Journées Équations aux dérivées partielles

Werner O. Amrein

Bornes inférieurs pour des fonctions propres de l'opérateur de Schrödinger

Journées Équations aux dérivées partielles (1984), p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1984____A7_0>

Bornes Inférieures pour des Fonctions Propres de l'Opérateur de Schroedinger

par W.O. Amrein

Soit A un opérateur différentiel auto-adjoint dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$, de la forme $A = -\Delta + V(x)$, où le "potentiel" $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ appartient à une classe de fonctions tendant vers zéro (au moins dans un certain sens moyenné) lorsque $r \equiv |x| \to \infty$. Le spectre d'un tel opérateur est typiquement formé d'un spectre continu égal à l'intervalle $[0,\infty)$ et d'un certain nombre de valeurs propres qui peuvent être négatives, zéro où éventuellement positives. Si f est une fonction propre de A (c'est-à-dire $Af = \lambda f$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$), on peut essayer de majorer ou minorer sa valeur absolue $|f|$ par des fonctions simples, ces dernières étant alors des <u>bornes supérieures ou inférieures</u> pour f. Dans le cas idéal ces bornes dépendent seulement de la valeur propre λ, dans d'autres cas éventuellement encore de la norme de V dans un certain espace normé.

Dans la littérature on a surtout considéré des bornes ponctuelles (ou L^∞) et des bornes L^2. La fonction $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est une <u>borne supérieure ponctuelle</u> pour f si $|f(x)| \leq \Phi(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire si $f/\Phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. La fonction $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est une <u>borne supérieure L^2</u> pour f si $f/\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$, en d'autres termes s'il existe une fonction $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que $|f| \leq \varphi|g|$. Dans le même esprit la fonction $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ est une <u>borne inférieure L^2</u> pour f si $f/\psi \notin L^2(\mathbb{R}^n)$. Puisque les fonctions propres peuvent avoir des zéros, il est utile de considérer des bornes inférieures ponctuelles que pour les fonctions propres associées à la plus petite valeur propre de A qui, elles, sont strictement positives.

La connaissance de bonnes bornes est intéressante pour différentes raisons, par exemple :

(i) en mécanique quantique la fonction $|f(x)|^2$ représente la densité de probabilité dans l'espace de configuration d'une particule liée par le potentiel V, et on aimerait être sûr que cette grandeur décroisse très rapidement en dehors d'une certaine partie finie de $\mathbb{R}^n$,

(ii) pour démontrer des propriétés spectrales d'opérateurs de Schrödinger à plusieurs corps, c'est-à-dire d'opérateurs de la forme

$$-\Delta + \sum_{k=1}^{m} V_k(x^{(k)})$$

dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, où $V_k : \mathbb{R}^{n_k} \to \mathbb{R}$, $n_k < n$ et $x^{(k)} \in \mathbb{R}^{n_k}$ est une combinaison linéaire des composantes de la variable $x \in \mathbb{R}^n$, il est très utile de savoir que les fonctions propres des opérateurs partiels $-\Delta + V_k$ dans $L^2(\mathbb{R}^{n_k})$ sont à décroissance rapide.

Pour les fonctions propres f associées à une valeur propre λ négative, on a obtenu des bornes supérieures et inférieures exponentielles impliquant essentiellement que $|f(x)|$ se comporte comme $\exp(-|\lambda|^{1/2}|x|)$ lorsque $|x| \to \infty$ (voir par exemple [1]-[4]). Souvent les opérateurs A considérés ici n'ont pas de valeurs propres positives; des bornes obtenues récemment montrent que les fonctions propres associées à une éventuelle valeur propre $\lambda > 0$ se comportent comme une puissance $|x|^{-N}$, $N > 0$ (voir [3], [5] pour des détails et des références).

