

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

MONIQUE DAUGE

DIDIER ROBERT

**Formule de Weyl pour une classe d'opérateurs pseudodifférentiels  
d'ordre négatif sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1986), p. 1-10

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1986\\_\\_\\_\\_A4\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1986____A4_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

FORMULE DE WEYL POUR UNE CLASSE  
D'OPERATEURS PSEUDODIFFERENTIELS  
D'ORDRE NEGATIF SUR  $L^2(\mathbb{R}^n)$

par

Monique DAUGE et Didier ROBERT

§1 Introduction

Il s'agit de déterminer l'asymptotique de la fonction de comptage des valeurs propres d'opérateurs pseudo-différentiels compacts auto-adjoints sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Les résultats correspondants sont bien connus pour une classe d'opérateurs à résolvante compacte ([TU-SU], [RO], [HO2], [HE-RO2]). Cette classe vérifie des conditions d'hypoellipticité globale qui impliquent en particulier que les opérateurs sont semi-bornés, donc, n'ont qu'un nombre fini de valeurs propres négatives. En inversant ce genre d'opérateur, on obtient des opérateurs compacts d'un type particulier, à symbole positif à l'infini.

Ici, au contraire, nous nous intéressons à des opérateurs dont le symbole peut changer de signe à l'infini, et ainsi, admettent éventuellement une infinité de valeurs propres négatives, ou positives. Dans cette voie, nous améliorons d'une certaine façon les résultats de [BI-SO].

Ces auteurs considèrent une classe d'opérateurs à symboles  $a(x, \xi)$  homogènes (ou quasi-homogènes) d'ordre  $\sigma < 0$  en variable de fréquence  $\xi$ , peu réguliers en variable d'espace  $x \in \mathbb{R}^n$ , mais plus décroissants en  $x$  (on va préciser plus loin). L'opérateur  $A = Op a$  admet une suite décroissante de valeurs propres positives  $\lambda_j^+(A)$  et une suite croissante de valeurs propres négatives  $\lambda_j^-(A)$ , qui, toutes deux, tendent vers 0. Il y a donc, en fait, deux fonctions de comptage, pour  $\lambda > 0$  :

$$N_{\pm}(\lambda ; A) = \# \{j / \pm \lambda_j^{\pm}(A) \geq \lambda\}$$

[BI-SO] obtient l'équivalent :

$$(1.1) \quad N_{\pm}(\lambda ; A) \sim \lambda^{n/\sigma} \gamma_{\pm}(a)$$

où

$$(1.2) \quad \gamma_{\pm} = \frac{(2\pi)^{-n}}{n} \int_{\mathbb{R}^n \times S^{n-1}} (a^{\pm}(x, \xi))^{-n/\sigma} dx d\xi$$

Dans ce travail, nous élargissons le cadre de [BI-SO] (nous ne supposons plus l'homogénéité) et nous démontrons une estimation avec reste.

§2 Résultats

Nous utilisons le formalisme de [BE] et [HO1]. Les classes de symboles sont définies à l'aide de fonctions poids  $\phi, \varphi, m : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow ]0, +\infty[$ . Nous rappelons les définitions suivantes :

(2.1)  $m$  est dite  $(\phi, \varphi)$ -continue si  $\exists C_0, C_1, C'_1 > 0$  tels que :

$$|y| \phi(x, \xi) + |\eta| \varphi(x, \xi) \leq C_0 \phi(x, \xi)$$

entraîne :  $C'_1 m(x, \xi) \leq m(x+y, \xi+\eta) \leq C_1 m(x, \xi)$

(2.2)  $m$  est dite  $(\phi, \varphi)$ -tempérée si, de plus,  $\exists C, M > 0$  :

$$m(x+y, \xi+\eta) \leq C m(x, \xi) (1+|y| \phi(x, \xi) + |\eta| \varphi(x, \xi))^M$$

La classe de symboles  $S(m ; \phi, \varphi)$  est définie par :  $a \in S(m ; \phi, \varphi)$  si pour tous multi-indices  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  :

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a| \leq C_{\alpha\beta} m \phi^{-|\alpha|} \varphi^{-|\beta|}$$

Nous faisons les hypothèses suivantes :

