Journées Équations aux dérivées partielles

Claude Wagschal

Problème de Cauchy ramifié à caractéristiques tangentes

Journées Équations aux dérivées partielles (1986), p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1986____A3_0>

PROBLÈME DE CAUCHY RAMIFIÉ À CARACTÉRISTIQUES TANGENTES

Claude WAGSCHAL

Dans cet exposé, on étudie le problème de Cauchy ramifié pour des opérateurs à caractéristiques multiples lorsque les racines caractéristiques sont holomorphes. On se propose essentiellement de montrer comment le théorème de représentation intégrale de [8, théorème 1.2] peut être utilisé pour déterminer le support singulier de la solution.

1. REPRESENTATION INTEGRALE DE LA SOLUTION

On considère au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$, de coordonnées $x = (x_j)_{0 \leq j \leq n}$, un opérateur différentiel linéaire holomorphe du second ordre $a(x,D)$ de symbole principal

$$g(x,\xi) = (\xi_0 - \lambda_0(x,\xi'))(\xi_0 - \lambda_1(x,\xi'))$$

où les λ_i sont holomorphes au voisinage du point $\bar{x} = 0$, $\bar{\xi}' = (1,0,\ldots,0)$ et

$$\lambda_0(\bar{x},\bar{\xi}') = \lambda_1(\bar{x},\bar{\xi}'). \tag{1.1}$$

On considère le problème de Cauchy ramifié

$$\left\{ \begin{aligned} & a(x,D)u(x) = 0, \\ & D_0^h u(x)\big|_S = w_h(x'),\ h = 0,1, \end{aligned} \right. \tag{1.2}$$

où $S : x_0 = 0$, les fonctions w_h sont ramifiées autour de l'hyperplan

$$T : x_0 = x_1 = 0,$$

autrement dit, les fonctions w_h sont holomorphes au voisinage (relativement à S) d'un point $y \in S-T$ et se prolongent analytiquement le long de tout chemin $\gamma : I \longrightarrow \Omega-T$, $I = [0,1]$, d'origine y, Ω désignant un voisinage ouvert connexe de l'origine dans S.

On note $k_i(x)$ $(i = 0,1)$ la solution du problème de Cauchy

$$D_0 k_i(x) = \lambda_i(x, D'k_i(x)), \quad k_i(0,x') = x_1,$$

et $K_i : k_i(x) = 0$ les hypersurfaces caractéristiques issues de T.

D'après le théorème 1.2 de [2], la solution de (1.2) peut s'écrire au voisinage du point y sous la forme $u(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} I_m(x)$,

$$(1.3) \quad I_m(x) = \int_{S_m(x_0)} u_m(\varphi_m(\sigma,x),\sigma,x)\, d\sigma_1 \wedge \ldots \wedge d\sigma_m, \quad \sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m),$$

où

- $S_m(x_0)$ désigne le m-simplexe singulier de $\mathbb{C}^m$
  $S_m(x_0) : t \in \Delta_m \mapsto x_0 t \in \mathbb{C}^m$,
  $\Delta_m = \left\{ t \in \mathbb{R}^m \; ; \; 0 \le t_m \le \ldots \le t_1 \le 1 \right\}$;

- les fonctions $u_m(t,\sigma,x)$ sont holomorphes au voisinage du point $t = y_1$, $\sigma = 0$, $x = y$ et se prolongent analytiquement à $\mathcal{R}_\omega \times \Omega_r^m$ où $\mathcal{R}_\omega (\omega > 0)$ désigne le revêtement universel du disque pointé $\dot{D}_\omega = \{t \in \mathbb{C} \; ; \; 0 < |t| < \omega\}$ et

$$\Omega_r^m = \left\{ (\sigma,x) \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{n+1} \; ; \quad |\sigma_m| + \sum_{j=1}^{m-1} |\sigma_j - \sigma_{j+1}| + \|x'\| < r \right\},$$

en outre, il existe $c > 0$ et, pour tout compact $K \subset \mathcal{R}_\omega$, il existe $c_K > 0$ tel que

$$(1.4) \qquad |u_m(t,\sigma,x)| \le c_K c^m m! \text{ pour } (t,\sigma,x) \in K \times \Omega_r^m \; ;$$

- les fonctions φ_m sont holomorphes sur Ω_r^m et s'obtiennent en résolvant les problèmes de Cauchy du premier ordre
$(m \le 1)$

$$\begin{cases} D_0\varphi_m(\sigma,x) = \lambda_m(x, D'\varphi_m(\sigma,x)), \\ \varphi_m(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_m,x) = \varphi_{m-1}(\sigma_2,\dots,\sigma_m,x), \text{ pour } x_0 = \sigma_1, \end{cases}$$

où $\lambda_m = \lambda_0$ si m est pair, $\lambda_m = \lambda_1$ si m est impair et $\varphi_0(x) = k_0(x)$.

