JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

MICHEL LANGLAIS

Sur une classe de problèmes d'évolution non linéaires et dégénérés

Journées Équations aux dérivées partielles (1984), p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1984____A2_0>

SUR UNE CLASSE DE PROBLEMES D'EVOLUTION NON LINEAIRES ET DEGENERES

par

Michel LANGLAIS
U. E. R. de Mathématiques et Informatique
Université de BORDEAUX I
33405 TALENCE CEDEX

Les résultats décrits ci-dessous ont été obtenus en collaboration avec D. Phillips. Ils concernent des problèmes d'évolution du type :

$$(E)\quad \begin{cases} u_t - \Delta\eta(u) + b^i(x,t,u).\, u_{x_i} = f(x,t,u), \quad x\in\Omega,\ t>0. \\ u(x,0) = u_o(x), \quad x\in\Omega. \\ u(x,t) = u_1(t), \quad x\in\partial\Omega,\ t>0. \end{cases}$$

où η, b^i $i=1,..,N$ et f sont des fonctions suffisamment régulières et $\eta'(u) > 0$ pour $u \neq 0$.

Des cas particuliers de ces problèmes apparaissent dans certains modèles décrivant par exemple l'écoulement d'un gaz dans un milieu poreux, la dispersion de certaines populations ou dans des problèmes de plasma.

Comme en général $\eta'(0) = 0$ il est nécessaire de définir une notion de solution faible pour (E). On commence par donner des résultats d'existence et d'unicité pour ces solutions faibles. Ensuite, utilisant un résultat abstrait de [6] on étudie leur comportement lorsque t devient infini ; en particulier les termes du premier ordre peuvent engendrer des solutions périodiques.

1\. - <u>Hypothèses.</u> Les conditions imposées ci-dessous aux données sont supposées vérifiées dans toute la suite. D'abord :

$$
(1)\quad \begin{cases}
a> \ \eta \in C^1(\mathbb{R}),\ \eta(0) = 0\ ,\ \ \eta'(s) > 0 \text{ pour } s \neq 0\ ,\ \eta(0) = 0\ . \\
b> \ \text{il existe } \gamma > 0 \text{ tel que } \eta'(s) < \gamma\, s^{-1}\, \eta(s) \text{ pour } s \neq 0\ . \\
c> \ \text{il existe } \delta > 0 \text{ tel que } \eta' \text{ croisse strictement dans } (0, \delta) \\
\text{et décroisse strictement dans } (-\delta\ , 0)\ .
\end{cases}
$$

Les conditions (1, b, c) permettent d'obtenir à priori la continuité des solutions faibles en utilisant un résultat de Di Benedetto [3]. (1) est satisfaite pour $\eta(u) = |u|^m$ signe u, $m > 1$.

Ensuite :

$$
(2)\qquad f,\ b^1, -,\ b^N \text{ et } (x,t,u) \to \int_0^u \frac{\partial b^i}{\partial x_i}(x,t,s)\, ds \text{ sont dans } C^1(\bar{\Omega} \times [0,\infty) \times \mathbb{R})\ .
$$

Finalement Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ à frontière $\partial\Omega$ régulière et on se donne une fonction ψ avec :

$$
(3)\qquad \begin{cases}
\psi \in C(\bar{\Omega} \times [0,\infty)) \\
\psi(x,0) = \eta(u_o)(x) \text{ dans } \Omega,\ \ \psi(x,t) = \eta(u_1)(x,t) \text{ sur } \partial\Omega \times [0,\infty)
\end{cases}
$$

Cette condition sur (u_o, u_1) peut être affaiblie mais elle suffit à notre propos ; il en est de même des conditions sur f et les b^i, $i = 1, \ldots, N$.