- (H)  $\left\{ \begin{array}{l} \phi^{-1}, \varphi^{-1} \text{ sont bornés, } (\phi, \varphi)\text{-continus, et } (1,1)\text{-tempérés} \\ \exists \varepsilon_0 > 0, C > 0 : (1+|x|+|\xi|)^{\varepsilon_0} \leq C(\phi\varphi)(x, \xi) \end{array} \right.$
- (P)  $m$  est  $(\phi, \varphi)$ -tempéré et  $m \in S(m ; \phi, \varphi)$
- (N)  $\exists K, K' > 0, \gamma, \gamma' > 0 \quad K' m^{\gamma'} < (\phi\varphi)^{-1} < K m^\gamma$

Enfin, soit  $a \in S(m ; \phi, \varphi)$  un symbole réel. (H) et (N) impliquent que  $a$  est " d'ordre négatif ".  $a$  n'est pas assujéti à la condition de positivité (P) et peut donc changer de signe. Soit :

$$A = \text{Op}^W a \quad (\text{quantification de Weyl})$$

i.e :

$$Au(x) = \int e^{i\langle x-y, \xi \rangle} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi$$

$A$  est compact auto-adjoint sur  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .  $\lambda_\pm(A)$  et  $N_\pm(\lambda ; A)$  sont définis comme au §1.

La formule de Weyl classique établit un lien entre  $N(\lambda)$  et la fonction de volume du symbole. Ici, nous introduisons deux fonctions de volume :

$$V_\pm(\lambda ; a) = \int_{\pm a \geq \lambda} dx d\xi, \quad \lambda > 0.$$

Pour ces fonctions, nous avons besoin du contrôle suivant de la dérivée : soit  $f$  une fonction décroissante :  $]0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$  ; on dit que  $f$  vérifie la propriété (T) s'il existe  $\lambda_0, \gamma_1, \gamma_2 > 0$  tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est dérivable sur } ]0, \lambda_0] \\ \gamma_1 f(\lambda) \leq -\lambda f'(\lambda) \leq \gamma_2 f(\lambda) \end{array} \right.$$

(2.3) Théorème

Sous les hypothèses (H), (P) et (N), soit  $a \in S(m ; \phi, \varphi)$  un symbole réel et  $A = \text{Op}^W a$ . On suppose de plus que les fonctions  $V_+(\bullet ; m)$ ,  $V_+(\bullet ; a)$  et  $V_-(\bullet ; a)$  vérifient (T). Alors, il existe  $\zeta > 0$  tel que :

(1)  $N_+(\lambda ; A) = V_+(\lambda ; a) + O(\lambda^\zeta V(\lambda ; m))$ , quand  $\lambda \rightarrow 0_+$   
 (2) Si, de plus,  $V_+(\lambda ; m) = O(V_+(\lambda ; a))$ , alors :

(2.4)  $N_+(\lambda ; A) = V_+(\lambda ; a) (1+O(\lambda^\zeta))$ ,  $\lambda \rightarrow 0_+$

et :  $\lambda_j^+(A) = \Lambda^+(j ; a) (1+O(j^{-\zeta}))$ ,  $j \rightarrow +\infty$

où  $\Lambda^+(t ; a)$  est la fonction inverse de  $V_+(\cdot ; a)$ , qui est bien définie pour  $t$  assez grand.

Nous avons les énoncés correspondants pour  $N_-$  et  $V_-$ .

(2.5) Remarques

(1) Une condition du type (T) sur les volumes se retrouve dans [TU-SU].

(2) Si  $a = a_0 + a_1$  avec  $a_1 \in S(m(\phi\varphi)^{-\epsilon} ; \phi, \varphi)$  et  $\epsilon > 0$ ,  $V_\pm(\lambda ; a)$  peut être remplacé par  $V_\pm(\lambda ; a_0)$ .

§3 Exemples

Les fonctions de volume définies par des symboles homogènes ou quasi-homogènes, soit par rapport à toutes les variables, soit par rapport à un groupe de variables donnant le comportement dominant, vérifient la condition (T).

3.A : Homogénéité dominante.

$a = a_0 + a_1$  où  $a_0$  est homogène en  $\xi$  de degré  $\sigma < 0$ , pour  $|\xi| \geq 1/2$  et il existe  $s < \sigma$  tel que :

(i)  $\partial_x^\alpha a_0(x, \xi) \leq C_\alpha (1+|x|)^{s-|\alpha|}$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n, x \in \mathbb{R}^n, |\xi|=1$

(ii)  $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a_1(x, \xi) \leq C_{\alpha, \beta} (1+|x|)^{s-|\alpha|} (1+|\xi|)^{s-|\beta|}$ ,  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ .

Nous pouvons appliquer le théorème (2.3) avec

$\phi(x, \xi) = (1+|\xi|)$ ,  $\varphi(x, \xi) = (1+|x|)$ ,  $m(x, \xi) = (1+|x|^2)^{s/2} (1+|\xi|^2)^{\sigma/2}$ .

$\gamma_\pm(a_0)$  étant défini comme en (1.2), nous obtenons une amélioration de (1.1) :

(3.1)  $N_\pm(\lambda ; A) = \lambda^{n/\sigma} [\gamma_\pm(a_0) + O(\lambda^\zeta)]$ ,  $\lambda \rightarrow 0_+$

Notons que la condition (i) sur  $a_0$ , avec  $s < \sigma$ , assure l'intégrabilité en  $x$  de  $(a_0^\pm(x, \xi))^{-n/\sigma}$ .

D'autre part, les conditions de décroissance en  $x$  imposées par [BI-SO] sont plus fortes que les nôtres:

si  $\sigma \leq -n$ ,  $s = -\infty$

si  $\sigma > -n/2$ ,  $s < -n/2$

3.B : Deux homogénéités égales

$a(x, \xi) = b(x) c(\xi)$  où  $b$  et  $c$  sont homogènes de degré  $\sigma < 0$  en dehors de la boule de rayon  $1/2$ . Nous obtenons :

$$(3.2) \quad N_{\pm}(\lambda ; A) = \lambda^{n/\sigma} [\gamma_{\pm}(b,c) \text{Log} \frac{1}{\lambda} + \delta_{\pm}(b,c) + o(\lambda^{\zeta})]$$

où :

$$\gamma_{\pm}(b,c) = \frac{(2\pi)^{-n}}{n|\sigma|} \int_{S^{n-1}} b^{\pm}(\tilde{x})^{-n/\sigma} d\tilde{x} \int_{S^{n-1}} c^{\pm}(\tilde{\xi})^{-n/\sigma} d\tilde{\xi}$$

et  $\delta_{\pm}(b,c)$  se calcule aussi explicitement en fonction de b et c. Notons que a ne peut pas se ramener au cas d'une fonction homogène en  $(x, \xi)$  de degré  $2\sigma$  en dehors d'un voisinage de 0.

### 3.C : Homogénéité globale

$\omega = (x, \xi)$  : pour  $|\omega| \geq 1/2$ ,  $a(\omega) = |\omega|^{2\sigma} a(\omega/|\omega|)$ . Alors :

$$(3.3) \quad N_{\pm}(\lambda ; A) = \lambda^{n/\sigma} (\gamma_{\pm} + o(\lambda^{\zeta}))$$

où :

$$\gamma_{\pm} = \frac{(2\pi)^{-n}}{2n} \int_{S^{2n-1}} a^{\pm}(\tilde{\omega})^{-n/\sigma} d\tilde{\omega}$$

Dans (3.3), il n'apparaît pas de terme logarithmique.

(3.2) et (3.3) n'entrent pas dans le cadre de [BI-SO].

### 3.D : Eventuellement non homogène

La condition (T) sera vérifiée pour  $V_{\pm}(\bullet, a)$  avec  $a \in S(m ; \phi, \varphi)$  s'il existe un champ de vecteurs X sur  $\mathbb{R}^{2n}$  tel que :

$$\begin{aligned} \exists \eta_1, \eta_2 > 0 \quad \eta_1 a \leq \langle X, \nabla a \rangle \leq \eta_2 a & \quad \text{sur } \mathbb{R}^{2n} \\ \exists \delta_2, \delta_2 > 0 \quad \delta_1 \leq -\text{div} X \leq \delta_2 & \quad \text{sur } \mathbb{R}^{2n}. \end{aligned}$$

## §4 Applications et extensions

### 4.A : Schrödinger

Notre résultat s'applique à des opérateurs A provenant d'opérateurs de Schrödinger (principe de Birman-Schwinger).

$$A = (-\Delta + E)^{\sigma/2} V(-\Delta + E)^{\sigma/2}$$

avec  $E > 0$ ,  $\sigma < 0$  et V tel que, avec  $s < 0$  :

$$|\partial^{\alpha} V(x)| \leq C_{\alpha} (1+|x|)^{2s-|\alpha|}$$

Si  $s < \sigma$ , cela entre dans le cadre du 3.A. Si  $s > \sigma$ , selon 3.D, on fait l'hypothèse supplémentaire qu'il existe  $C, C' > 0, k_1, \dots, k_n > 0$  et  $R > 0$  tels que :

$$C' V(x) \leq - \sum_{i=1}^n k_i x_i \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) \leq C V(x) \quad \text{pour } |x| \geq R$$

Cela permet de déterminer l'asymptotique des solutions g du problème, à  $E > 0$  fixé :

$$(\Delta + gV)\Psi = E\Psi, \quad \Psi \neq 0 \quad \text{et} \quad \Psi \in D(\Delta) \cap D(V)$$

dont on démontre qu'il y a deux suites de solutions  $g_j^{\pm}(E)$  positive et négative, chacune étant soit finie, soit non bornée.