Note. On a $I_0(x) = u_0(k_0(x),x)$,

$$I_1(x) = \int_0^{x_0} u_1(\varphi_1(\sigma_1,x),\sigma_1,x)d\sigma_1$$

$$I_2(x) = \int_0^{x_0} d\sigma_1 \int_0^{\sigma_1} u_2(\varphi_2(\sigma_1,\sigma_2,x),\ \sigma_1,\sigma_2,x)d\sigma_2, \text{ etc } \dots .$$

Le problème est donc de prolonger analytiquement chacune des fonctions I_m, considérées comme des germes de fonctions holomorphes au point y, puis de s'assurer de la convergence de la série $\sum_{m\in\mathbb{N}} I_m$. Lorsque $\{\xi_0 - \lambda_0(x,\xi'), \xi_0 - \lambda_1(x,\xi')\} = 0$, cette série se réduit à ses deux premiers termes et la détermination du support singulier de u se réduit à celle du support singulier de I_1.

Dans la suite, nous allons nous intéresser au cas où K_0 et K_1 (qui sont tangentes en O) sont tangentes tout le long de T avec un contact d'ordre constant.

Examinons d'abord le cas où $K_0 = K_1$.

2. CARACTERISTIQUES CONFONDUES.

On suppose $K_0 = K_1 \equiv K$; on peut bien entendu supposer que K a pour équation locale $x_1 = 0$.

Exemple. L'exemple le plus simple est l'opérateur de symbole principal $g(x,\xi) = \xi_0(\xi_0 - x_0x_1\xi_1)$ pour lequel $\{\xi_0,\xi_0 - x_0x_1\xi_1\} = x_1\xi_1$.

On peut alors démontrer le

LEMME 2.1. *Pour* $r > 0$ *suffisamment petit, on a* $\varphi_m(\sigma,x) = x_1\Phi_m(\sigma,x)$, $(\sigma,x) \in \Omega_r^m$, *où la fonction* Φ_m *est holomorphe sur* Ω_r^m et $|\Phi_m - 1| < \frac{1}{2}$.

Posons alors

$$\mathcal{U}(t,x) = \sum_{m\in\mathbb{N}} \int_{S_m(x_0)} u_m(t\Phi_m(\sigma,x),\sigma,x)\,d\sigma_1 \wedge\ldots\wedge d\sigma_m \ ;$$

cette fonction est bien définie et holomorphe sur $\mathcal{R}_{\omega/2} \times \left\{x \in \mathbb{C}^{n+1} \ ; \ \|x\| < r\right\}$ et $u(x) = \mathcal{U}(x_1,x)$, ce qui prouve la

PROPOSITION 2.1. *Lorsque* $K_0 = K_1\,(=K)$, *la solution du problème de Cauchy* (1.2) *est ramifiée autour de* K.

3. UNE CLASSE D'OPERATEURS A CARACTERISTIQUES TANGENTES.

Lorsque $K_0 \neq K_1$, K_0 et K_1 étant tangentes le long de T avec un contact d'ordre constant, on peut choisir des coordonnées locales au voisinage de l'origine de $\mathbb{C}^{n+1}$ telles que

$$K_0 : x_1 = 0, \ K_1 : \ x_1 - x_0^q = 0, \ q \geq 2.$$

Nous allons étudier l'opérateur le plus simple admettant ces hypersurfaces caractéristiques, à savoir

$$g(x,\xi) = \xi_0(\xi_0 + qx_0^{q-1}\xi_1) \ ;$$

on a alors

$$k_0(x) = x_1, \ k_1(x) = x_1 - x_0^q$$

et

$$\varphi_m(\sigma,x) = k_m(x) + \sum_{j=1}^{m} (-1)^{m-j}\sigma_j^q$$

où $k_m = k_0$ si m est pair, $k_m = k_1$ si m est impair.

On se propose de prolonger analytiquement le germe u, solution de (1.2), à un ouvert aussi grand que possible du revêtement universel $\hat{X}$ de $X = \mathbb{C}^{n+1} - K_0 \cup K_1$.

Pour énoncer notre théorème,, nous avons besoin de mesurer l'enlacement autour de $K_0 \cup K_1$ de tout chemin $\gamma : I \longrightarrow X$ d'origine y, cet enlacement $J(\gamma) \geq 0$ ne dépendant que de la classe d'homotopie (avec extrémités fixes) de γ : il s'agit donc de construire une fonction $J : \hat{X} \longrightarrow \mathbb{R}_+$.

