

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

JEAN-MARC DELORT

GILLES LEBEAU

## Majorations de deuxièmes micro-supports

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1986), p. 1-15

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1986\\_\\_\\_\\_A14\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1986____A14_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

MAJORATIONS DE DEUXIEMES MICRO-SUPPORTS

PAR

Jean-Marc DELORT et Gilles LEBEAU

Jean-Marc DELORT  
 Université de Rennes I  
 UER Mathématiques & Informatique  
 L.A. n° 305  
 Campus de Beaulieu  
 35 042 - RENNES CEDEX - FRANCE -

Gilles LEBEAU  
 Département de Mathématiques  
 Bâtiment 425  
 Université de Paris-Sud  
 91 405 - ORSAY - FRANCE -

1 - MOTIVATION

Le but de l'exposé est de donner une majoration géométrique du deuxième micro-support à croissance le long d'une Lagrangienne ([10], [7], [8]) des distributions de Sjöstrand [10], résultat prouvé en détail dans [3]. Afin de motiver celui-ci, on étudie dans cette première partie un type de problème qu'il permet de résoudre.

Soit  $\Sigma$  une sous-variété analytique réelle lisse de  $\mathbb{R}^n$ ,  $m$  un réel. On notera  $I_{\Sigma}^m$  l'espace des intégrales de Fourier de la forme :

$$(1) \quad \int e^{i\varphi(x,\theta)} a(x,\theta) d\theta$$

où  $\varphi(x,\theta)$  est une phase non dégénérée définissant la Lagrangienne  $T_{\Sigma}^* \mathbb{R}^n$ ,  $a(x,\theta)$  est un symbole analytique sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N$  d'ordre  $k = m + \frac{n-2N}{4}$  ([1]). L'espace  $I_{\Sigma}^m$  est l'espace des distributions conormales analytiques d'ordre  $m$  sur  $\Sigma$ . Comme dans le

cadre  $C^\infty([5])$ ,  $I_\Sigma^m$  est susceptible d'une définition par itération de champs de vecteurs [4]. On a  $I_\Sigma^m \subset H_{loc}^s(\mathbb{R}^n)$  si  $s < -m - \frac{n}{4}$ .

On se pose le problème suivant :

Soient  $N$  une seconde sous-variété analytique réelle de  $\mathbb{R}^n$  et  $u$  une distribution conormale analytique sur  $\Sigma$ , assez régulière. On cherche à estimer géométriquement (i.e. à partir de  $\Sigma$  et  $N$ ) le micro-support ou wave-front set analytique  $SS(u|_N)$  de la restriction de  $u$  à  $N$ . Afin de pouvoir énoncer le théorème résolvant ce problème, rappelons les définitions suivantes :

DEFINITION 1

Une stratification d'un ensemble  $S \subset \mathbb{R}^n$  est une famille  $\mathcal{J} = (S_\alpha)_{\alpha \in A}$  de sous-variétés analytiques réelles (connexes) de  $S$  vérifiant :

- i) la famille  $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$  est localement finie,
- ii) les  $(S_\alpha)_{\alpha \in A}$  forment une partition de  $S$ ,
- iii) pour tous  $(\alpha, \beta) \in A \times A$  tels que  $\bar{S}_\alpha \cap S_\beta \neq \emptyset$ , on a  $S_\beta \subset \bar{S}_\alpha$ ,
- iv) pour tout  $\alpha \in A$ ,  $S_\alpha$  est sous-analytique dans  $\mathbb{R}^n$ .

(On rappellera la définition de iv) plus bas).

On dit que les  $S_\alpha$  sont les strates de  $\mathcal{J}$ . La stratification est dite compatible à  $S' \subset S$  si  $S'$  est réunion de strates.

Exemple

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; y(y-x^2) = 0\}$$

La famille  $(S_1 = \{y=0\}, S_2 = \{y=x^2 \text{ et } x \neq 0\})$  n'est pas une stratification

(iii) n'est pas vérifié).

Par contre  $(S_0 = \{(0,0)\}, S'_1 = S_1 \cap \{x \neq 0\}, S'_2 = S_2)$  est une stratification.