4.B : Equation  $L\Psi = \lambda B\Psi$

où, grosso modo,  $L = \text{Op}^W \ell$  et  $B = \text{Op}^W b$  avec  $L$  positif inversible et  $a = b/\ell$  vérifie les hypothèses du théorème (2.3). On obtient alors l'asymptotique des "valeurs propres"  $\lambda$ , qui forment deux suites, chacune étant finie ou non bornée, grâce à l'étude du problème équivalent :

$$C \circ B \circ C \Psi = \frac{1}{\lambda} \Psi \quad \text{avec } C = L^{-1/2} .$$

4.C : Extension

Notre résultat s'étend à des opérateurs pseudo-différentiels sur des variétés compactes et nous permettra une étude asymptotique des décalages de phase en théorie de la diffusion.

§5 Preuve du résultat principal

Dans ce paragraphe et le suivant, nous indiquons l'enchaînement des principaux arguments aboutissant à la preuve de (2.3).

La première idée est de faire du calcul fonctionnel : comme  $N_+(\lambda ; A) = \text{Tr} \mathbf{1}_{[\lambda, +\infty[}(A)$ , on voudrait approximer  $\mathbf{1}_{[\lambda, +\infty[}$  par des fonctions régulières s'approchant de plus en plus de la fonction caractéristique quand  $\lambda \rightarrow 0$ . Mais, ainsi, les dérivées de telles fonctions sont des puissances négatives de  $\lambda$  et cela aboutit à des estimations pour le reste que nous ne savons pas utiliser. Par contre ce processus fonctionne bien pour des opérateurs pseudo-différentiels hypoelliptiques (voir §6), ce qui permet d'aboutir, par inversion, à l'estimation suivante, du type de Hörmander, pour un inverse d'opérateur "globalement hypoelliptique" .

(5.1) Proposition

Soit  $b$  un poids vérifiant (P) et (N) ; nous avons en particulier :

$$(\phi\varphi)^{-1} \leq K(b) b^\gamma$$

et il existe  $b_1 \in S(m(\phi\varphi)^{-1} ; \phi, \varphi)$  tel que  $B_0 := \text{Op}^W(b+b_1)$  soit positif. Alors, pour  $0 < \theta < \gamma/2$  et  $\lambda \leq 1/2$ , nous avons :

$$|N_+(\lambda ; B_0) - V_+(\lambda ; b)| \leq (2+C_1 \lambda^\theta) [V(\lambda-\lambda^{1+\theta} ; b) - V(\lambda+\lambda^{1+\theta} ; b)] + C_2$$

où  $C_1$  et  $C_2$  ne dépendent que de  $K(b)$  et d'un nombre fini de semi-normes de  $b$  et  $b_1$  dans leurs espaces de symboles (la dépendance est polynômiale).

La deuxième idée est de se ramener à ce cas à l'aide d'une régularisation hypoelliptique (s'inspirant en cela d'une remarque de G. Grubb dans [GR]).

Etudions le cas de  $N_+(\lambda ; A)$ . Soit  $\chi$  une fonction  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ ,  $\chi(\lambda) = 0$  si  $\lambda \leq 1$  et  $\chi(\lambda) = 1$  si  $\lambda \geq 2$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , posons :

$$a_\varepsilon = a \chi(a/\varepsilon m) + \varepsilon m [1 - \chi(a/\varepsilon m)].$$

Ainsi :

$$(5.2) \quad a_\varepsilon \geq \varepsilon m \text{ et } a_\varepsilon \in S(m; \phi, \varphi)$$