2\. - <u>Formulation du problème.</u> Posons :

$$
\begin{cases}
B^i(x,t,u) = \int_o^u b^i(x,t,s)\, ds \quad i = 1, \ldots, N\ . \\
g(x,t,u) \ = \ f(x,t,u) \ + \ B^i_{x_i}(x,t,u)\ .
\end{cases}
$$

Si u est une solution régulière de (E) une intégration par parties conduit à :

$$
(4)\quad \begin{cases} \forall v \in C^{2,1}(\bar{\Omega} \times [0,T]),\ v \equiv 0 \text{ sur } \partial\Omega \times [0,T] \\ \int_\Omega u(x,t)\, v(x,t)\, dx - \int_{\Omega \times (0,t)} [u.\, v_t + \eta(u).\Delta v + B^i(x,s,u).\, v_{x_i} + g(x,s,u).\, v]\, dx\, ds = \\ \qquad = \int_\Omega u_o(x).\ v(x,0)\, dx - \int_{\partial\Omega \times (0,t)} \eta(u_l).\ \frac{\partial v}{\partial \nu}\, d\sigma\, ds \end{cases}
$$

avec $0 < t < T$; ν est la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$.

Définitions . - Une solution faible de (E) définie sur $(0, T)$ est une fonction u dans $L^\infty(\Omega \times (0,T)) \cap C([0,T]\,;\, L^1(\Omega))$ vérifiant l'égalité (4) pour tout t dans $(0, T)$.

De même une sous solution (resp. une sur solution) s'obtient en remplaçant dans (4) le signe = par $\leq$ (resp. $\geq$) pour tout $v \geq 0$ dans $\Omega \times (0,T)$.

3. - Unicité, stabilité et comparaison.

On a besoin de :

$$
(5)\quad \begin{cases} \exists\, \Phi \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^2),\ \forall u, \hat{u} \in \mathbb{R},\ \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T) \\ \sum\limits_{1 \leq i \leq N} \left(\dfrac{B^i(x,t,u) - B^i(x,t,\hat{u})}{u - \hat{u}} \right)^2 \leq \Phi(u,\hat{u}).\ \dfrac{\eta(u) - \eta(\hat{u})}{u - \hat{u}} \end{cases}
$$

Ceci signifie que en un certain sens les constantes de Lipschitz des B^i sont contrôlées par celle de η ; (5) est vérifiée par $\eta(u) = |u|^{m-1}u$, $B^i(x,t,u) = |u|^{n_i - 1}u$ lorsque $2n_i \geq m + 1 \geq 2$, qui est exactement le cas traité pour $N = 1$ dans Gilding et Peletier [4] . (5) n'est pas nécessaire si l'on s'intéresse à des solutions positives ou nulles : voir Diaz et Kersner [10] .

Théorème 1 . - Supposons (5) vraie. Etant donné deux solutions faibles u et $\hat{u}$ définies dans $(0, T)$ et coïncidant sur $\partial\Omega \times (0,T)$ (i. e. $u_l = \hat{u}_l$) il existe une constante C positive telle que pour tout t dans $(0, T)$:

$$
\int_\Omega |u(x,t) - \hat{u}(x,t)|\, dx \leq C . \int_\Omega |u(x,0) - \hat{u}(x,0)|\, dx .
$$

<u>Corollaire 1. -</u> Sous la condition (5) il existe au plus une solution faible.

<u>Preuve du Théorème 1. -</u> On adopte une idée classique : voir Ladyzenskaja, Solonnikov et Ural'treva [5] et aussi Aronson, Crandall et Peletier [1]. Introduisons :

$$a(x,t) = \frac{\eta(u) - \eta(\hat{u})}{u - \hat{u}}(x,t) \quad \text{p. p.} \quad \Omega \times (0,T)$$

$$\beta^i(x,t) = \frac{B^i(.,.,u) - B^i(.,.,\hat{u})}{u - \hat{u}}(x,t) \quad \text{p. p.} \quad \Omega \times (0,T)$$

qui sont des éléments bornés dans $\Omega \times (0,T)$ avec $a(x,t) \geq 0$.