Le point $\lambda = 0$ est particulier, puisqu'il coincide avec le bord du spectre continu. Les démonstrations de la non-existence de valeurs propres strictement positives ne s'appliquent pas au cas $\lambda = 0$, et en effet on peut se convaincre facilement que la propriété d'avoir $\lambda = 0$ comme valeur propre n'est rien d'exceptionnel [6]. Des résultats récents montrent que des fonctions propres associées à $\lambda = 0$ ont également un comportement en $|x|^{-N}$ (voir [7] pour des bornes supérieures, [3] et [6] pour des bornes inférieures). Dans cet exposé on décrira les bornes inférieures obtenues dans [6] en collaboration avec A.M. Berthier et V. Georgescu. Comme dans d'autres études récentes du spectre ponctuel non-négatif d'opérateurs de Schrödinger, un aspect essentiel de ce travail est de traiter des potentiels non-lisses, c'est-à-dire que l'on suppose seulement que V appartienne à un certain espace L^p pondéré. Des conditions précises sont données dans le théorème suivant; celui-ci ne s'applique pas seulement à des fonctions propres pour $\lambda = 0$, c'est-à-dire à des fonctions f vérifiant $\Delta f = Vf$, mais plus généralement à des fonctions f vérifiant l'inégalité $|\Delta f| \leq |Vf|$. Ce théorème peut être généralisé à des potentiels plus singuliers localement en utilisant les résultats de [8] que nous préciserons dans la Remarque 1.

<u>Théorème</u> : Soit $n \geq 2$, $p \in (\frac{n}{2},\infty] \cap [n-2,\infty]$, $\mu = 2 - n/p$ et $\mathcal{O}$ un ouvert connexe

de $\mathbb{R}^n$ contenant un voisinage de l'infini. Soit $V : \mathcal{O} \to \mathbb{C}$ tel que $(1+r)^{\mu}V\in L^p(\mathcal{O})$, et soit $f\in H^1(\mathcal{O})$ tel que Δf est une fonction et

$$|(\Delta f)(x)| \leq |V(x)||f(x)| \quad \text{p.p. dans } \mathcal{O}\,. \tag{1}$$

Alors $r^{\kappa}f\in L^2(\mathcal{O})\ \forall\kappa \geq 0 \Rightarrow f = 0$.

<u>Notations</u> : Nous utilisons les notations suivantes : $r = |x|$, $\partial_j = \partial/\partial x_j$ $(j = 1,\ldots,n)$ et $\nabla \equiv \text{grad} = (\partial_1,\ldots,\partial_n)$. Nous désignons par $H^{m,q}(\Omega)$ les espaces de Sobolev sur le domaine $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ ($m\in\mathbb{N}$, $q \geq 1$ [9]) et par $H_c^{m,q}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$ l'ensemble des fonctions dans $H^{m,q}(\mathbb{R}^n)$ ayant support compact dans $(\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$. Nous posons $H^m(\Omega) = H^{m,2}(\Omega)$, $H^{m,q} = H^{m,q}(\mathbb{R}^n)$ et $L^q = L^q(\mathbb{R}^n)$. Finalement, si $R > 0$, nous posons $\Omega_R = \{x\in\mathbb{R}^n\,|\,|x| > R\}$ et

$$\rho_R = \|r^{\mu}V\|_{L^p(\Omega_R)}\,. \tag{2}$$

La notation $c(\cdot)$ est utilisée pour divers nombres finis qui dépendent des paramètres indiqués dans la parenthèse.

Pour démontrer le théorème, nous avons recours aux quatre résultats suivants :

I) le théorème d'injection de Sobolev [9],

II) si $R > 0$ et $\alpha \geq 0$, alors $f\in H^{m,q}(\Omega_R) \Rightarrow r^{-\alpha}f\in H^{m,q}(\Omega_R)$,

III) si $1 < q < \infty$ et si g, $\Delta g\in L^q(\mathbb{R}^n)$, alors $g\in H^{2,q}(\mathbb{R}^n)$ [10],

IV) une inégalité pour le Laplacien du type

$$\|r^{\nu}g\|_{L^s} \leq C\|r^{\nu+\delta}\Delta g\|_{L^q}\,, \tag{3}$$

plus précisément la proposition suivante [11] :

<u>Proposition</u> : Soit $n \geq 2$, $p\in(\frac{n}{2},\infty]\cap[n-2,\infty]$, $1 \leq q \leq 2 \leq s < \infty$ tels que $p^{-1} = q^{-1} - s^{-1}$. Alors il existe deux suites Γ_+ et Γ_- de nombres réels accumulant respectivement à $+\infty$ et à $-\infty$ et une constante C telles que l'inégalité (3) est satisfaite, avec $\delta = 2 - n/p(\equiv\mu)$, pour tout $\nu\in\Gamma_+\cup\Gamma_-$ et pour tout $g\in H_c^{2,q}(\mathbb{R}^n\setminus\{0\})$. Si $p = \infty$, on peut remplacer C par $2|\nu|^{-1}$ dans (3).