(5.1) pourra donc s'appliquer à  $a_\varepsilon$ . D'autre part :

$$(5.3) \quad a_\varepsilon = a \text{ dans la région } \{a \geq 2 \varepsilon m\}$$

$$(5.4) \quad a \leq a_\varepsilon + \varepsilon m.$$

Donc  $(a_\varepsilon)$  est une bonne approximation de  $a$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  dans la zone où  $a$  est positif. Par contre, dans la zone où  $a$  est négatif, on s'écarte beaucoup. Ainsi, on va tirer de cette approximation :

$$(5.5) \quad N_+(\lambda; A) \leq V_+(\lambda; a) + O(\lambda^\zeta V_+(\lambda; m))$$

et non l'inégalité inverse. Comme on obtient de même l'inégalité (5.5) pour  $N_-$  et  $V_-$ , il suffit, pour compléter la preuve de (2.3) de prouver l'inégalité inverse pour les sommes  $N_+ + N_-$ ,  $V_+ + V_-$  :

$$(5.6) \quad (V_+ + V_-)(\lambda; a) \leq (N_+ + N_-)(\lambda; A) + O(\lambda^\zeta V_+(\lambda; m))$$

L'avantage est que, dans (5.6), tout se passe comme si on avait affaire à un opérateur positif : la régularisation approxime l'opérateur partout et un raisonnement analogue à celui fait pour (5.5) permet d'aboutir à (5.6). Indiquons donc la manière de déduire (5.5) de (5.1).

Comme  $a_\varepsilon \geq \varepsilon m > 0$ ,  $\sqrt{a_\varepsilon} \in S(\sqrt{m}; \phi, \varphi)$  et il existe  $d_{1,\varepsilon} \in S(m(\phi\varphi)^{-1}; \phi, \varphi)$  tel que :

$$\text{Op}^W a_\varepsilon + \text{Op}^W d_{1,\varepsilon} = (\text{Op}^W \sqrt{a_\varepsilon})^2 > 0.$$

Ainsi, en notant  $b_\varepsilon = a_\varepsilon + d_{1,\varepsilon}$ ,  $B_\varepsilon := \text{Op}^W b_\varepsilon$  est positif et a pour " symbole principal "  $a_\varepsilon$ . On peut lui appliquer (5.1), qui donne :

$$(5.7) \quad N_+(\lambda; B_\varepsilon) \leq V(\lambda; a_\varepsilon) + (2+C_1(\varepsilon)\lambda^\theta) [V(\lambda-\lambda^{1+\theta}; a_\varepsilon) - V(\lambda+\lambda^{1+\theta}; a_\varepsilon)] + C_2(\varepsilon)$$

où les  $C_j(\varepsilon)$  ont un comportement polynômial en  $\varepsilon^{-1}$ .

Il faut relier  $V_+(\lambda; a_\varepsilon)$  à  $V_+(\lambda; a)$ . Dans la zone où  $a$  est positif,  $|a-a_\varepsilon| \leq \varepsilon m$  et ailleurs,  $a_\varepsilon \leq \varepsilon m$ . C'est pourquoi on peut montrer que, pour un  $\gamma_0 > 0$  convenable :

$$|V_+(\lambda; a_\varepsilon) - V_+(\lambda; a)| \leq C \varepsilon^{\gamma_0} V_+(\lambda; m)$$

Cette inégalité permet de remplacer  $V_+(\cdot, a_\varepsilon)$  par  $V_+(\cdot, a)$  dans (5.7), avec l'erreur  $\varepsilon^{\gamma_0} V_+(\lambda; m)$ .

La propriété (T) sur  $V_+(\cdot, a)$  permet la majoration :

$$|V(\lambda-\lambda^{1+\theta}; a) - V(\lambda+\lambda^{1+\theta}; a)| \leq C \lambda^\theta V(\lambda; a) \\ \leq C \lambda^\theta V(\lambda; m)$$

De tout cela on tire que :

$$(5.8) \quad N_+(\lambda; B_\varepsilon) \leq V_+(\lambda; a) + C(1+C_1(\varepsilon)\lambda^\theta) (\varepsilon^{\gamma_0} + \lambda^\theta) \cdot V(\lambda; m) + C_2(\varepsilon)$$

Noter que l'on utilise la propriété (T) sur  $V_+(\cdot, a)$  et non sur  $V_+(\cdot, a_\varepsilon)$  (qui n'a pas de raison de la vérifier).

Maintenant, on établit que  $N_+(\lambda; A)$  est majoré par  $N_+(\lambda; B_\varepsilon)$  modulo une erreur convenable.

