-300.
- [H3] D. HUET : Analytical and numerical approaches to asymptotic problems in analysis ;  
O. Axelsson, L.S. Frank, A. van der Sluis (eds), North-Holland, 1981, 87-98.
- [H4] D. HUET : A paraître.
- [H5] D. HUET : Décomposition spectrale et opérateurs ;  
Presses Universitaires de France, Paris, 1977.
- [H6] D. HUET ; Singular perturbations of elliptic problems.  
Ann. di Mat. 95, 1973, 77-114.
- [H7] D. HUET : Perturbations singulières dans les espaces  $L_p$  ;  
Rev. Faculdade Cienc. Liboa 11, 1965, 137-164 et  
Boll. Un. Mat. Ital. 21, 1966, 219-227.
- [L1] J.L. LIONS : Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal ;  
Lect. Notes in Math., Springer Verlag 323, 1973.
- [N1] B. NAJMAN : Singular perturbations in  $L_p$  ;  
A paraître dans Glas. Mat. Ser. III, Zagreb.
- [Sc1] L. SCHWARTZ : Théorie des distributions ;  
Hermann, Paris, 1966.
- [St1] F. STUMMEL : Diskrete konvergenz linearer operatoren ;  
Math. Ann. 190, 1970, 45-92.
- [St2] F. STUMMEL : Conference on the theory of ordinary and partial differential equations ;  
Lect. Notes in Math., Springer Verlag 280, 1972, 155-181.