Par différence entre les égalités vérifiées par u et $\hat{u}$ il vient pour $w = u - \hat{u}$ et v comme en (4) :

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_\Omega w(x,t)\, v(x,t)\, dx - \int_{\Omega \times (0,t)} [v_s + a\,\Delta v + \beta^i v_{x_i}]\, w\, dx\, ds = \\ &= \int_\Omega (u_o - \hat{u}_o)\, v(x,0)\, dx + \int_{\Omega \times (0,t)} g(x,s,u) - g(x,s,\hat{u})]\, v\, dx\, ds . \end{aligned} \right.$$

Soient $\lambda > 0$ assez grand et χ choisi dans $\mathcal{D}(\Omega)$ avec $0 \leq \chi(x) \leq 1$.

Pour tout $n \geq 0$ il existe un v_n avec :

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} &0 \leq v_n(x,s) \leq e^{\lambda(s-t)} \quad \text{dans } \Omega \times (0,t) \\ &v_n \in L^2(0,T;H^2(\Omega)) \cap H^1(\Omega \times (0,t)) \end{aligned} \right.$$

solution du problème parabolique rétrograde :

$$\left\{ \begin{aligned} &v_s + \left(\frac{1}{n} + a\right)\Delta v + \beta^i v_{x_i} = \lambda v \quad \text{dans } \Omega \times (0,t), \\ &v(x,t) = \chi(x) \quad \text{dans } \Omega \\ &v(x,s) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0,t) . \end{aligned} \right.$$

En utilisant (5) on obtient l'estimation a priori

$$\int_{\Omega \times (0,t)} |\Delta v_n|^2 \, dx\, dx \leq \sqrt{n} \, . \, C, \quad C \text{ indépendante de } n .$$

Un raisonnement par densité montre que l'on peut prendre $v = v_n$ dans (6) . Utilisant (7), faisant d'abord tendre n vers $+\infty$ puis ensuite χ vers la fonction caractéristique du support de $(u - \hat{u})^+ (.\,, t)$ conduit à :

$$(8) \quad \begin{cases} \int_\Omega (u - \hat{u})^+(x,t)\, dx \leq \\ \leq e^{-\lambda t} \int_\Omega (u_o - \hat{u}_o)^+ dx + \int_{\Omega \times (0,t)} [\, g(x,s,u) - g(x,s,\hat{u}) + \lambda\, (u - \hat{u})\,]^+ \, e^{\lambda (s-t)} dx\, ds \end{cases}$$

Comme g est régulier alors que u et $\hat{u}$ sont bornés, pour λ assez grand $[\, g(x,s,u) - g(x,s,\hat{u}) + \lambda\, (u - \hat{u})\,]^+ \equiv 0$.

Un raisonnement analogue avec $\hat{u} - u$ conduit au résultat cherché.

Corollaire 2. - Sous la conditions (5) si u est une sous solution et $\hat{u}$ une sur solution avec $u_1(x,t) \leq \hat{u}_1 (x,t)$ sur $\partial \Omega \times (0,T)$ et $u(x,0) \leq \hat{u}(x,0)$ dans Ω on a $u(x,t) \leq \hat{u}(x,t)$ dans $\Omega \times (0,T)$.

En effet la même démarche que ci-dessus conduit encore à (8) .

4. - Existence . Commençons d'abord par supposer que T étant fixé :

(9) $\exists K > 0 , \; | f(x,t,u) - f(x,t,v) | \leq K. \, | u - v | , \; (x,t) \in \Omega \times (0,T), \; u, v \in \mathbb{R}$

Il en résulte que :

$$\exists k_1 > 0 , \; k_2 > 0 \text{ tq } u.\, f(x,t,u) \leq k_1 u^2 + k_2 \quad \text{dans } \Omega \times (0,T) \times \mathbb{R} .$$

Théorème 2. - Sous la condition (9) il existe une solution faible définie dans (0, T), continue sur $\bar{\Omega} \times [0, T]$ vérifiant :

$$|u(x,t)| \leq e^{\lambda t} . \operatorname{Max} \left(\sqrt{\frac{k_2}{\lambda - k_1}} , \operatorname*{Max}_{\Omega \times (0,T)} |\psi(x,t)| \right) \tag{10}$$

pour tout $\lambda > k_1$ et (x, t) dans $\Omega \times (0, T)$.