On exigera des stratifications utilisées la condition de régularité supplémentaire suivante :

DEFINITION 2

On dit qu'une stratification  $\mathcal{S}$  vérifie la condition (w) de Whitney si pour tout couple de strates  $(S_\alpha, S_\beta)$  on a :

$$(2) \quad T_{S_\alpha}^* \mathbb{R}^n \hat{+} T_{S_\beta}^* \mathbb{R}^n |_{S_\alpha} \subset T_{S_\alpha}^* \mathbb{R}^n$$

où, pour  $U, V$  parties de  $T^* \mathbb{R}^n$ , on a posé :

$$(3) \quad U \hat{+} V = \left\{ (x, \xi) \in T^* \mathbb{R}^n ; \begin{array}{l} \exists (x_n, \xi_n) \in U \quad x_n \rightarrow x \quad \xi_n + \xi'_n \rightarrow \xi \\ \exists (x'_n, \xi'_n) \in V \quad x'_n \rightarrow x \quad |x_n - x'_n| |\xi_n| \rightarrow 0 \end{array} \right\}$$

On peut alors énoncer :

THEOREME 3

Soit  $u \in I_\Sigma^m$  avec  $m + \frac{n}{4} < -\frac{n}{2}$ . Soient  $\tilde{\Sigma}$  et  $\tilde{N}$  des complexifiées de  $\Sigma$  et  $N$  dans  $\mathbb{C}^n$  et  $\tilde{\mathcal{S}}$  une stratification de  $\tilde{\Sigma} \cap \tilde{N}$  vérifiant la condition (w) de Whitney et compatible à  $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ . Alors si  $\mathcal{S}$  désigne la trace de  $\tilde{\mathcal{S}}$  sur  $\mathbb{R}^n$  on a :

$$(4) \quad SS(u|_N) \subset \bigcup_{S \in \mathcal{S}} T_S^* N$$

*SS(.) désignant le micro-support analytique de Sato.*

Les techniques de majoration de deuxième micro-support que l'on va

développer, permettent également de majorer le front d'onde analytique d'intégrales de Fourier définies à l'aide de phases dégénérées :

THEOREME 4

Soient  $(x, \theta) \rightarrow \varphi(x, \theta)$  une fonction analytique réelle positivement homogène de degré 1 sur  $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^N - \{O\})$  et  $a(x, \theta)$  un symbole analytique d'ordre  $k < -N$ .

Alors la fonction continue :

$$(5) \quad u(x) = \int e^{i\varphi(x, \theta)} a(x, \theta) d\theta$$

vérifie

$$SS(u) \subset \{(x, \varphi'_x(x, \theta)) ; (x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^N - \{O\}) \text{ et } \varphi'_\theta(x, \theta) = O\} \cup$$

$$(6) \quad \{(x, \tilde{x}) \in T^* \mathbb{R}^n ; \text{il existe des suites } (x_n, \theta_n, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n \times (\mathbb{C}^N - \{O\}) \times \mathbb{R}_+^* \}$$

$$\text{vérifiant : } x_n \rightarrow x \quad \lambda_n \rightarrow +\infty \quad \lambda_n \varphi'_x(x_n, \theta_n) \rightarrow \tilde{x}$$

$$|\theta_n| = 1 \quad \Im \theta_n \rightarrow 0 \quad \lambda_n \varphi'_\theta(x_n, \theta_n) \rightarrow O\}$$

Remarque

On peut montrer que le membre de droite de (6) est isotrope sous-analytique donc de dimension  $\leq n$ .

Supposons choisi un système de coordonnées locales sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $(x, t)$  dans lequel  $N$  est donnée par  $t = 0$ . On dispose alors de coordonnées locales  $(x, t; \xi, \tau)$  sur  $T^* \mathbb{R}^n$ ,  $(x, \tau)$  sur  $L' = T_N^* \mathbb{R}^n$  et  $(x, \tau; \tilde{x}, \tilde{\tau})$  sur  $T^* L'$ . Considérons les applications suivantes (susceptibles d'une définition intrinsèque) :

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} \rho : T^* \mathbb{R}^n|_N \longrightarrow T^* N & \gamma : T^* L' \cap \{(x, \tau; \tilde{x}, \tilde{\tau}) ; \tilde{\tau} = O\} \longrightarrow T^* N \\ (x, 0; \xi, \tau) \longrightarrow (x, \xi) & (x, \tau; \tilde{x}, O) \longrightarrow (x, \tilde{x}) \end{array}$$

La preuve des théorèmes 3 et 4 repose sur le résultat suivant, prouvé par Lebeau dans [7] :

**THEOREME 5**

Soit  $u \in H_{comp}^s(\mathbb{R}^n)$  avec  $s > \frac{1}{2} \text{codim}_{\mathbb{R}^n} N$ . Alors :

$$(8) \quad SS(u|_N) \subset \rho(SS(u)|_N) \cup \check{\rho}(SS_{L'}^{2,1}(u) \cap \{(x, \tau; \check{x}, \check{\tau}) ; \check{\tau} = 0, |\tau|=1\})$$

Dans l'expression (8) précédente,  $SS_{L'}^{2,1}(u)$  désigne le deuxième micro-support à croissance de  $u$  le long de  $L'$  dont on rappellera la définition ci-dessous. Le théorème 3 découlera du théorème 5 à condition d'obtenir une majoration géométrique de  $SS_{L'}^{2,1}(u)$  lorsque  $u$  est conormale sur une sous-variété  $\Sigma$ . On prouvera en fait au paragraphe 3 un tel résultat lorsque  $u$  est dans une classe de Sjöstrand quelconque.