Grâce à (5.4), on a :

$$0 < \varepsilon m \leq a_\varepsilon + 2\varepsilon m - a,$$

d'où l'on déduit comme précédemment qu'il existe  $d_{2,\varepsilon} \in S(m(\phi\phi)^{-1}; \phi, \phi)$  tel que :

$$(5.9) \quad 0 < A_\varepsilon + 2\varepsilon M - A + D_{2,\varepsilon}$$

où les majuscules (M) désignent les opérateurs dont le symbole de Weyl est la minuscule correspondante (m).

En reprenant la définition de  $b_\varepsilon = a_\varepsilon + d_{1,\varepsilon}$  et en posant  $d_\varepsilon = d_{2,\varepsilon} - d_{1,\varepsilon}$ , (5.9) donne que :

$$A \leq B_\varepsilon + 2\varepsilon M + D_\varepsilon$$

donc :

$$(5.10) \quad N_+(\lambda; A) \leq N_+(\lambda; B_\varepsilon + 2\varepsilon M + D_\varepsilon) .$$

Pour pouvoir passer de la somme à chacun de ses composants, on utilise l'inégalité suivante, de type Weyl-Ky Fan :  $\forall \eta \in [0,1]$  :

$$(5.11) \quad N_+(\lambda; A + B) \leq N_+(\lambda \eta; A) + N_+(\lambda(1-\eta); B)$$

qui se démontre par une caractérisation du type de Ky Fan pour les valeurs propres positives d'un opérateur auto-adjoint.

Pour étudier les contributions de  $2\varepsilon M$  et  $D_\varepsilon$  (erreur) on remarque que si  $f$  vérifie la propriété (T), on obtient par intégration, pour  $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_0$  :

$$(5.12) \quad \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\gamma_1} \leq \frac{f(\lambda_1)}{f(\lambda_2)} \leq \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{\gamma_2}$$

On en déduit immédiatement que, avec (5.1) :

$$(5.13) \quad N_+(\lambda; 2\varepsilon M) \leq C \varepsilon^{\gamma_1} V(\lambda; m)$$

Grâce à l'hypothèse (N) sur  $m$ , on obtient que  $d_\varepsilon \in S(m^{1+\gamma}; \phi, \phi)$  ; on en déduit que :

$$(5.14) \quad N_+(\lambda; D_\varepsilon) \leq C'_0(\varepsilon) V_+(\lambda; m^{1+\gamma}) \leq C_0(\varepsilon) \lambda^\tau V(\lambda; m) .$$

avec  $\tau = \gamma_1 \gamma_1^{-1}$  et  $C_0(\varepsilon)$  polynômial en  $\varepsilon^{-1}$ .

De (5.13) et (5.14), avec (5.11) pour  $\eta = 1/2$ , on déduit :

$$(5.15) \quad N_+(\lambda; 2\varepsilon M + D_\varepsilon) \leq C(\varepsilon^{\gamma_1} + \lambda^\tau C_0(\varepsilon)) V(\lambda; m)$$

Or, avec (5.10) et (5.11) :

$$N_+(\lambda; A) \leq N_+(\lambda(1-\eta); B_\varepsilon) + N_+(\lambda \eta; 2\varepsilon M + D_\varepsilon).$$

On prend  $\eta = \varepsilon^\alpha$ ,  $\alpha > 0$  sera choisi ensuite. (5.15) et (5.12) donnent :

$$N_+(\lambda \eta; 2\varepsilon M + D_\varepsilon) \leq C(\varepsilon^{\gamma_1} + \lambda^\tau \varepsilon^{\alpha \tau} C_0(\varepsilon)) \varepsilon^{-\alpha \gamma_2} V(\lambda; m) .$$

On choisit  $\alpha$  tel que  $\gamma_1 - \alpha \gamma_2 \equiv \gamma_3 > 0$ . Ainsi (5.8) et les dernières inégalités donnent :

$N_+(\lambda ; A) \leq V_+(\lambda ; a) + C(\varepsilon^{\gamma_0} + \varepsilon^{\gamma_3} + C_1(\varepsilon) \lambda^\theta + C_3(\varepsilon) \lambda^\tau) \cdot V(\lambda ; m) + C_2(\varepsilon)$ .  
 Or, comme  $Km^\gamma \geq (\phi\varphi)^{-1}$ , il existe  $\tau' > 0$  tel que :

$$V(\lambda ; m) \geq C \lambda^{-\tau'} \quad (\text{avec } C > 0).$$

Donc, avec  $\omega = \inf(\theta, \tau, \tau')$ ,  $C_4 = C_1 + C_2 + C_3$  et  $\gamma_4 = \inf(\gamma_0, \gamma_3)$ , on obtient :

$$N_+(\lambda ; A) \leq V_+(\lambda ; a) + C(\varepsilon^{\gamma_4} + C_4(\varepsilon) \lambda^\omega) V(\lambda ; m)$$

Comme il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $C_4(\varepsilon) \leq \varepsilon^{-N}$  pour  $\varepsilon$  assez petit, en choisissant  $\varepsilon = \lambda^\beta$  avec  $\beta = \omega(\gamma_4 + N)^{-1}$  on obtient (5.5) avec  $\zeta = \gamma_4 \beta$ .