Lorsque la condition de Lipschitz (9) ci-dessus n'est plus imposée on obtient seulement un résultat local d'existence.

Théorème 3. - (Sous les conditions du paragraphe 1) il existe un $T^* > 0$ et une solution faible dans $(0, T^*)$, continue sur $\bar{\Omega} \times [0, T^*]$.

Ceci résultat du Théorème 2 et de (10) en tronquant f pour $|u|$ grand.

Preuve du Théorème 2. - On approche au sens de $C^1(\mathbb{R})$ η par des η_p réguliers tels que $\eta'_p(s) \geq \frac{1}{p}$ pour $s \in \mathbb{R}$ et vérifiant les conditions (1, b, c) uniformément en p. On approche aussi ψ par des ψ_p réguliers. Pour tout p le problème parabolique :

$$\begin{cases} u_t - \Delta \eta_p(u) + b^i(x,u).\ u_{x_i} = f(x,t,u) & \text{dans } \Omega \times (0,T) \\ \eta_p(u)\,(x,0) = \psi_p(x,0) & \text{dans } \Omega \\ \eta_p(u)\,(x,t) = \psi_p(x,t) & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T) \end{cases}$$

possède une unique solution $u_p \in C(\bar{\Omega} \times [0, T]) \cap C^{2,1}(\Omega \times (0, T))$ (voir [5]) qui vérifie l'estimation (10); en outre u_p appartient à $L^2(0, T; H^1(\Omega))$ de sorte que d'après [3] la suite u_p est équicontinue sur $\bar{\Omega} \times [0, T]$. Par passage à la limite sur une sous suite on obtient le résultat.

Remarque : Si $f(x, t, 0) \geq 0$ et si l'on s'intéresse à des solutions positives ou nulles on peut procéder comme dans Bertsch [2].

5. - Comportement asymptotique : un résultat abstrait. Le caractère dégénéré du problème, soit $\eta'(0) = 0$, fait que en général on ne peut utiliser les méthodes des systèmes dynamiques (sauf en dimension $N = 1$, voir [1], et dans certains cas particuliers : voir Sacks [9]).

Soit donc u une solution faible définie dans $(0, \infty)$ avec

(11) $$|u(x,t)| \leq M_o \quad \text{dans } \Omega \times (0,\infty)$$

et supposons que :

(12) $$\exists\, T_o > 0, \ \nabla \eta(u) \in L^{\infty}(T_o, \infty\,;\, L^2(\Omega)), \ (\eta(u))_t \in L^2(T_o, \infty; L^2(\Omega)).$$

L'ensemble $\{\eta(u)(.,t),\ t \geq T_o\}$ est alors borné dans $H^1(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$.

Posons :

$$\omega(\psi) = \{ w \in H^1(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega),\ \exists\, t_n \to \infty,\ \eta(u)(.,t_n) \to w$$

$$\text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort lorsque } n \to \infty \}$$

Théorème 4. - Soit u une solution faible vérifiant (11)(12). On suppose en outre que lorsque $t \to \infty$:

$$\begin{cases} \psi(.,t) \to w_{\infty} \quad \text{dans } L^1(\partial\Omega) \\ g(.,t,.) \to g_{\infty}(.,.) \quad \text{uniformément sur } \bar{\Omega} \times [-M_o, M_o] \\ B^i(.,t.) \to B^i_{\infty}(.,.) \quad \text{uniformément dans } C \quad (\bar{\Omega} \times [-M_o, M_o]). \end{cases}$$