**2 - DEUXIEME MICRO-SUPPORT A CROISSANCE ( [10], [7], [8] )**

Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{C}^n$ ,  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. L'espace de Sjöstrand  $H_\varphi(U)$  est défini par :

$$(9) \quad H_\varphi(U) = \{v(z, \lambda) : U \times [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}, \text{ holomorphes en } z, \text{ telles qu'il existe } C > 0, N \in \mathbb{N} \text{ avec } |v(z, \lambda)| \leq C \lambda^N e^{\lambda \varphi(z)} \quad \forall z \in U, \forall \lambda \geq 1\}$$

Si  $z_0 \in \mathbb{C}^n$ , on pose  $H_{\varphi, z_0} = \varinjlim_{U \ni z_0} H_\varphi(U)$ ,  $U$  décrivant le filtre des voisinages ouverts de  $z_0$ .

Soient  $z_0 \in \mathbb{C}^n$ ,  $u$  une fonction continue au voisinage de  $\text{Re } z_0$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Sigma_0$  une boule centrée en  $\text{Re } z_0$ , de rayon assez petit. Rappelons que la transformée de FBI de  $u$  est définie par :

$$(10) \quad Tu(z, \lambda) = \int_{\Sigma_0} e^{-\lambda/2(z-t)^2} u(t) dt$$

On a  $Tu(z,\lambda) \in H_{\varphi_0, z_0}$  si  $\varphi_0(z) = \frac{1}{2} (\int_0^z mz)^2$ . Rappelons que d'après [10] la transformation de FBI permet de caractériser  $SS(u)$  par :

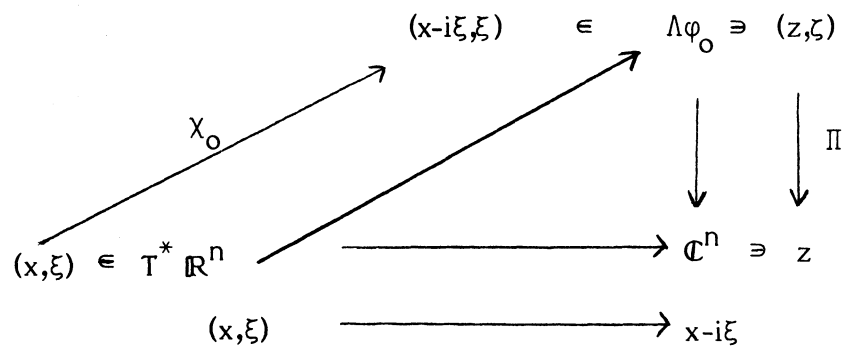
$(x_0, \xi_0) \notin SS(u) \iff$  il existe  $\epsilon > 0$  et  $W$  voisinage complexe de  $z_0 = x_0 - i \xi_0$  tels que

$$\forall z \in W, \forall \lambda \geq 1, |Tu(z,\lambda)| \leq \frac{1}{\epsilon} e^{\lambda(\varphi_0(z)-\epsilon)}$$

On notera :

$$(11) \quad \Lambda\varphi_0 = \left\{ (z ; \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}(z)) ; z \in \mathbb{C}^n \right\} \subset T^* \mathbb{C}^n$$

On a un diagramme commutatif :



On peut alors faire vivre le micro-support dans  $\Lambda\varphi_0$  en posant  $SS_{\varphi_0}(u) = \chi_0(SS(u))$ . La variété analytique réelle  $\Lambda\varphi_0$  est totalement réelle et admet pour complexifiée  $T^* \mathbb{C}^n$  donc  $\chi_0$  se prolonge en une transformation canonique complexe :

$$(12) \quad \begin{aligned} \chi_0 : T^* \mathbb{C}^n &\longrightarrow T^* \mathbb{C}^n \\ (z, \zeta) &\longrightarrow (z-i \zeta, \zeta) \end{aligned}$$

En outre, si  $\sigma$  désigne la forme symplectique de  $T^* \mathbb{C}^n$ ,  $(\Lambda\varphi_0, (\text{Re}\sigma)|_{\Lambda\varphi_0})$  est symplectique et  $\chi_0$  est un isomorphisme symplectique de  $T^* \mathbb{R}^n$  (muni de sa

structure symplectique usuelle) sur  $\Lambda\varphi_0$ .