Pour appliquer cette proposition à la fonction f du théorème, il va être nécessaire de tronquer f au voisinage de l'origine et au voisinage de l'infini.

Nous commençons par un résultat auxiliaire qui fait intervenir déjà le cut-off local :

<u>Lemme</u> : Supposons que n, p, $\mathcal{O}$, V et f vérifient les hypothèses du théorème et que $r^{\kappa} f \in L^2(\mathcal{O})$ $\forall \kappa \geq 0$. Soit $s \in [2,\infty)$ défini comme suit : $s = 2$ si $p > 2$, $s = [3/4-(2p)^{-1} - (2n)^{-1}]^{-1}$ si $p \leq 2$. Soit q donné par $q^{-1} = p^{-1} + s^{-1}$. Finalement soit $R > 0$ tel que $\Omega_R \subset \mathcal{O}$ et $\eta \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ tel que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta(x) = 0$ si $|x| \leq R$ et $\eta(x) = 1$ si $|x| \geq R+1$, et soit $f_o = \eta f$. Alors $r^{\tau} f_o$, $r^{\tau} \Delta f_o$ et $r^{\tau} \partial_j f_o$ appartiennent à $L^q(\mathbb{R}^n)$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ $(j = 1, \ldots, n)$.

<u>Démonstration</u> : Nous posons $\Omega = \Omega_R$, et nous pouvons supposer que $\tau \geq 0$.

i) Remarquons d'abord que les nombres p, q et s satisfont aux hypothèses nécessaires pour appliquer III) et IV), et que $f_o \in H^1(\Omega)$; de plus I) permet de conclure que $H^1(\Omega) \subset L^s(\Omega)$ et $H^{2,q}(\Omega) \subset L^s(\Omega)$, où le symbole $\subset$ signifie une injection continue entre espaces de Banach.

ii) L'inclusion $r^{\tau} f_o \in L^q$ suit de l'inégalité de Hölder et de l'hypothèse $r^{\kappa} f \in L^2(\mathcal{O})$ $\forall \kappa \geq 0$: Si w est défini par $w^{-1} = q^{-1} - 1/2$, alors $w \geq 2$ et

$$\|r^{\tau} f_o\|_{L^q} \leq \|r^{\tau} f\|_{L^q(\Omega)} \leq \|r^{-n}\|_{L^w(\Omega)} \|r^{\tau+n} f\|_{L^2(\Omega)} < \infty .$$

iii) Pour démontrer que $r^{\tau} \Delta f_o \in L^q$ pour tout $\tau \geq 0$, on utilise l'hypothèse (1) et surtout le fait que $\mu > 0$ qui permet d'obtenir l'inclusion voulue par un argument récursif. Nous utilisons les deux identités suivantes :

$$r^{\tau} \Delta f_o = \eta r^{\tau} \Delta f + r^{\tau} (\Delta \eta) f + 2 r^{\tau} (\nabla \eta) \cdot \nabla f , \tag{4}$$

$$\Delta r^{\tau} f_o = r^{\tau} \Delta f_o + (n\tau - \tau^2) r^{\tau-2} f_o + 2\tau \frac{x}{r} \cdot \nabla r^{\tau-1} f_o . \tag{5}$$

Remarquons que $\Delta \eta$ et $\nabla \eta$ s'annulent dans Ω_{R+1}. Comme $q \leq 2$ et puisque f et les composantes de ∇f appartiennent à $L^2(\Omega)$, les deux derniers termes de (4) appartiennent à L^q pour tout τ, et pour $\tau \to \infty$ leur norme dans L^q obéit à l'estimation suivante :

$$\|r^{\tau} (\Delta \eta) f + 2 r^{\tau} (\nabla \eta) \cdot \nabla f\|_{L^q} = O((R+1)^{\tau}) . \tag{6}$$