Alors tout w pris dans $\omega(\psi)$ est une solution de :

(S) $$\begin{cases} -\Delta w + [B^i_{\infty}(x, \eta^{-1}(w))]_{x_i} = g_{\infty}(x, \eta^{-1}(w)) \quad \text{dans } \Omega \\ w = w_{\infty} \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

L'idée de la démonstration consiste à choisir des fonctions test adéquat dans (4) comme dans [6] auquel nous renvoyons. Dans la pratique $\{\eta(u)(\ ,t),\ t \geq T_o\}$ est relativement compact dans $C(\bar{\Omega})$ et la convergence dans $\omega(\psi)$ est uniforme sur $\bar{\Omega}$.

6. - <u>Application au cas $b^i \equiv 0$ $i = 1, .., N$.</u> Ce cadre dans lequel il y a unicité est la motivation de [6], [7] où les exemples ci-dessous sont traités en détail. Commençons par montrer un effet régularisant :

<u>Théorème 5. -</u> On suppose $b^i \equiv 0$ $i = 1, .., N$ et f indépendant de t.

Soit u une solution faible définie dans $(0, \infty)$ vérifiant (11) ; on suppose :

$$(13)\quad \begin{cases} \exists\, T_o > 0,\ \psi \in C^{2,\alpha}(\bar{\Omega} \times [T_{o,\infty})),\ 0 < \alpha < 1 \\ \int_{T_o}^{\infty} [\,\|\psi_t\|_{C^{1,\alpha}(\bar{\Omega})} + \|\psi_{tt}\|_{L^\infty(\Omega)}\,]\,dt \leq M_1 < +\infty \end{cases}$$

Alors (12) est vérifiée.

<u>Corollaire 3. -</u> Sous les conditions du Théorème 5 tout w dans $\omega(\psi)$ est une solution de :

$$\begin{cases} -\Delta w = f(x, \eta^{-1}(w)) \text{ dans } \Omega \\ w = w_\infty \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

<u>Remarque :</u> Si ψ est indépendant du temps la condition intégrale dans (13) est vide ; en particulier la conclusion du Corollaire 3 reste vrai si $u_1 \equiv 0$ et $u_o \in L^\infty(\Omega)$ ou pour $u_o \in L^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ et $u_1 = u_o$ sur $\partial\Omega$.

Le problème essentiel est donc de chercher des conditions suffisantes assurant l'existence de solutions faibles définies dans $(0, \infty)$ et bornées. Pour cela il suffit de raisonner par sous et sur solutions et cela marche bien lorsqu'on s'intéresse à des solutions positives ou nulles.

Théorème 6. - Soit $b^i \equiv 0$ $i = 1, \dots, N$ et f indépendant du temps. On suppose en outre $f(x, 0) \geq 0$ dans Ω et qu'il existe $\bar{u} \in L^\infty(\Omega)$ avec $\eta(\bar{u}) \in H^2(\Omega)$ et :

$$\left\{\begin{array}{l} -\Delta \eta(\bar{u}) \geq f(x, \bar{u}) \text{ dans } \Omega, \\ 0 \leqslant \eta(\bar{u})(x) \leqslant M_2 < +\infty \text{ dans } \Omega \end{array}\right.$$

Alors pour tout ψ tel que $0 \leqslant \psi(x,t) \leqslant \eta(\bar{u})(x)$ dans $\Omega \times (0, \infty)$ il existe une unique solution faible définie dans $(0, \infty)$ et vérifiant $0 \leqslant u(x, t) \leqslant \bar{u}(x) \leqslant \eta^{-1}(M_2)$.

Il suffit d'appliquer le Corollaire 2 en vérifiant que 0 est sous solution et $\bar{u}$ est sur solution .