Soit alors  $L'$  une Lagrangienne de  $T^*\mathbb{R}^n$  et  $L = \chi_0(L')$  la Lagrangienne image dans  $\Lambda\varphi_0$ . On va définir pour  $v \in H\varphi_0$  un deuxième microsupport  $SS_L^{2,1}(v) \subset T^*L$ . Le deuxième micro-support associé à une fonction  $u$  sur  $\mathbb{R}^n$  qui intervient dans (8) s'obtient à partir de celui-ci en posant :

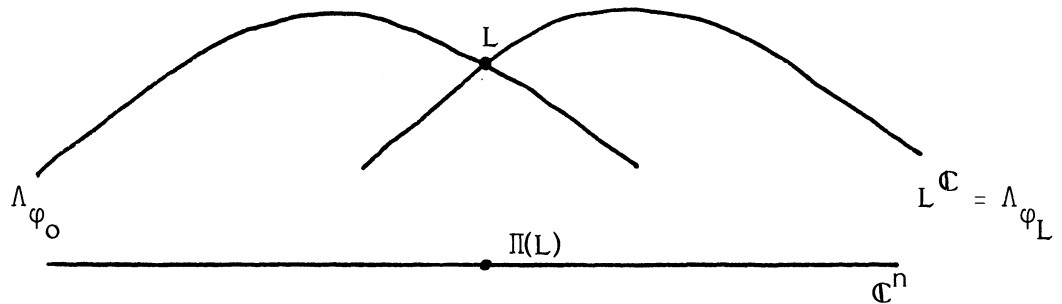
$$(13) \quad SS_L^{2,1}(u) = K^{-1}(SS_{L'}^{2,1}(Tu))$$

où  $K : T^*L' \rightarrow T^*L$  est l'isomorphisme déduit de  $\chi_0|_{L'} : L' \rightarrow L$ .

On déduira donc de toute majoration géométrique de  $SS_{L'}^{2,1}(Tu)$  une majoration géométrique de  $SS_L^{2,1}(u)$ .

Définition de  $SS_L^{2,1}(v)$

Soient  $v \in H_{\varphi_0, z_0}$ ,  $L \subset \Lambda\varphi_0$  une Lagrangienne avec  $z_0 \in \Pi(L)$ . D'après [8], la complexifiée  $L^{\mathbb{C}} \subset T^*\mathbb{C}^n$  de  $L$  est telle qu'il existe une fonction pluri-harmonique  $\varphi_L$  définie au voisinage de  $z_0$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$  telle que  $L^{\mathbb{C}} = \Lambda\varphi_L$  et  $\varphi_L \leq \varphi_0$ ,  $\varphi_L(z) = \varphi_0(z)$  si et seulement si  $z \in \Pi(L)$  :



Soit  $g_L$  une fonction holomorphe au voisinage de  $z_0$  telle que  $\varphi_L = -\Im g_L$ . Définissons :

$$(14) \quad \begin{array}{ccc} I_L : H_{\varphi_0, z_0} & \longrightarrow & H_{\varphi_0 - \varphi_L, z_0} \\ v(z, \lambda) & \longrightarrow & e^{-i\lambda g_L(z)} v(z, \lambda) \end{array}$$



$$(15) \quad \begin{aligned} \chi_L : T^* \mathbb{C}^n &\longrightarrow T^* \mathbb{C}^n \\ (z, \zeta) &\longrightarrow \left( z, \zeta - \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi_L}{\partial z}(z) \right) \end{aligned}$$

On a  $\chi_L(\Lambda \varphi_L) = X$  section nulle de  $T^* \mathbb{C}^n$  et  $\chi_L(L) = \Pi(L)$ .

On peut choisir au voisinage de  $z_0$  un système de coordonnées locales holomorphes dans lequel  $\Pi(L)$  est donné par  $\text{Im } z = 0$ .