En vertu de (1), (4) implique alors que

$$\|r^{\tau}\Delta f_o\|_{L^q} \leq \|r^{\tau}\Delta f\|_{L^q(\Omega)} + O((R+1)^{\tau})$$

$$\leq \|r^{\mu}V\|_{L^p(\Omega)} \|r^{\tau-\mu}f\|_{L^s(\Omega)} + O((R+1)^{\tau}) \ . \tag{7}$$

Or, comme $f = \eta f_o$ et $H^1(\Omega) \subset L^s(\Omega)$,

$$\|r^{\tau-\mu}f\|_{L^s(\Omega)} \leq \|r^{\tau-\mu}f_o\|_{L^s} + \|r^{\tau-\mu}(1-\eta)\|_{L^{\infty}}\|f\|_{L^s(\Omega)}$$

$$\leq \|r^{\tau-\mu}f_o\|_{L^s} + c(s)\|r^{\tau-\mu}(1-\eta)\|_{L^{\infty}}\|f\|_{H^1(\Omega)}$$

$$= \|r^{\tau-\mu}f_o\|_{L^s} + O((R+1)^{\tau-\mu}) \ . \tag{8}$$

Ainsi (7) peut être réécrit comme suit, ρ_R étant donné par (2) :

$$\|r^{\tau}\Delta f_o\|_{L^q} \leq \rho_R\|r^{\tau-\mu}f_o\|_{L^s} + O((R+1)^{\tau}) \ . \tag{9}$$

Puisque $\|r^{\tau-\mu}f_o\|_{L^s} \leq c(s)\|r^{\tau-\mu}f_o\|_{H^1(\Omega)}$ et la dernière norme est finie si $\tau - \mu \leq 0$ d'après II), (9) implique que $r^{\tau}\Delta f_o \in L^q$ pour tout $\tau \leq \mu$. En particulier $\Delta f_o \in L^q$ et par conséquent $f_o \in H^{2,q}$ en vertu de III).

Nous utilisons maintenant (5) qui implique que

$$\|\Delta r^{\tau}f_o\|_{L^q} \leq \|r^{\tau}\Delta f_o\|_{L^q} + (n|\tau|+\tau^2)\|r^{\tau-2}f_o\|_{L^q}$$

$$+ 2|\tau|\,\|r^{\tau-1}f_o\|_{H^{2,q}} \ . \tag{10}$$

Par conséquent, si $\tau \leq \tau_o \equiv \min\{\mu,1\}$, on aura $\Delta r^{\tau}f_o \in L^q$. Donc, en vertu de III) : $r^{\tau}f_o \in H^{2,q}$ pour tout $\tau \leq \tau_o$.

L'injection $H^{2,q}(\Omega) \subset L^s(\Omega)$ nous permet de déduire de l'inégalité (9) que

$$\|r^{\tau}\Delta f_o\|_{L^q} \leq \rho_R c(q,s)\|r^{\tau-\mu}f_o\|_{H^{2,q}} + O((R+1)^{\tau}) \ . \tag{11}$$

Comme $r^{\tau-\mu}f_o \in H^{2,q}$ si $\tau - \mu \leq \tau_o$, ceci implique que $r^{\tau}\Delta f_o \in L^q$ si $\tau \leq \tau_o + \mu$.

En réutilisant (10), on voit que $\Delta r^\tau f_o \in L^q$ si $\tau \leq 2\tau_o$, et par conséquent que $r^\tau f_o \in H^{2,q}$ pout tout $\tau \leq 2\tau_o$. En itérant cette procédure, on démontre que $\Delta r^\tau f_o \in L^q$ et $r^\tau f_o \in H^{2,q}$ pour tout $\tau \in \mathbb{R}$.

iv) L'inclusion $r^\tau \partial_j f_o \in L^q$ est maintenant immédiate :

$$\|r^\tau \partial_j f_o\|_{L^q} \leq \|\partial_j r^\tau f_o\|_{L^q} + |\tau|\,\|r^{\tau-1} f_o\|_{L^q}$$

$$\leq \|r^\tau f_o\|_{H^{2,q}} + |\tau|\,\|r^{\tau-1} f_o\|_{L^q} < \infty\ . \qquad \blacksquare$$