Exemple 1. - On prend $m > 1$ et on considère :

$$(14) \quad \left\{\begin{array}{l} u_t - \Delta u^m = u\,(1-u) \quad \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_o(x) \quad \text{dans } \Omega \\ u(x, t) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty) \end{array}\right.$$

Si $0 \leqslant u_o(x) \leqslant 1$, $u_o \not\equiv 0$ alors (14) possède une unique solution faible $u \in C(\bar{\Omega} \times (0, \infty))$, $0 \leqslant u(x,t) \leqslant 1$ et $u^m(.\,, t) \to w(.)$ dans $C(\bar{\Omega})$ lors $t \to \infty$, w étant l'unique solution dans $C^{2+1/m}(\bar{\Omega})$ de :

$$\left\{\begin{array}{l} -\Delta w = w^{1/m} .\ (1 - w^{1/m}) \quad \text{dans } \Omega \\ w = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ w \not\equiv 0 \quad \text{et } 0 \leqslant w(x) \leqslant 1 \text{ dans } \Omega . \end{array}\right.$$

Exemple 2. - On prend encore $m > 1$ et on considère :

$$(15) \quad \left\{\begin{array}{l} u_t - \Delta u^m = \lambda u^p + \mu \quad \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_o(x) \text{ dans } \Omega \\ u(x, t) = u_1(x, t) \text{ sur } \partial\Omega \times (0, \infty) \end{array}\right.$$

On suppose l'une des conditions suivantes réalisées (μ est réel):

$$(16)\quad \begin{cases} \lambda \leq 0 \quad \text{et} \quad p > 0 \\ \lambda > 0 \quad \text{et} \quad p \in (1, m) \\ \lambda \in (0, \lambda_1) \quad \text{et } p = m \text{ avec } \lambda_1 = \text{première valeur propre du problème de} \\ \qquad \text{Dirichlet pour le Laplacien dans } \Omega \,. \end{cases}$$

Si $0 \leq \psi(x,t) \leq M_o$ il existe un $\bar{u}$ régulier solution de

$$(17)\quad \begin{cases} -\Delta \bar{u} = \lambda \bar{u}^{p/m} + \mu \text{ dans } \Omega \\ \bar{u} = M_o \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Par suite (15) admet une solution faible dans $(0, \infty)$ avec $0 \leq u^m(x,t) \leq \bar{u}(x)$ continue sur $\bar{\Omega} \times (0, \infty)$; sous la condition (13) tout w dans $\omega(\psi)$ vérifie :

$$-\Delta w = \lambda\, w^{p/m} + \mu \text{ dans } \Omega \,;\; w = \lim_{t \to \infty} \psi(.,t) \text{ sur } \partial\Omega .$$

<u>Remarque :</u> Lorsque $\lambda > 0$ et $p > m$, (17) peut avoir ou ne pas avoir de solution; si il en existe une alors pour tout ψ tel que $0 \leq \psi(x,t) \leq \bar{u}(x)$ une solution faible existe et se stabilise à $t = +\infty$ comme ci-dessus (voir aussi [9]) .

7. - <u>Remarques sur le cas général.</u> Le Théorème 5 montre que lorsque $b^i \equiv 0$ $i = 1, \ldots, N$ et pour des conditions aux limites homogènes (soit $u_1 \equiv 0$) la condition (12) est une conséquence de (11) . Malheureusement dès que les b^i ne sont pas identiquement nuls ceci n'est plus nécessairement vrai.

<u>Exemple 3. -</u> On prend $f \equiv 0$, $b^i(x,u) = b^i(u)$ indépendant de x $i = 1, \ldots, N$ ainsi que $u_1 \equiv 0$ sur $\partial\Omega \times (0,T)$. Il existe alors une solution faible définie dans $(0, \infty)$ avec $|u(x,t)| \leq \underset{\bar{\Omega}}{\mathrm{Max}} |u_o(x)|$ dans $\Omega \times (0, \infty)$. En outre (12) est vérifiée de sorte que par application du Théorème 4 $u(x,t) \to 0$ uniformément sur $\bar{\Omega}$ lorsque $t \to \infty$.