Si  $p_0 = (z_0, \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}(z_0)) \in L$  et  $(p_0, q_0) \in T^* L$  sont donnés, notons  $(y_0, \eta_0) \in T^*(\Pi(L))$  le point correspondant par  $\Pi$  ( $y_0$  et  $\eta_0$  sont donc dans  $\mathbb{R}^n$ ). Soient  $t_0 = y_0 - i \eta_0$ ,  $\Sigma_0$  une boule de centre  $y_0$  de rayon assez petit dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $w(z, \lambda) = I_L(v)(z, \lambda)$ ,  $\mu$  un paramètre réel positif et :

$$(16) \quad T^2 v(t, \lambda, \mu) = \int_{\Sigma_0} e^{-\frac{\lambda \mu^2}{2} (t-z)^2} w(z, \lambda) dz$$

On a alors :

**DEFINITION 6**

On dit que  $(p_0, q_0) \notin SS_L^{2,1}(v) \iff$  il existe  $\epsilon > 0, \mu_0 > 0, \lambda'_0 > 0, N \in \mathbb{N}, W$  voisinage complexe de  $t_0$  tels que :

$$(17) \quad |T^2 v(t, \lambda, \mu)| \leq \frac{\lambda^N}{\epsilon} e^{-\frac{\lambda \mu^2}{2} (\varphi_0(t) - \epsilon)}$$

pour tous  $t \in W, \mu \in ]0, \mu_0[, \lambda$  vérifiant  $\lambda \mu^2 > \lambda'_0$ .

**3 - MAJORATION GEOMETRIQUE DU DEUXIEME MICRO-SUPPORT**

Rappelons la définition du cône normal à une sous-variété :

DEFINITION 7

Soient  $M$  une variété  $C^1$ ,  $S$  et  $V$  deux parties de  $M$ . Le cône normal à  $S$  le long de  $V$  est la partie  $C(S,V)$  de  $TM$  définie dans un système de coordonnées locales par  $(x,\theta) \in C(S,V) \iff$  il existe des suites  $s_n \in S, v_n \in V, c_n \in \mathbb{R}_+$  avec :

$$s_n \rightarrow x, v_n \rightarrow x, c_n(s_n - v_n) \rightarrow \theta$$

Si  $V$  est une sous-variété de  $M$ ,  $C(S,V)$  est invariant par  $TV$  et on note  $C_V(S)$  l'image de  $C(S,V)$  dans  $T_V M = TM/TV$ .

Si  $M$  est symplectique et  $V$  Lagrangienne dans  $M$ ,  $T_V M$  s'identifie à  $T^*V$  par l'anti-isomorphisme hamiltonien et  $C_V(S)$  peut être considéré comme un cône de  $T^*V$ .

Le théorème de majoration du  $SS_L^{2,1}$  s'énonce alors :

THEOREME 8

Soient  $z_0$  un point de  $\mathbb{C}^n$ ,  $\Psi$  une fonction analytique réelle au voisinage de  $z_0$  vérifiant  $\Psi \leq \varphi_0$ ,  $L$  une Lagrangienne de  $\Lambda\varphi_0$ ,  $p_0$  un point de  $L \cap \Lambda_\Psi$  vérifiant  $\Pi(p_0) = z_0$ ,  $v$  un élément de  $H_{\Psi, z_0}$  tel que  $p_0 \in SS_{\varphi_0}(v)$ . On a alors :

$$(18) \quad SS_L^{2,1}(v)_{p_0} \subset (C_L(\Lambda_\Psi) \cap T^*L)_{p_0}$$

où  $(.)_{p_0}$  désigne la fibre en  $p_0$ .

Avant de donner la preuve du théorème, rappelons les définitions suivantes :

DEFINITION 9

Une partie  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  est dite sous-analytique si pour tout  $a \in \mathbb{R}^n$  il existe :

un voisinage  $V$  de  $a$  dans  $\mathbb{R}^n$

une famille  $(Y_{ij})_{i=1, \dots, N, j=1, 2}$  de variétés analytiques réelles

une famille  $\varphi_{ij} : Y_{ij} \rightarrow \mathbb{R}^n$  d'applications analytiques réelles propres

telles que  $V \cap A = \bigcup_i (\varphi_{i1}(Y_{i1}) \cup \varphi_{i2}(Y_{i2}))$ .

Une fonction sous-analytique est une fonction continue dont le graphe est sous-analytique. On montre qu'un ensemble sous-analytique admet une stratification de Whitney. Cela entraîne en particulier qu'une fonction sous-analytique est analytique sur un ouvert dense. On peut définir la notion de chaîne sous-analytique (cf. [9]). On ne rappellera pas ici la définition précise d'un tel objet et on se contentera de dire qu'une chaîne sous-analytique est un ensemble sous-analytique sur lequel on s'est donné une manière d'intégrer les formes différentielles (i.e. une classe d'homologie) généralisant l'intégration sur une sous-variété.