<u>Démonstration du théorème</u> : Nous choisissons s, q, R et η comme dans le lemme, et nous posons à nouveau $\Omega = \Omega_R$ et $f_o = \eta f$.

i) Soit $\theta \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que $\theta(x) = 1$ si $|x| \leq 1$ et $\theta(x) = 0$ si $|x| \geq 2$, $\beta = \|\,|\nabla\theta|\,\|_{L^\infty}$ et $\gamma = \|\Delta\theta\|_{L^\infty}$. Pour $a > 0$, soit θ_a la fonction définie par $\theta_a(x) = \theta(x/a)$. On a l'identité

$$\Delta\theta_a f_o = \theta_a \Delta f_o + (\Delta\theta_a) f_o + 2(\nabla\theta_a)\cdot\nabla f_o\ . \tag{12}$$

Combinée avec une identité similaire pour $\partial_j \theta_a f_o$, elle implique que $\theta_a f_o \in H_c^{2,q}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$. Nous pouvons donc appliquer (3), avec $\delta = \mu = 2 - n/p$, à la fonction $g = \theta_a f_o$. En remarquant que $|\nabla\theta_a(x)| \leq \beta a^{-1}$ et $|(\Delta\theta_a)(x)| \leq \gamma a^{-2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, ceci donne l'inégalité suivante $(\nu \in \Gamma_+)$:

$$\|r^\nu \theta_a f_o\|_{L^s} \leq C\|r^{\nu+\mu}\theta_a \Delta f_o\|_{L^q} + C\gamma a^{-2}\|r^{\nu+\mu} f_o\|_{L^q}$$

$$+ 2C\beta a^{-1}\|r^{\nu+\mu}\nabla f_o\|_{L^q}\ .$$

Le résultat du lemme permet d'effectuer la limite $a \to \infty$. En utilisant le théorème de la convergence dominée, on peut ainsi conclure que

$$\|r^\nu f_o\|_{L^s} \leq C\|r^{\nu+\mu}\Delta f_o\|_{L^q}\ , \qquad \nu \in \Gamma_+\ . \tag{13}$$

ii) Soit $\nu \in (0,\infty) \cap \Gamma_+$. Nous pouvons utiliser (9), avec $\tau = \nu + \mu$, pour majorer la norme L^q dans (13) :

$$\|r^\nu f_o\|_{L^s} \leq C\rho_R\|r^\nu f_o\|_{L^s} + O((R+1)^{\nu+\mu})\ . \tag{14}$$

Si $p < \infty$, on a $\rho_R \to 0$ lorsque $R \to \infty$, et nous pouvons supposer R suffisamment grand tel que $C\rho_R < 1$. Si $p = \infty$, C peut être remplacé par $2\nu^{-1}$, et il existe un nombre $\nu_o > 0$ tel que $2C\nu^{-1} < 1$ si $\nu \geq \nu_o$. Dans tous les cas nous pouvons déduire de (14) que

$$\| r^{\nu} f_o \|_{L^s} \leq O((R+1)^{\nu}) \tag{15}$$

lorsque $\nu \to \infty$ dans Γ_+ (μ étant une constante). Cette inégalité ne peut être satisfaite que si $f_o(x) = 0$ p.p. dans Ω_{R+1}. Donc f est à support compact.

iii) Pour montrer que $f = 0$ p.p. dans $\mathcal{O}$, on utilise le fait que l'inégalité différentielle (1) possède la propriété de prolongement unique dans H^{2,q_o}_{loc}, où $q_o = \max\{1, 2p/(p+2)\}$ (à noter que $q \geq q_o$). Cette propriété est également une conséquence de l'inégalité (3); elle se démontre à partir de (3), avec $\nu \in \Gamma_-$, à l'aide de la méthode de Carleman, voir par exemple [8] ou [11] (nous référons également à [8] pour une bibliographie concernant la propriété de prolongement unique). ∎