Il suffit de faire cette construction dans le plan complexe privé de q points en utilisant la fonction g suivante. Posons

$Y = f^{-1}(\mathbb{C}^*)$ où $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ désigne l'application $f(z) = z^q+1$ et soit $\hat{Y}$ le revêtement universel de Y. Notons $\pi : \hat{X} \longrightarrow X$, $\pi' : \hat{Y} \longrightarrow Y$ les surjections canoniques et choisissons des points $\hat{y} \in \hat{X}$ et $\hat{0} \in \hat{Y}$ tels que $\pi(\hat{y}) = y$, $\pi'(\hat{0}) = 0$. Choisissons une détermination holomorphe sur $\hat{X}$ de $(-x_1)^{\frac{1}{q}}$ et posons $g(\hat{x}) = x_0(-x_1)^{-\frac{1}{q}}$; on définit ainsi une fonction holomorphe
$g : \hat{X} \longrightarrow Y$ $\left(\text{car } g(\hat{x})^q + 1 = \dfrac{k_1(x)}{k_0(x)} \in \mathbb{C}^*\right)$ qui se relève en une application $\hat{g} : \hat{X} \longrightarrow \hat{Y}$ telle que $\hat{g}(\hat{y}) = \hat{0}$.

On posera alors $J = J' \circ \hat{g}$ où $J' : \hat{Y} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est défini de la façon suivante.

Soit $R : \mathbb{C}^* \times I \longrightarrow \mathbb{C}^*$ la rétraction par déformation de $\mathbb{C}^*$ sur S^1, il existe une unique application continue $R' : Y \times I \longrightarrow Y$ telle que

$$f \circ R' = R \circ (f \times I_d),\ R'(z,0) = z ;$$

on obtient ainsi une rétraction par déformation de Y sur $K = f^{-1}(S^1)$. Le groupe fondamental $\pi_1(K;0)$ est engendré par les lacets $(\alpha_p)_{0 \leq p < q}$ où

$$\alpha_p(t) = (2 \sin \pi t)^{\frac{1}{q}} e^{(t+2p+\frac{1}{2})\frac{\pi i}{q}} \qquad (p \in \mathbb{Z}).$$

Considérons alors un chemin $\gamma : I \longrightarrow Y$ d'origine 0 ; γ est homotope dans Y au chemin $\gamma_1\gamma_2$ où

$$\gamma_1(t) = R'(\gamma(t),1),\ \gamma_2(t) = R'(\gamma(1),1-t).$$

La classe d'homotopie dans K de γ_1 ne dépend que de celle de γ et il existe un unique chemin $\gamma_1' : I \longrightarrow K$ homotope à γ_1 qui soit de la forme

$$\gamma_1'(t) = \begin{cases} \lambda_j(J't+1-j), & \dfrac{j-1}{J'} \leq t \leq \dfrac{j}{J'},\ 1 \leq j \leq [J'], \\[2ex] \lambda_{[J']+1}(J't - [J'], & \dfrac{[J']}{J'} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

où J' est un nombre réel ≥ 0, $[J']$ désigne sa partie entière, chaque λ_j est l'un des lacets α_p, α_p^{-1} $(0 \leq p < q)$ et $\lambda_{j+1} \neq \lambda_j^{-1}$. Vu que $J' = J'(\gamma)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ, on peut définir une fonction continue $J' : \hat{Y} \to \mathbb{R}_+$ en posant simplement

$J'(\hat{z}) = J'(\gamma)$ où $\gamma = \pi' \circ \hat{\gamma}$, $\hat{\gamma} : I \to \hat{Y}$ est un chemin d'origine $\hat{0}$ et d'extrémité $\hat{z}$.

Note. Soit $\hat{x} \in \hat{X}$ tel que $\pi(\hat{x}) \in S-T$, alors $J(\hat{x}) \in \mathbb{N}$ car $\hat{g}(\hat{x}) = \hat{0}$.

Considérons alors, pour $a > 0$, l'ouvert de $\hat{X}$

$$\mathcal{U}_a = \left\{ \hat{x} \in \hat{X} \; ; \; a(J(\hat{x}) + 1) \times \operatorname*{Max}_{i=0,1} |k_i(x)|^{\frac{1}{q}} + |x_1| < \frac{r}{2} \text{ et } \|x''\| < \frac{r}{2} \right\}$$

où $x = \pi(\hat{x})$, $x'' = (x_j)_{2 \le j \le n}$. On peut démontrer que cet ouvert est simplement connexe et on a le

THEOREME 3.1. *Si l'opérateur* $a(x,D)$ *a pour symbole principal* $\xi_0(\xi_0 + qx_0^{q-1}\xi_1)$, *il existe* $a > 0$ *tel que la solution du problème de Cauchy* (1.2) *se prolonge analytiquement à* $\mathcal{U}_a$.