Rappelons enfin que si  $F$  est un fermé de  $\mathbb{R}^n$ , Kashiwara-Schapira définissent  $T_F^* \mathbb{R}^n$  par :

$$(19) \quad T_F^* \mathbb{R}^n = SS(\underline{\mathbb{C}}_F)$$

le membre de droite désignant le micro-suppport du faisceau constant de fibre  $\mathbb{C}$ , de base  $F$  (cf. [6]). En particulier, si  $F = \{x \in \mathbb{R}^n ; \Psi_1(x) \leq 0\}$  où  $\Psi_1$  est une fonction  $C^1$  à valeurs réelles, on a :

$$(20) \quad T_F^* \mathbb{R}^n \subset \{(x, \xi) ; \exists x_n \rightarrow x, \lambda_n d \Psi_1(x_n) \rightarrow \xi, \lambda_n \leq 0, \lambda_n \Psi_1(x_n) \rightarrow 0\} \cup \{(x, 0) ; \Psi_1(x) < 0\}.$$

Preuve du théorème 8

Le  $SS_L^{2,1}(v)$  se caractérise par l'intégrale  $\int_{\Sigma_0} e^{-\frac{\lambda \mu^2}{2} (t-z)^2} w(z, \lambda) dz$ .

Posons  $\Psi_1 = \Psi - \varphi_L$ . Comme  $\Psi \leq \varphi_0$ , on a  $\Psi_1(z) \leq 0$  si  $z \in \Pi(L) \simeq \mathbb{R}^n$ . En outre

$$\Lambda_{\Psi_1} = \chi_L(\Lambda_{\Psi}) \text{ et } w(z, \lambda) \in H_{\Psi_1, t_0}.$$

Soient  $K$  une boule complexe contenant  $\bar{\Sigma}_0$  dans son intérieur,  
 $F = \{z \in K ; \Psi_1(z) \leq 0\}$  ( $F \supset \Sigma_0$ ). Comme  $\Psi_1$  est sous-analytique,  $F$  est contractile  
 si  $K$  (et  $\Sigma_0$ ) sont assez petits. Notons  $\theta(t)$  la fonction :

$$(21) \quad \theta(t) = \inf_{\substack{\Sigma \subset F \\ \partial \Sigma = \partial \Sigma_0}} \sup_{z \in \Sigma} \left[ - \operatorname{Re} \frac{(t-z)^2}{2} \right]$$

où la borne inférieure est prise sur les chaînes sous-analytiques de  $F$  de bord  $\partial \Sigma_0$ .

On a le lemme :

**LEMME 10**

Il existe  $C > 0, N \in \mathbb{N}$  tels que  $|T^2 v(t, \lambda, \mu)| \leq C \lambda^N e^{\lambda \mu^2 \theta(t)}$

Démonstration

Pour  $t$  fixé dans  $\mathbb{C}^n$  et  $\epsilon \geq 0$ , posons :

$$(22) \quad F_{t, \epsilon} = \{z \in F ; - \operatorname{Re} \frac{(z-t)^2}{2} \leq \theta(t) + \epsilon\}$$

Alors : •  $(F_{t, \epsilon})_{\epsilon > 0}$  est base de voisinage de  $F_{t, 0}$  dans  $F$ .

• Comme  $F_{t, 0}$  est un compact sous-analytique, il existe  $V$  voisinage de  $F_{t, 0}$  dans  $\mathbb{C}^n$  se rétractant par déformation sur  $F_{t, 0}$  (cf [3]).

Soit  $\epsilon > 0$  assez petit pour que  $F_{t, \epsilon} \subset V$ . Par définition de  $F_{t, \epsilon}$  il existe  $\Sigma_{t, \epsilon}$  chaîne de  $F_{t, \epsilon}$  avec  $\partial \Sigma_{t, \epsilon} = \partial \Sigma_0$ .  $\Sigma_{t, \epsilon}$  se rétracte donc sur une chaîne singulière  $\Sigma_t$  de  $F_{t, 0}$  résolvant  $\partial \Sigma_0$ . Comme l'homologie des compacts sous-analytiques peut-être calculée par leurs chaînes sous-analytiques, on peut supposer que pour tout  $t$ ,  $\Sigma_t$  est sous-analytique.

On montre [2] que  $t \rightarrow \operatorname{mes}(\Sigma_t)$  peut de plus être supposée localement

bornée. Alors, comme par la formule de Stokes  $T^2 v(t, \lambda, \mu) = \int_{\Sigma_t} e^{-\frac{\lambda \mu^2}{2}(t-z)^2} w(z, \lambda) dz$  on obtient le lemme.