§6 Formule de Weyl et calcul fonctionnel pour des opérateurs hypoelliptiques.

Dans (5.1), B est l'inverse d'un opérateur  $P = Op^W p$ . A un terme d'ordre inférieur près, on se retrouve dans la situation où  $p \in S(p ; \phi, \varphi)$  et p vérifie l'inverse de la condition (N), à savoir :

$$(S) \quad \exists C, C' > 0, \exists \delta, \delta' > 0 : Cp^\delta \leq \phi\varphi \leq C' p^{\delta'}$$

On pose :

$$\begin{aligned} \tilde{N}(\lambda ; P) &= \# \{j \in \mathbb{N} / \lambda_j(P) \leq \lambda\} \\ \tilde{V}(\lambda ; p) &= \int_{p \leq \lambda} dx \, d\xi \end{aligned}$$

Nous allons voir qu'on attache au couple  $(\phi, \varphi)$  un réel  $\rho$ , qui sous l'hypothèse (H) peut être pris égal à 2, et qui, si de plus  $\phi = \varphi$ , peut être pris égal à 3/2. Ceci dit, on a :

(6.1) Théorème

$\forall \theta \in ]0, \frac{\delta}{\rho}[$ ,  $\exists C_1, C_2$  ne dépendant que d'un nombre fini de semi-normes de p tels que,  $\forall \lambda > 0$  :

$$|\tilde{N}(\lambda ; P) - \tilde{V}(\lambda ; p)| \leq (2+C_1 \lambda^{3\theta-2\delta}) [\tilde{V}(\lambda+\lambda^{1-\theta} ; p) - \tilde{V}(\lambda-\lambda^{1-\theta} ; p)] + C_2$$

Remarquons que si  $\phi = \varphi$ , nous atteignons la même limite que Hörmander [HO2] :  $\theta \leq 2\delta/3$ , sous des hypothèses qui sont à peu près celles de Tulovskii-Šubin [TU-SU] (qui arrivent à  $\theta \leq \delta/2$ ).

(6.1) se démontre en évaluant  $\text{Tr } f_{\lambda, \theta}(P)$  où  $f_{\lambda, \theta}$  vaut 1 pour  $\mu \leq \lambda - \lambda^{1-\theta}$  et 0 pour  $\mu \geq \lambda + \lambda^{1-\theta}$  ;  $f_{\lambda, \theta}$  est  $C^\infty$  et  $|(\mu \partial_\mu)^k f_{\lambda, \theta}| \leq C_k \lambda^{\theta k}$ . On suppose pour simplifier que  $f_{\lambda, \theta} = 0$  si  $\mu \leq 1$ . Nous utilisons alors le résultat suivant :

(6.2) Proposition

Soit  $f \in \mathcal{J}(\mathbb{R})$ , nulle au voisinage de 0.  $f(P)$  est un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole est approximé par  $\sum_j p_{f,j}$  où :

$$p_{f,0} = f(p), p_{f,1} = 0, p_{f,j} = \sum_{2 \leq k \leq [3j/2]} \frac{d_{jk}}{k!} f^{(k)}(p)$$

où les  $d_{jk}$  sont des fonctions polynômiales universelles de  $p$  et de ses dérivées (cf [HE-RO1]). Voici l'estimation du reste :

$\exists N_1, N_2 > 0, \forall N \geq N_1, \exists C(p, N)$  tel que avec  $K(N) := [\delta(N - N_1)]$  :

$$(6.3) \quad \|f(p) - Op^W(\sum_{j=0}^N p_{f,j})\|_{Tr} \leq C(p, N) \int_0^{+\infty} \lambda^{-K(N)-1/2} |\lambda \partial_\lambda|^{\rho N + 1 + N_2} f(\lambda) d\lambda$$

$C(p, N)$  ne dépend que d'un nombre fini de semi-normes de  $p$ .