4. METHODE

Le prolongement analytique des fonctions I_m s'effectue en déformant continûment la classe d'homologie relative du simplexe d'intégration (voir [2], [3], [4]). Considérons les faces de Δ_m

$$\Delta_m^j = \{t \in \Delta_m \; ; \; t_j = t_{j+1}\} \quad (o \le j \le m) \text{ où } t_0 = 1,\ t_{m+1} = 0$$

et les hyperplans de $\mathbb{C}^m$

$$H^j(x_0) = \left\{\sigma \in \mathbb{C}^m \; ; \; \sigma_j = \sigma_{j+1}\right\} \quad (0 \le j \le m) \text{ où } \sigma_0 = x_0,\ \sigma_{m+1} = 0 \; ;$$

on a alors $S_m(x_0)(\Delta_m^j) \subset H^j(x_0)$: le simplexe $S_m(x_0)$ est un cycle relatif de $\left(\mathbb{C}^m, \bigcup_{j=0}^{m} H^j(x_0)\right)$ et l'intégrale (1.3) ne dépend que de la classe d'homologie relative de ce cycle.

On construit alors un m-simplexe singulier de $\mathbb{C}^m$ dépendant continûment de $\hat{x} \in \hat{X}$, c'est-à-dire une application continue

$$T_m : \hat{X} \times \Delta_m \longrightarrow \mathbb{C}^m$$

telle que

$$T_m(\hat{y},t) = 0,\ t \in \Delta_m,$$

$$\varphi_m(T_m(\hat{x},t),x) \neq 0,\ x = \pi(\hat{x}),$$

$$T_m(\hat{x},\Delta_m^j) \subset H^j(x_0),\ 0 \le j \le m.$$

On montre ensuite que, pour $a > 0$ suffisamment grand,

$$\left(T_m(\hat{x},t),x\right) \in \Omega_r^m, \text{ pour tout } (\hat{x},t) \in \mathfrak{U}_a \times \Delta_m.$$

Vu le théorème 1.3 de [2], on sait alors que I_m se prolonge analytiquement à l'ouvert $\mathfrak{U}_a$.

La construction explicite d'un tel simplexe T_m et la démonstration de la convergence de la série $\sum_{m\in\mathbb{N}} I_m$ sont données au détail dans [9]. Ceci permet de démontrer le théorème 3.1.

Note. Le théorème 3.1 vaut en fait pour une classe très générale d'opérateurs à caractéristiques doubles (cf. [10]).

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. FOTIADI, M. FROISSART, J. LASCOUX and P. PHAM.- Applications of an isotopy theorem, Topology 4, 1965, p. 159-191.

[2] T. KOBAYASHI.- On the singularities of the solution to the Cauchy problem with singular data in the complex domain, Math. Ann. 269, 1984, p. 217-234.

[3] J. LERAY.- Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Problème de Cauchy, III), Bull. Soc. Math. France, 87, 1959, p. 81-180.

[4] J. LERAY.- Un complément au théorème de N.Nilsson sur les intégrales de formes différentielles à support singulier algébrique, Bull. SoC. Math.. France, 95, 1967, p. 313-374.

[5] N. NILSSON.- Some growth and ramification properties of certain integrals on algebraic manifolds, Arkiv för Math., 5, 1963, p. 463-476.

[6] F. PHAM.- Introduction à l'étude topologique des singularités de Landau, Mémorial des Sciences Mathématiques, 164, 1967.

[7] D. SCHILTZ, J. VAILLANT et C. WAGSCHAL.- Problème de Cauchy ramifié : racine caractéristique double ou triple en involution, J. Math. pures et appl. 4, p. 423-443.

[8] C. WAGSCHAL.- Problème de Cauchy ramifié à caractéristiques multiples holomorphes de multiplicité variable. J. Math. pures et appl. 62, 1983, p. 99-127.

[9] C. WAGSCHAL.- Problème de Cauchy ramifié pour une classe d'opérateurs à caractéristiques tangentes, J. Math. pures et appl., à paraitre.

[10] C. WAGSCHAL.- en préparation.

Claude Wagschal
Laboratoire Central des Ponts et Chaussées
58, boulevard Lefebvre
75732 PARIS Cedex 15