La fin de la preuve du théorème 8 s'articule alors comme suit :

- L'inégalité du lemme 10 et l'hypothèse  $(p_0, q_0) \in SS_L^{2,1}(v)$  permettent de montrer qu'il existe une suite  $t_m \rightarrow t_0$  telle que pour tout  $m$ ,  $\theta$  soit dérivable en  $t_m$  et que  $(t_m, \frac{2}{i} \frac{\partial \theta}{\partial t}(t_m)) \rightarrow (t_0, \frac{2}{i} \frac{\partial \theta_0}{\partial t}(t_0))$ .

- La théorie des fonctions localement Lipschitzienne sous-analytiques de [3] permet de prouver que si  $\theta$  est dérivable en un point  $t$ ,  $(t, \frac{2}{i} \frac{\partial \theta}{\partial t}(t)) \in \chi_0((T_F^* \mathbb{C}^n \cup T_{\partial \Sigma_0}^* \mathbb{C}^n)^a)$ .

Comme  $y_0 \notin \partial \Sigma_0 \cup \partial K$ , on déduit de cela que  $(y_0, \eta_0) \in (T_{\{\Psi_1 \leq 0\}}^* \mathbb{C}^n)^a$ . En utilisant la majoration (20) et en revenant à la définition du cône normal, on obtient  $(y_0, \eta_0) \in C_X(\Lambda_{\Psi_1}) \cap T^* \mathbb{R}^n$  où  $X$  est la section nulle de  $T^* \mathbb{C}^n$ . Comme  $X = \chi_L(L^{\mathbb{C}})$  et  $\Lambda_{\Psi_1} = \chi_L(\Lambda_{\Psi})$ , le théorème en découle.

Remarque

Le premier des deux résultats précédents est une version avec paramètres du lemme suivant :

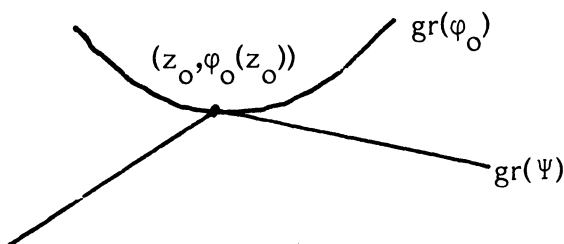
LEMME 11

Soient  $p_0 = (z_0, \zeta_0)$  un point de  $\Lambda_{\varphi_0}$  et  $\Psi$  une fonction localement Lipschitzienne sous-analytique définie au voisinage de  $z_0$  dans  $\mathbb{C}^n$ , à valeurs réelles, vérifiant  $\Psi \leq \varphi_0$ . Alors, soit tout  $v \in H_{\Psi, z_0}$  vérifie  $p_0 \notin SS_{\varphi_0}(v)$ ,

$$\text{soit } \Psi \text{ est dérivable en } z_0 \text{ et } \frac{2}{i} \frac{\partial \Psi}{\partial z}(z_0) = \frac{2}{i} \frac{\partial \varphi_0}{\partial z}(z_0)$$

Idée de la preuve

On peut supposer  $\Psi(z_0) = \varphi_0(z_0)$ . Si  $\Psi$  n'est pas dérivable en  $z_0$ , son graphe à l'allure suivante :



Sur le bord d'un voisinage  $V$  de  $z_0$  on a donc  $\Psi(z) \leq \varphi_0(z_0) - C$  avec  $C > 0$ .

Soit  $v \in H_{\Psi, z_0}$ . Quitte à multiplier  $v$  par une constante et une puissance de  $\lambda$ , on peut supposer :  $\frac{1}{\lambda} \text{Log}|v(z, \lambda)| \leq \Psi(z)$ . Or le membre de gauche est pluri-harmonique et majoré par  $\varphi_0(z_0) - C$  sur  $\partial V$  donc en tout point de  $V$ . Alors  $p_0 \notin SS_{\varphi_0}(v)$ .

Preuve du théorème 3

Elle utilise la proposition :

PROPOSITION 12

Soient  $\Sigma$  une sous-variété analytique de  $\mathbb{R}^n$  et  $u \in I_{\Sigma}^m$  avec  $m + \frac{n}{4} < -\frac{n}{2}$ . Alors  $Tu(z, \lambda) \in H_{\varphi_{\Sigma}}$  où  $\varphi_{\Sigma}$  est la fonction pluri-harmonique naturellement associée à  $T_{\Sigma}^* \mathbb{R}^n$  (cf paragraphe 2).