En appliquant (6.2) quand  $f = f_{\lambda, \theta}$ , nous obtenons que :

- (i)  $p_{f,0}$  donne  $\tilde{V}(\lambda; p)$  modulo l'erreur  $W_{\lambda, \theta} = V(\lambda + \lambda^{1-\theta}; p) - V(\lambda - \lambda^{1-\theta}; p)$
- (ii) pour  $j \geq 1$ ,  $p_{f,j}$  donne une contribution majorée par  $\lambda^{(3\theta-2\delta)j/2} W_{\lambda, \theta}$ . Comme  $3\theta-2\delta < 0$ , la plus grande est pour  $j = 2$ .
- (iii) le reste à l'ordre  $N$  est un  $O(\lambda^{N(\rho\theta-\delta)+\delta_0})$ , d'où la condition  $\rho\theta < \delta$ .

(6.2) se démontre par un procédé de calcul fonctionnel utilisé dans [HE-RO1], dont les étapes sont : construction d'une paramétrix, calcul fonctionnel holomorphe : puissances complexes de l'opérateur, transformation de Mellin.

La limitation  $k \leq [3j/2]$  dans l'expression de  $p_{f,j}$  vient d'une étude affinée des  $d_{jk}$  : ce phénomène est spécifique à la quantification de Weyl - en général, on obtient  $k \leq 2j$ .

Le réel  $\rho$  apparaît dès la construction de la paramétrix, dans la composition de celle-ci avec l'opérateur  $(P-z)$  : il provient d'une estimation précisée du reste dans la formule de composition de deux opérateurs pseudo-différentiels de symboles  $a_1$  et  $a_2$  avec  $a_1 \in S(m_1; \phi, \varphi)$ . Les semi-normes du reste à l'ordre  $N$  dans l'espace  $S(m_1 m_2 (\phi\varphi)^{-N}; \phi, \varphi)$  s'estiment à l'aide des semi-normes des symboles, avec l'ordre limité à  $\rho N$  pour l'un et  $\rho' N$  pour l'autre ( $\rho' > \rho$ ).

Dans la composition de la paramétrix avec  $(P-z)$ , ce dernier ne fait rien perdre. Par contre, les semi-normes d'ordre  $\rho N$  sur la paramétrix aboutissent à la dérivée d'ordre  $\rho N$  sur  $f$  dans (6.3).

Les résultats exposés ici ont été annoncés dans la note C.R. Acad. Sc. Paris 302, Série I, (5) 175-178 (1986). Une rédaction détaillée va paraître dans les Proceedings de " Topics in pseudo-differential operators " à Oberwolfach (Lecture Notes Springer). Elle est également parue dans le Séminaire E.D.P, 1984-85 de Nantes.

## REFERENCES

- [BE] R. BEALS :  
A general calculus of pseudodifferential operators.  
Duke Math. J. 42, 1-42 (1975)
- [BI-SO] M.S. BIRMAN, M.Z. SOLOMJAK :  
Asymptotics of the spectrum of pseudodifferential operators with anisotropic-homogeneous symbols. Vestnik Leningrad Univ. Math. 10 (1982) 237-247 et 12 (1980) 155-161
- [GR] G. GRUBB :  
Singular Green operators and their spectral asymptotics. Duke Mathematical Journal 51 (3) (1984) 477-528
- [HE-RO1] B. HELFFER, D. ROBERT :  
Calcul fonctionnel par la transformation de Mellin et opérateurs admissibles. Journal of Functional Analysis 53 (3) (1983) 246-268
- [HE-RO2] B. HELFFER, D. ROBERT :  
Propriétés asymptotiques du spectre d'opérateurs pseudodifférentiels sur  $\mathbb{R}^n$ . Comm. in P.D.E 7 (7) 795-882 (1982)
- [HO1] L. HÖRMANDER :  
The Weyl Calculus of pseudodifferential operators. CPAM 32, 359-443 (1979)
- [HO2] L. HÖRMANDER :  
On the asymptotic distribution of the eigenvalues of pseudo-differential operators in  $\mathbb{R}^n$ . Arkiv för Matematik 17 (2) (1979) 297-313
- [RO] D. ROBERT :  
Propriétés spectrales d'opérateurs pseudo-différentiels. Comm. in Partial Differential Equations 3 (9) (1978) 755-826
- [TU-SU] V.N. TULOVSKIĬ, M.A. ŠUBIN :  
On asymptotic distribution of eigenvalues of pseudo-differential operators in  $\mathbb{R}^n$ . Math. USSR Sbornik 21 (4) (1973) 565-583