Remarque 1 : A part les résultats bien connus I)-III), la démonstration précédente fait intervenir l'inégalité (3) qui nous paraît assez subtile. Une inégalité de ce type fût démontrée par M. Schechter et B. Simon dans [12] et généralisée dans notre travail [11]. Pour $n \geq 5$, l'application de ces inégalités au problème du prolongement unique nécessite la condition $V \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ avec $p \geq n - 2$, et la restriction $p \geq n - 2$ n'est pas naturelle dans ce problème. La première restriction sur l'exposant p dans le théorème (qui requiert que $p > n/2$ et qui prévaut pour $n = 2,3,4$) est plus naturelle, et en fait la proposition énoncée plus haut est vraie pour $p = n/2$. Ce résultat est un cas particulier du théorème principal du récent travail [8] de D. Jerison et C.E. Kenig. Ces auteurs ont démontré des inégalités plus générales que (3) dans lesquelles le Laplacien Δ est remplacé par Δ^{α}, où α est un nombre entier appartenant à l'intervalle $[1, n/2]$. Leurs résultats pour $\alpha = 1$ impliquent que le théorème énoncé au début de cet exposé reste vrai si $p = n/2$, donc avec une condition de régularité plus faible sur le comportement local du potentiel V.

Il est intéressant de remarquer que toutes les démonstrations citées d'inégalités du type (3) font intervenir une méthode d'interpolation ainsi que des fonctions spéciales.

Remarque 2 : Il serait intéressant de trouver un raffinement de la démonstration indiquée ou une démonstration alternative permettant de déterminer le nombre $\kappa_o = \inf\{\kappa > 0 | r^\kappa f \notin L^2(\mathbb{R}^n)\}$.

Remarque 3 : Si nous posons $p = \infty$ dans le théorème, la condition sur le potentiel s'écrit $(1+r)^2 V \in L^\infty$, c'est-à-dire V doit tendre vers zéro comme $|x|^{-2}$ ou plus rapidement lorsque $|x| \to \infty$. On peut se convaincre à l'aide d'exemples que ce résultat est optimal : pour $0 < \alpha < 2$ on peut donner des potentiels satisfaisant $V(x) = O(|x|^{-\alpha})$ lorsque $|x| \to \infty$ tels que $\lambda = 0$ est valeur propre de $-\Delta + V$, et les fonctions propres associées ont la propriété que $(1+|x|)^\kappa f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pour tout κ [6]. La méthode de R. Froese et co-auteurs [3] permet de démontrer des bornes inférieures de la forme $\exp(\kappa r^\beta) f \notin L^2$ pour un $\kappa > 0$, où β est un nombre dans $(0,1)$ déterminé par α; nous référons à [3, Thm. 2.2 (b)] pour les détails.

Bibliographie

[1] Sh. Agmon, Lectures on Exponential Decay of Solutions of Second-Order Elliptic Equations, Princeton University Press (1982).

[2] C. Bardos et M. Merigot, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A 76, 323-344 (1977).

[3] R. Froese, I. Herbst, M. Hoffmann-Ostenhof et T. Hoffmann-Ostenhof, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A 95, 25-38 (1983).

[4] M. Reed et B. Simon, Analysis of Operators, Academic Press, New York (1978); Section XIII.11.

[5] L. Hörmander, The Analysis of Linear Partial Differential Operators II, Springer, Berlin (1983); Section 14.7.

[6] W.O. Amrein, A.M. Berthier et V. Georgescu, Lower Bounds for Zero Energy Eigenfunctions of Schrödinger Operators, à paraître dans Helv. Phys. Acta (1984).

[7] A. Hinz, Math. Zeitschr. 185, 291-304 (1984).

[8] D. Jerison et C.E. Kenig, Unique Continuation and Absence of Positive Eigenvalues for the Schrödinger Operator, à paraître.

[9] R.A. Adams, Sobolev Spaces, Academic Press, New York (1975); Chapitre 5.

[10] E.M. Stein, Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, Princeton University Press (1970); Theorem V.3.

[11] W.O. Amrein, A.M. Berthier et V. Georgescu, Ann. Inst. Fourier 31, 153-168 (1981).

[12] M. Schechter et B. Simon, J. Math. Anal. Appl. 77, 482-492 (1980).