Démonstration

Supposons  $\Sigma$  donnée par  $x'' = 0$  dans  $\mathbb{R}_{x'}^{n'} \times \mathbb{R}_{x''}^{n''}$ . Il existe alors un symbole analytique d'ordre  $< -n''$  avec  $u(x) = \int e^{ix'' \cdot \xi''} a(x', \xi'') d\xi''$ . Si  $\alpha > 0$  est assez

petit, la suite de fonctions entières  $u_\epsilon(x) = \int e^{ix'' \cdot \xi'' - \epsilon \xi''^2} a(x', \xi'') d\xi''$  converge uniformément lorsque  $\epsilon \rightarrow 0+$  sur  $\{(x', x'') \in \mathbb{C}^n; |\Im x''| \leq \alpha |\Re x''|\}$ . En appliquant le théorème 3.2.1 de [3], on en déduit que  $SS_{T_\Sigma^* \mathbb{R}^n}^{2,1}(u)$  est contenu dans la section nulle de  $T^*(T_\Sigma^* \mathbb{R}^n)$ . Utilisant [8], § IV-5, on en déduit  $Tu \in H_{\varphi_\Sigma}$  (où  $\varphi_\Sigma = -\Im \frac{iz''^2}{2}$ ).

Fin de la preuve

La proposition 12 et le théorème 8 entraînent que

$$(23) \quad SS_{T_N^* \mathbb{R}^n}^{2,1}(u) \subset C_{T_N^* \mathbb{C}^n} \cap T^*(T_N^* \mathbb{R}^n)$$

Grâce à (8) on en déduit une majoration de  $SS(u|_N)$  que l'on estime par le membre de droite de (4) en revenant à la définition du cône normal.

Preuve du théorème 4

Avec les notations de l'énoncé,  $(x, t, \theta) \rightarrow \Phi(x, t, \theta) = \varphi(x, \theta) + t\theta$  est une phase non dégénérée associée à la Lagrangienne

$$\Lambda = \{(x, -\varphi'_\theta(x, \theta); \varphi'_x(x, \theta), \theta); (x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^N - \{0\})\}$$

et  $v(x, t) = \int e^{i\Phi(x, t, \theta)} a(x, \theta) d\theta$  est une distribution Lagrangienne sur  $\Lambda$  vérifiant  $v(x, t)|_{t=0} = u(x)$ .

On déduit alors de la proposition 12 et de l'invariance des distributions Lagrangiennes par transformations canoniques que  $Tv$  est dans l'espace  $H_{\varphi_\Lambda}$ ,  $\varphi_\Lambda$  désignant la fonction pluri-harmonique naturellement associée à  $\Lambda$ . En utilisant le théorème 8 et en revenant à la définition du cône normal, on obtient la conclusion.

Remarque

Dans le théorème 8, on peut supposer que  $\Psi$  est seulement localement Lipschitzienne sous-analytique et telle que  $\Lambda_\Psi$  vérifie une condition de positivité convenable (cf. [3]).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] : L. BOUTET DE MONVEL - P. KREE  
 "Pseudo-differentials operators and Gevrey classes".  
 Ann. Inst. Fourier, 17, (1967), p. 295-303.
- [2] : J.M. DELORT  
 "Une propriété de borne uniforme pour la mesure d'une chaîne résolvant un bord sous-analytique".  
 Note aux C.R.A.S., Paris, 300, série I, (1985), p. 577-580.
- [3] : J.M. DELORT - G. LEBEAU  
 "Microfonctions I-Lagrangiennes".  
 A paraître.
- [4] : P. GERARD  
 Thèse de 3ème Cycle, Orsay (1985) et article à paraître.
- [5] : L. HÖRMANDER  
 "The analysis of linear partial differential operators".  
 Tome 3, Springer (1982).
- [6] : M. KASHIWARA - P. SCHAPIRA  
 "Microlocal study of sheaves".  
 Astérisque 128 (1985).
- [7] : G. LEBEAU  
 "Deuxième microlocalisation à croissance"  
 Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, (1982-83), exposé XV.
- [8] : G. LEBEAU  
 "Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes"  
 Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 35, (2), (1985), p. 145-216.
- [9] : J.B. POLY  
 "Formule des résidus et intersection des chaînes sous-analytiques".  
 Thèse d'Etat, Poitiers, (1974).
- [10] : J. SJÖSTRAND  
 "Singularités analytiques microlocales"  
 Astérisque 95, (1982).