Exemple 4. - On prend $N = 2$; Ω est le disque centré à l'origine de rayon 2.

Soit $\rho > 0$ petit devant 1 ; on pose :

$$\psi(x, y) = ([\rho^2 - (x-1)^2 - (y-1)^2]^+)^3, \quad (x, y) \in \Omega$$

Alors ψ est dans $C^2(\bar{\Omega})$ et vérifie

$$(18) \quad \begin{cases} -\Delta\psi = 12\,\psi^{1/3}.\,(3\,\psi^{1/3} - 2\,\rho^2) \text{ dans } \Omega\,. \\ \psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Introduisant les coordonnées polaires (R, θ) on définit $w(R, \theta) = \psi^{1/3}(x, y)$ puis on considère

$$u(x, y, t) = \mathbf{v}(R, \theta, t) = w(R, \theta + t)$$

La fonction u ainsi construite est régulière et périodique de période 2π ; en plus :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \frac{\partial w}{\partial \theta}(R, \theta + t) = \frac{\partial v}{\partial \theta}(R, \theta, t) = \overrightarrow{b(x, y)}.\,\overrightarrow{\nabla u}(x, y, t)$$

soit pour $f(u) = 12u.\,(3u - 2\rho^2)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u^3 - b(x, y).\,\nabla u = f(u) \text{ dans } \Omega \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = [\rho^2 - (x-1)^2 - (y-1)^2]^+ \text{ dans } \Omega \\ u(x, t) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, \infty) \end{cases}$$

Il est clair que (11) est vrai, $\nabla u^3 \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega))$ mais u^3_t n'est pas de carré sommable sur $\Omega \times (0, \infty)$; d'un autre côté tout élément de l'ensemble $\omega(\psi)$ est une solution de (18) .

Exemple 5. - On reprend un résultat de Nakao [8] avec $\eta(u) = |u|^m u$, $f(x, t, u) = f(u)$ tel que $|f(u)| \leq k|u|^{\alpha+1}$ $u_1 \equiv 0$, $b^i(x, t, u) = b^i(u)$ $i = 1, \ldots, N$

Si $\alpha > m$ et $N = 1, 2$ ou $m < \alpha < \dfrac{m(N+2)+4}{N-2}$ et $N \geq 3$ alors pour u_o " pas trop grand " (11) (12) sont encore vraies et $|u(x, t)| \leq C\,(1+t)^{-1/m}$ dans $\Omega \times (0, \infty)$.

[1] Aronson D., Crandall M. G., Peletier L. A., Non linear Analysis T. M. A. 6, 10, 1001-1022 (1982).

[2] Bertsch M. Non linear Analysis T. M. A. 7, 1, 117-127 (1983).

[3] Di Benedetto. A boundary modulus of continuity for a class of singular parabolic equations. A paraître.

[4] Gilding B. H., Peletier L. A. Arch. Rat. Mech. Anal. 61, 1976, 127-140.

[5] Ladyzenskaja O. A., Solonnikov V. A., Uralceva N. N. Amer. Math. Soc. Transl. Math. Mono. 23 Providence, R. I. (1968).

[6] Langlais, M., Phillips D. Non linear Analysis. A paraître.

[7] Langlais M., Phillips D. Proceedings " Physical Mathematics and Non linear P. D. E. " West Virginia Univ. Series ou Pure and Applied Mathematics. M. Dekker .. A paraître

[8] Nakao M. Existence and Decay of Global Solutions of some Non linear Degenerate Parabolic Equations. A paraître.

[9] Sacks P. Global behaviour for a class of non linear evolution equations A paraître.

[10] Diaz J. I, Kersner R. On a non linear degenerate parabolic equation .... M. R. C. Technical Report n°2502. Univ. of Wisconsin, Madison.